1. LES INTÉGRALES

1.1 La primitive

1. $f(x) = x - 3 = x^1 - 3 \quad \Rightarrow \quad F(x) = \dfrac{x^{1+1}}{1+1} - 3x + C = \frac{1}{2}x^2 - 3x + C$

Vérification: $F'(x) = \frac{1}{2}(2x) - 3 + 0 = x - 3 = f(x)$

2. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 6 \quad \Rightarrow \quad F(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{x^3}{3} - 2\dfrac{x^2}{2} + 6x + C = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + 6x + C$

3. $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x^2 - \frac{4}{5}x^3 \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{2}x + \dfrac{3}{4}\dfrac{x^{2+1}}{2+1} - \dfrac{4}{5}\dfrac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{5}x^4 + C$

Vérification: $F'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(3x^2) - \frac{1}{5}(4x^3) + 0 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x^2 - \frac{4}{5}x^3 = f(x)$

4. $f(x) = 8x^9 - 3x^6 + 12x^3 \quad \Rightarrow \quad F(x) = 8(\frac{1}{10}x^{10}) - 3(\frac{1}{7}x^7) + 12(\frac{1}{4}x^4) + C = \frac{4}{5}x^{10} - \frac{3}{7}x^7 + 3x^4 + C$

5. $f(x) = (x+1)(2x-1) = 2x^2 + x - 1 \quad \Rightarrow \quad F(x) = 2(\frac{1}{3}x^3) + \frac{1}{2}x^2 - x + C = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + C$

6. $f(x) = x(2-x)^2 = x(4 - 4x + x^2) = 4x - 4x^2 + x^3 \quad \Rightarrow \quad F(x) = 4(\frac{1}{2}x^2) - 4(\frac{1}{3}x^3) + \frac{1}{4}x^4 + C = 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + C$

7. $f(x) = 7x^{2/5} + 8x^{-4/5} \quad \Rightarrow \quad F(x) = 7\left(\frac{5}{7}x^{7/5}\right) + 8(5x^{1/5}) + C = 5x^{7/5} + 40x^{1/5} + C$

8. $f(x) = x^{3,4} - 2x^{\sqrt{2}-1} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \dfrac{x^{4,4}}{4,4} - 2\left(\dfrac{x^{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\right) + C = \dfrac{5}{22}x^{4,4} - \sqrt{2}x^{\sqrt{2}} + C$

9. $f(x) = \sqrt{2}$ est une fonction constante, donc $F(x) = \sqrt{2}x + C$.

10. $f(x) = e^2$ est une fonction constante, donc $F(x) = e^2x + C$.

11. $f(x) = 3\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x} = 3x^{1/2} - 2x^{1/3} \quad \Rightarrow \quad F(x) = 3\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right) - 2\left(\frac{3}{4}x^{4/3}\right) + C = 2x^{3/2} - \frac{3}{2}x^{4/3} + C$

12. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + x\sqrt{x} = x^{2/3} + x^{3/2} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{3}{5}x^{5/3} + \frac{2}{5}x^{5/2} + C$

13. Le domaine de $f(x) = \dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{x} = \dfrac{1}{5} - 2\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est $]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$; par conséquent, $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}x - 2\ln(x) + C_1 & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{1}{5}x - 2\ln(-x) + C_2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

Voir l'exemple 1b) qui résout un problème semblable.

 © Groupe Modulo inc., 2013

14. Le domaine de $f(t)=\dfrac{3t^4-t^3+6t^2}{t^4}=3-\dfrac{1}{t}+\dfrac{6}{t^2}$ est $]-\infty,0[\cup]0,\infty[$; par conséquent, $F(t)=\begin{cases}3t-\ln(t)-\dfrac{6}{t}+C_1 & \text{si} \quad t<0\\ 3t-\ln(-t)-\dfrac{6}{t}+C_2 & \text{si} \quad t>0\end{cases}$ Voir l'exemple 1b) qui résout un problème semblable.

15. $g(t)=\dfrac{1+t+t^2}{\sqrt{t}}=t^{-1/2}+t^{1/2}+t^{3/2} \quad \Rightarrow \quad G(t)=2t^{1/2}+\frac{2}{3}t^{3/2}+\frac{2}{5}t^{5/2}+C$

16. $r(\theta)=\sec\theta\tan\theta-2e^{\theta} \quad \Rightarrow \quad R(\theta)=\sec\theta-2e^{\theta}+C_n$ sur l'intervalle $]n\pi-\frac{\pi}{2},n\pi+\frac{\pi}{2}[$.

17. $h(\theta)=2\sin\theta-\sec^2\theta \quad \Rightarrow \quad H(\theta)=-2\cos\theta-\tan\theta+C_n$ sur l'intervalle $]n\pi-\frac{\pi}{2},n\pi+\frac{\pi}{2}[$.

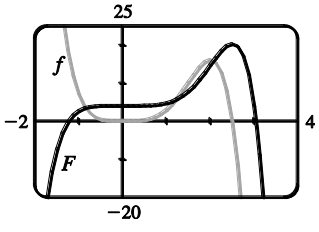
18. $f(x)=2\sqrt{x}+6\cos x=2x^{1/2}+6\cos x \quad \Rightarrow \quad F(x)=2\left(\dfrac{x^{3/2}}{3/2}\right)+6\sin x+C=\frac{4}{3}x^{3/2}+6\sin x+C$

19. $f(x)=\dfrac{x^5-x^3+2x}{x^4}=x-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^3}=x-\dfrac{1}{x}+2x^{-3} \quad \Rightarrow$

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}-\ln(x)+2\left(\dfrac{x^{-3+1}}{-3+1}\right)+C=\frac{1}{2}x^2-\ln(x)-\dfrac{1}{x^2}+C & \text{si } x>0\\ \dfrac{x^2}{2}-\ln(-x)+2\left(\dfrac{x^{-3+1}}{-3+1}\right)+C=\frac{1}{2}x^2-\ln(-x)-\dfrac{1}{x^2}+C & \text{si } x<0\end{cases}$$

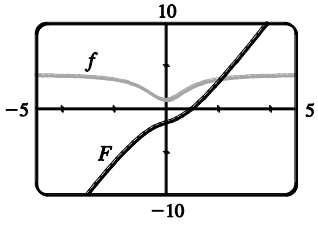
20. $f(x)=\dfrac{2+x^2}{1+x^2}=\dfrac{1+(1+x^2)}{1+x^2}=\dfrac{1}{1+x^2}+1 \quad \Rightarrow \quad F(x)=\arctan x+x+C$

21. $f(x)=5x^4-2x^5 \quad \Rightarrow \quad F(x)=5\cdot\dfrac{x^5}{5}-2\cdot\dfrac{x^6}{6}+C=x^5-\frac{1}{3}x^6+C$. $F(0)=4 \quad \Rightarrow \quad 0^5-\frac{1}{3}\cdot 0^6+C=4 \quad \Rightarrow \quad C=4$, donc $F(x)=x^5-\frac{1}{3}x^6+4$. La courbe est en accord avec cette réponse, puisque $f(x)=0$ lorsque F a un maximum local, la valeur de f est positive lorsque F augmente, et la valeur de f est négative lorsque F décroit.



 © Groupe Modulo inc., 2013

22. $f(x)=4-3(1+x^2)^{-1}=4-\dfrac{3}{1+x^2} \Rightarrow F(x)=4x-3\arctan x+C$. $F(1)=0 \Rightarrow 4-3(\frac{\pi}{4})+C=0 \Rightarrow C=\frac{3\pi}{4}-4$, donc $F(x)=4x-3\arctan x+\frac{3\pi}{4}-4$. On constate que la valeur de f est positive et que F est croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, les valeurs de f sont plus petites là où les pentes des tangentes de F sont plus petites.



23. $f''(x)=20x^3-12x^2+6x \Rightarrow f'(x)=20\left(\dfrac{x^4}{4}\right)-12\left(\dfrac{x^3}{3}\right)+6\left(\dfrac{x^2}{2}\right)+C=5x^4-4x^3+3x^2+C \Rightarrow$

$f(x)=5\left(\dfrac{x^5}{5}\right)-4\left(\dfrac{x^4}{4}\right)+3\left(\dfrac{x^3}{3}\right)+Cx+D=x^5-x^4+x^3+Cx+D$

24. $f''(x)=x^6-4x^4+x+1 \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{7}x^7-\frac{4}{5}x^5+\frac{1}{2}x^2+x+C \Rightarrow$

$f(x)=\frac{1}{56}x^8-\frac{2}{15}x^6+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+Cx+D$

25. $f''(x)=\frac{2}{3}x^{2/3} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{x^{5/3}}{5/3}\right)+C=\frac{2}{5}x^{5/3}+C \Rightarrow f(x)=\dfrac{2}{5}\left(\dfrac{x^{8/3}}{8/3}\right)+Cx+D=\frac{3}{20}x^{8/3}+Cx+D$

26. $f''(x)=6x+\sin x \Rightarrow f'(x)=6\left(\dfrac{x^2}{2}\right)-\cos x+C=3x^2-\cos x+C \Rightarrow$

$f(x)=3\dfrac{x^3}{3}-\sin x+Cx+D=x^3-\sin x+Cx+D$

27. $f'''(t)=\cos t \Rightarrow f''(t)=\sin t+C_1 \Rightarrow f'(t)=-\cos t+C_1t+D \Rightarrow f(t)=-\sin t+Ct^2+Dt+E$, où $C=\frac{1}{2}C_1$.

28. Le domaine de $f'''(t)=e^t-t^{-4}$ est

$]-\infty,0[\cup]0,\infty[\Rightarrow f''(t)=\begin{cases}e^t-\frac{1}{3}t^{-3}+C_1 & \text{si} \quad t<0\\ e^t-\frac{1}{3}t^{-3}+C_2 & \text{si} \quad t>0\end{cases} \Rightarrow$

$f't)=\begin{cases}e^t+\frac{1}{6}t^{-2}+C_1t+D_1 & \text{si} \quad t<0\\ e^t+\frac{1}{6}t^{-2}+C_2t+D_2 & \text{si} \quad t>0\end{cases} \Rightarrow f(t)=\begin{cases}e^t-\frac{1}{6}t^{-1}+\frac{1}{2}C_1t^2+D_1t+E_1 & \text{si} \quad t<0\\ e^t-\frac{1}{6}t^{-1}+\frac{1}{2}C_2t^2+D_2t+E_2 & \text{si} \quad t>0\end{cases}$

29. $f'(x)=1+3\sqrt{x} \Rightarrow f(x)=x+3\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)+C=x+2x^{3/2}+C$. $f(4)=4+2(8)+C$. Or, $f(4)=25 \Rightarrow 20+C=25 \Rightarrow C=5$, donc $f(x)=x+2x^{3/2}+5$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

30. $f'(x)=5x^4-3x^2+4 \Rightarrow f(x)=x^5-x^3+4x+C$. $f(-1)=-1+1-4+C$. Or, $f(-1)=2 \Rightarrow -4+C=2 \Rightarrow C=6$, donc $f(x)=x^5-x^3+4x+6$.

31. $f'(t)=\dfrac{4}{1+t^2} \Rightarrow f(t)=4\arctan t+C$. $f(1)=4\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+C$. Or, $f(1)=0 \Rightarrow \pi+C=0 \Rightarrow C=-\pi$, donc $f(t)=4\arctan t-\pi$.

32. $f'(t)=t+\dfrac{1}{t^3}, t>0 \Rightarrow f(t)=\dfrac{1}{2}t^2-\dfrac{1}{2t^2}+C$. $f(1)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}+C$. Or, $f(1)=6 \Rightarrow C=6$, donc $f(t)=\dfrac{1}{2}t^2-\dfrac{1}{2t^2}+6$.

33. $f'(t)=2\cos t+\sec^2 t \Rightarrow f(t)=2\sin t+\tan t+C$ puisque $-\pi/2<t<\pi/2$. $f(\frac{\pi}{3})=2\left(\sqrt{3}/2\right)+\sqrt{3}+C=2\sqrt{3}+C$.

Or, $f(\frac{\pi}{3})=4 \Rightarrow C=4-2\sqrt{3}$, donc $f(t)=2\sin t+\tan t+4-2\sqrt{3}$.

34. Le domaine de $f'(x)=\dfrac{x^2-1}{x}=x-\dfrac{1}{x}$ est $]-\infty,0[\cup]0,\infty[\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2-\ln x+C_1 & \text{si} \quad x>0\\ \frac{1}{2}x^2-\ln(-x)+C_2 & \text{si} \quad x<0\end{cases}$ $f(1)=\frac{1}{2}-\ln 1+C_1=\frac{1}{2}+C_1$.

Or, $f(1)=\frac{1}{2} \Rightarrow C_1=0$. $f(-1)=\frac{1}{2}-\ln 1+C_2=\frac{1}{2}+C_2$. Or, $f(-1)=0 \Rightarrow C_2=-\frac{1}{2}$. Par conséquent,

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2-\ln x & \text{si} \quad x>0\\ \frac{1}{2}x^2-\ln(-x)-\frac{1}{2} & \text{si} \quad x<0\end{cases}$$

35. Le domaine de $f'(x)=x^{-1/3}$ est $]-\infty,0[\cup]0,\infty[\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x^{2/3}+C_1 & \text{si} \quad x>0\\ \frac{3}{2}x^{2/3}+C_2 & \text{si} \quad x<0\end{cases}$ $f(1)=\frac{3}{2}+C_1$. Or, $f(1)=1 \Rightarrow C_1=-\frac{1}{2}$.

$f(-1)=\frac{3}{2}+C_2$ et $f(-1)=-1 \Rightarrow C_2=-\frac{5}{2}$. Par conséquent, $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x^{2/3}-\frac{1}{2} & \text{si} \quad x>0\\ \frac{3}{2}x^{2/3}-\frac{5}{2} & \text{si} \quad x<0\end{cases}$

36. $f'(x)=4/\sqrt{1-x^2} \Rightarrow f(x)=4\arcsin x+C$. $f(\frac{1}{2})=4\arcsin(\frac{1}{2})+C=4\cdot\frac{\pi}{6}+C$. Or, $f(\frac{1}{2})=1 \Rightarrow \frac{2\pi}{3}+C=1 \Rightarrow C=1-\frac{2\pi}{3}$,

donc $f(x)=4\arcsin x+1-\frac{2\pi}{3}$.

37. $f''(x)=-2+12x-12x^2 \Rightarrow f'(x)=-2x+6x^2-4x^3+C$. $f'(0)=C$. Or, $f'(0)=12 \Rightarrow C=12$, donc

$f'(x)=-2x+6x^2-4x^3+12$ et, par conséquent, $f(x)=-x^2+2x^3-x^4+12x+D$ $f(0)=D$. Or, $f(0)=4 \Rightarrow D=4$, donc

$f(x)=-x^2+2x^3-x^4+12x+4$.

38. $f''(x)=8x^3+5 \Rightarrow f'(x)=2x^4+5x+C$. $f'(1)=2+5+C$ .Or, $f'(1)=8 \Rightarrow C=1$, donc $f'(x)=2x^4+5x+1$.

$f(x)=\frac{2}{5}x^5+\frac{5}{2}x^2+x+D$. $f(1)=\frac{2}{5}+\frac{5}{2}+1+D=D+\frac{39}{10}$. Or, $f(1)=0 \Rightarrow D=-\frac{39}{10}$, donc $f(x)=\frac{2}{5}x^5+\frac{5}{2}x^2+x-\frac{39}{10}$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

39. $f''(\theta)=\sin\theta+\cos\theta \Rightarrow f'(\theta)=-\cos\theta+\sin\theta+C$. $f'(0)=-1+C$. Or, $f'(0)=4 \Rightarrow C=5$, donc $f'(\theta)=-\cos\theta+\sin\theta+5$ et, par conséquent, $f(\theta)=-\sin\theta-\cos\theta+5\theta+D$. $f(0)=-1+D$. Or, $f(0)=3 \Rightarrow D=4$, donc $f(\theta)=-\sin\theta-\cos\theta+5\theta+4$.

40. $f''(t)=3/\sqrt{t}=3t^{-1/2} \Rightarrow f'(t)=6t^{1/2}+C$. $f'(4)=12+C$. Or, $f'(4)=7 \Rightarrow C=-5$, donc $f'(t)=6t^{1/2}-5$ et, par conséquent, $f(t)=4t^{3/2}-5t+D$. $f(4)=32-20+D$. Or, $f(4)=20 \Rightarrow D=8$, donc $f(t)=4t^{3/2}-5t+8$.

41. $f''(x)=4+6x+24x^2 \Rightarrow f'(x)=4x+3x^2+8x^3+C \Rightarrow f(x)=2x^2+x^3+2x^4+Cx+D$. $f(0)=D$. Or, $f(0)=3 \Rightarrow D=3$, donc $f(x)=2x^2+x^3+2x^4+Cx+3$. $f(1)=8+C$. Or, $f(1)=10 \Rightarrow C=2$, donc $f(x)=2x^2+x^3+2x^4+2x+3$.

42. $f''(x)=2+\cos x \Rightarrow f'(x)=2x+\sin x+C \Rightarrow f(x)=x^2-\cos x+Cx+D$. $f(0)=-1+D$. Or, $f(0)=-1 \Rightarrow D=0$. $f(\tfrac{\pi}{2})=\pi^2/4+(\tfrac{\pi}{2})C$. Or, $f(\tfrac{\pi}{2})=0 \Rightarrow (\tfrac{\pi}{2})C=-\pi^2/4 \Rightarrow C=-\tfrac{\pi}{2}$, donc $f(x)=x^2-\cos x-(\tfrac{\pi}{2})x$.

43. $f''(t)=2e^t+3\sin t \Rightarrow f'(t)=2e^t-3\cos t+C \Rightarrow f(t)=2e^t-3\sin t+Ct+D$. $f(0)=2+D$. Or, $f(0)=0 \Rightarrow D=-2$. $f(\pi)=2e^{\pi}+\pi C-2$. Or, $f(\pi)=0 \Rightarrow \pi C=2-2e^{\pi} \Rightarrow C=\dfrac{2-2e^{\pi}}{\pi}$, donc $f(t)=2e^t-3\sin t+\dfrac{2-2e^{\pi}}{\pi}t-2$.

44. $f''(x)=x^{-2}$, $x>0 \Rightarrow f'(x)=-1/x+C \Rightarrow f(x)=-\ln|x|+Cx+D=-\ln x+Cx+D$ [puisque $x>0$].

$f(1)=0 \Rightarrow C+D=0$. Or, $f(2)=0 \Rightarrow -\ln 2+2C+D=0 \Rightarrow -\ln 2+2C-C=0$

[puisque $D=-C$] $\Rightarrow -\ln 2+C=0 \Rightarrow C=\ln 2$ et $D=-\ln 2$. Donc, $f(x)=-\ln x+(\ln 2)x-\ln 2$.

45. $f'''(x)=\cos x \Rightarrow f''(x)=\sin x+C$. $f''(0)=C$ et $f''(0)=3 \Rightarrow C=3$.

$f''(x)=\sin x+3 \Rightarrow f'(x)=-\cos x+3x+D$. $f'(0)=-1+D$. Or, $f'(0)=2 \Rightarrow D=3$.

$f'(x)=-\cos x+3x+3 \Rightarrow f(x)=-\sin x+\tfrac{3}{2}x^2+3x+E$. $f(0)=E$. Or, $f(0)=1 \Rightarrow E=1$. Par conséquent, $f(x)=-\sin x+\tfrac{3}{2}x^2+3x+1$.

46. Sachant que $f'(x)=2x+1$, on obtient $f(x)=x^2+x+C$. Comme f passe par le point (1, 6), $f(1)=6 \Rightarrow 1^2+1+C=6 \Rightarrow C=4$. Donc, $f(x)=x^2+x+4$ et $f(2)=2^2+2+4=10$.

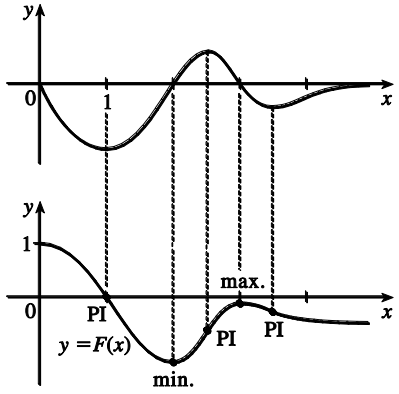
47. $f'(x)=x^3 \Rightarrow f(x)=\tfrac{1}{4}x^4+C$. $x+y=0 \Rightarrow y=-x \Rightarrow m=-1$. Or, $m=f'(x) \Rightarrow -1=x^3 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow y=1$ (tiré de l'équation de la tangente), donc (−1, 1) est un point sur la courbe de f. Selon f, $1=\tfrac{1}{4}(-1)^4+C \Rightarrow C=\tfrac{3}{4}$. Par conséquent, la fonction est $f(x)=\tfrac{1}{4}x^4+\tfrac{3}{4}$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

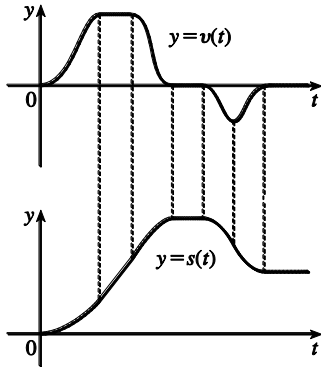
48. *b* est une primitive de *f*. Pour une petite valeur de *x*, la valeur de *f* est négative, ce qui signifie que la courbe d'une primitive doit être décroissante. Or, *a* et *c* augmentent toutes deux pour une petite valeur de *x*, donc seule *b* peut être une primitive de *f*. De plus, la valeur de *f* est positive là où *b* augmente, ce qui appuie cette conclusion.

49. On sait d'emblée que *c* ne peut pas être une primitive de *f*, puisque la pente de *c* n'est pas zéro à la valeur de *x* pour laquelle $f = 0$. Or, la valeur de *f* est positive quand *a* augmente et négative quand *a* décroît, donc *a* est une primitive de *f*.

50. La courbe de *F* doit débuter au point (0, 1). Lorsque la courbe donnée, $y = f(x)$, admet un minimum relatif (local) ou un maximum relatif (local), la courbe de *F* aura un point d'inflexion. Là où la valeur de *f* est négative (positive), *F* est décroissante (croissante). Au point où la valeur de *f* passe de négative à positive, *F* aura un minimum. Au point où la valeur de *f* passe de positive à négative, *F* aura un maximum. Là où la valeur de *f* est décroissante (croissante), *F* est concave vers le bas (vers le haut).

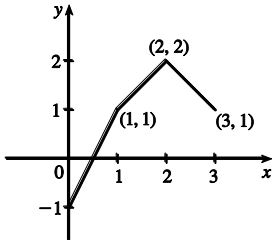


51. Là où *v* est positive (négative), *s* est croissante (décroissante). Là où *v* est croissante (décroissante), *s* est concave vers le haut (vers le bas). Là où *v* est horizontale (une vitesse constante), *s* est linéaire.



52. $$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ -1 & \text{si} \quad 2 < x \le 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \begin{cases} 2x + C & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ x + D & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ -x + E & \text{si} \quad 2 < x \le 3 \end{cases}$$

 © Groupe Modulo inc., 2013



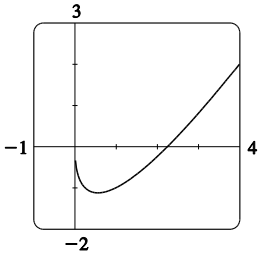
$f(0) = -1 \;\Rightarrow\; 2(0) + C = -1 \;\Rightarrow\; C = -1$.

En prenant comme point de départ le point (0, −1) et en se déplaçant vers la droite sur une ligne dont la pente est égale à 2, on arrive au point (1, 1). La pente de $1 < x < 2$ est égale à 1; on arrive donc au point (2, 2). On se fonde ici sur le fait que f est continue. On peut inclure le point $x = 1$ dans la première ou la seconde partie de f. La ligne reliant (1, 1) à (2, 2) est $y = x$, donc $D = 0$. La pente de $2 < x \leq 3$ est égale à −1, et on arrive donc au point (3, 1). $f(3) = 1 \;\Rightarrow\; -3 + E = 1 \;\Rightarrow\; E = 4$. Par conséquent,

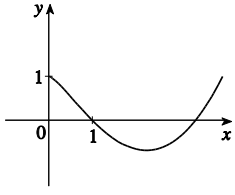
$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ x & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ -x + 4 & \text{si} \quad 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

On constate que $f'(x)$ n'existe pas lorsque $x = 1$ ou $x = 2$.

53. a)



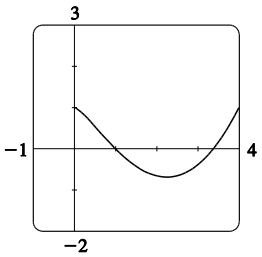
b) Puisque $F(0) = 1$, on peut prendre comme point de départ de la courbe le point (0, 1). f a un minimum vers $x = 0{,}5$; sa dérivée est donc égale à 0 à ce point. f est décroissante sur l'intervalle]0; 0,5[; sa dérivée est donc négative et, par conséquent, F est concave vers le bas au point (0; 0,5) et a un point d'inflexion en $x \approx 0{,}5$. Sur l'intervalle]0,5; 2,2[, f est négative et croissante (f' est positive); F est donc décroissante et concave vers le haut. Sur l'intervalle]2,2; ∞[, f est positive et croissante; F est donc croissante et concave vers le haut.



c) $f(x) = 2x - 3\sqrt{x} \;\Rightarrow\; F(x) = x^2 - 3 \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} + C$. $F(0) = C$ et $F(0) = 1 \;\Rightarrow\; C = 1$, donc $F(x) = x^2 - 2x^{3/2} + 1$.

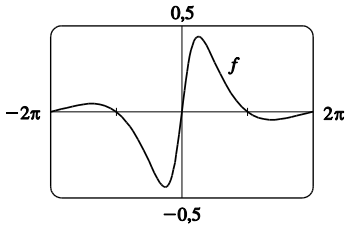
 © Groupe Modulo inc., 2013

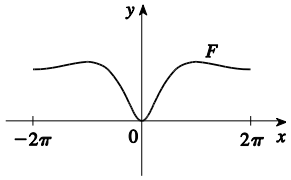
d)



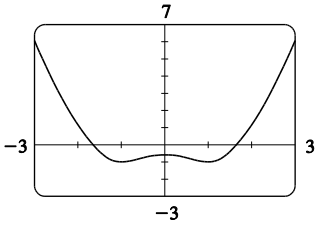
54. $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^2}$, $-2\pi \le x \le 2\pi$

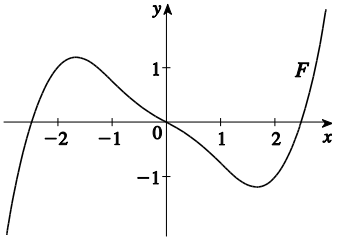
On constate que la courbe de f est celle d'une fonction impaire; la courbe de F sera donc celle d'une fonction paire.





55. $f(x)=\sqrt{x^4-2x^2+2}-2$, $-3 \le x \le 3$ On constate que la courbe de f est celle d'une fonction paire; la courbe de F sera donc celle d'une fonction impaire.





56. $v(t)=s'(t)=\sin t-\cos t \;\Rightarrow\; s(t)=-\cos t-\sin t+C$. $s(0)=-1+C$. Or, $s(0)=0 \;\Rightarrow\; C=1$, donc $s(t)=-\cos t-\sin t+1$.

57. $v(t)=s'(t)=1{,}5\sqrt{t} \;\Rightarrow\; s(t)=t^{3/2}+C$. $s(4)=8+C$. Or, $s(4)=10 \;\Rightarrow\; C=2$, donc $s(t)=t^{3/2}+2$.

58. $a(t)=v'(t)=2t+1 \;\Rightarrow\; v(t)=t^2+t+C$. $v(0)=C$. Or, $v(0)=-2 \;\Rightarrow\; C=-2$, donc $v(t)=t^2+t-2$ et $s(t)=\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2-2t+D$.

$s(0)=D$. Or, $s(0)=3 \;\Rightarrow\; D=3$, donc $s(t)=\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2-2t+3$.

59. $a(t)=v'(t)=3\cos t-2\sin t \;\Rightarrow\; v(t)=3\sin t+2\cos t+C$. $v(0)=2+C$. Or, $v(0)=4 \;\Rightarrow\; C=2$, donc $v(t)=3\sin t+2\cos t+2$

et $s(t)=-3\cos t+2\sin t+2t+D$. $s(0)=-3+D$. Or, $s(0)=0 \;\Rightarrow\; D=3$, donc $s(t)=-3\cos t+2\sin t+2t+3$.

60. $a(t)=v'(t)=10\sin t+3\cos t \;\Rightarrow\; v(t)=-10\cos t+3\sin t+C \;\Rightarrow\; s(t)=-10\sin t-3\cos t+Ct+D$. $s(0)=-3+D=0$ et

$s(2\pi)=-3+2\pi C+D=12 \;\Rightarrow\; D=3$ et $C=\frac{6}{\pi}$. Par conséquent, $s(t)=-10\sin t-3\cos t+\frac{6}{\pi}t+3$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

61. $a(t) = t^2 - 4t + 6 \Rightarrow v(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 6t + C \Rightarrow s(t) = \frac{1}{12}t^4 - \frac{2}{3}t^3 + 3t^2 + Ct + D$. $s(0) = D$. Or, $s(0) = 0 \Rightarrow D = 0$.

$s(1) = \frac{29}{12} + C$. Or, $s(1) = 20 \Rightarrow C = \frac{211}{12}$. Par conséquent, $s(t) = \frac{1}{12}t^4 - \frac{2}{3}t^3 + 3t^2 + \frac{211}{12}t$.

62. a) Puisque la pierre tombe d'une hauteur de 450 m, on déduit d'abord que $v(0) = 0$ et $s(0) = 450$.

$v'(t) = a(t) = -9{,}8 \Rightarrow v(t) = -9{,}8t + C$. Or, $v(0) = 0 \Rightarrow C = 0$, donc $v(t) = -9{,}8t \Rightarrow s(t) = -4{,}9t^2 + D$. Enfin,

$s(0) = 450 \Rightarrow D = 450 \Rightarrow s(t) = 450 - 4{,}9t^2$.

b) La pierre touche le sol quand $s(t) = 0$. $450 - 4{,}9t^2 = 0 \Rightarrow t^2 = 450/4{,}9 \Rightarrow t_1 = \sqrt{450/4{,}9} \approx 9{,}58$ s.

c) La vitesse de la pierre lorsqu'elle touche le sol est $v(t_1) = -9{,}8\sqrt{450/4{,}9} \approx -93{,}9$ m/s.

d) Il s'agit simplement de reprendre les parties a) et b) et d'employer $v(0) = -5$. Si on utilise $v(t) = -9{,}8t + C$,

$v(0) = -5 \Rightarrow 0 + C = -5 \Rightarrow v(t) = -9{,}8t - 5$. Donc, $s(t) = -4{,}9t^2 - 5t + D$ et

$s(0) = 450 \Rightarrow D = 450 \Rightarrow s(t) = -4{,}9t^2 - 5t + 450$. En appliquant la formule quadratique pour résoudre l'équation

$s(t) = 0$, on obtient $t = \left(5 \pm \sqrt{8845}\right)/(-9{,}8) \Rightarrow t_1 \approx 9{,}09$ s.

63. $v'(t) = a(t) = a \Rightarrow v(t) = at + C$ et

$v_0 = v(0) = C \Rightarrow v(t) = at + v_0 \Rightarrow s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + D \Rightarrow s_0 = s(0) = D \Rightarrow s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$

64. On reprend l'exercice 63 avec les valeurs suivantes : $a = -9{,}8$, $s(t) = -4{,}9t^2 + v_0t + s_0$ et $v(t) = s'(t) = -9{,}8t + v_0$. Donc,

$[v(t)]^2 = (-9{,}8t + v_0)^2 = (9{,}8)^2t^2 - 19{,}6v_0t + v_0^2 = v_0^2 + 96{,}04t^2 - 19{,}6v_0t = v_0^2 - 19{,}6(-4{,}9t^2 + v_0t)$. Cependant, $-4{,}9t^2 + v_0t$ est simplement $s(t)$ sans le terme s_0, c'est-à-dire $s(t) - s_0$. Par conséquent, $[v(t)]^2 = v_0^2 - 19{,}6[s(t) - s_0]$.

65. Pour la première balle, $s_1(t) = -4{,}9t^2 + 14t + 140$ (tiré de l'exemple 7). Pour la seconde balle, $a(t) = -9{,}8 \Rightarrow v(t) = -9{,}8t + C$.

Toutefois, $v(1) = -9{,}8(1) + C = 7 \Rightarrow C = 16{,}8$, donc $v(t) = -9{,}8t + 16{,}8 \Rightarrow s(t) = -4{,}9t^2 + 16{,}8t + D$, mais

$s(1) = -4{,}9(1)^2 + 16{,}8(1) + D = 140 \Rightarrow D = 128{,}1$, et $s_2(t) = -4{,}9t^2 + 16{,}8t + 128{,}1$. Les balles se croisent lorsque

$s_1(t) = s_2(t) \Rightarrow -4{,}9t^2 + 14t + 140 = -4{,}9t^2 + 16{,}8t + 128{,}1 \Leftrightarrow 2{,}8t = 11{,}9 \Leftrightarrow t = 4{,}25$ s. *Autre solution :* À partir de l'exercice 63, on obtient $s_1(t) = -4{,}9t^2 + 14t + 140$ et $s_2(t) = -4{,}9t^2 + 7t + 140$. On cherche à présent à résoudre

$s_1(t) = s_2(t-1) \Rightarrow -4{,}9t^2 + 14t + 140 = -4{,}9(t-1)^2 + 7(t-1) + 140 \Rightarrow$

$14t = 9{,}8t - 4{,}9 + 7t - 7 \Rightarrow 11{,}9 = 2{,}8t \Rightarrow t = 4{,}25$ s.

 © Groupe Modulo inc., 2013

66. À partir de l'exercice 63 et des valeurs suivantes : $a = -9{,}8$, $v_0 = 0$ et $s_0 = h$ (hauteur de la falaise), on sait que la hauteur au temps t est $s(t) = -4{,}9t^2 + h$. $v(t) = s'(t) = -9{,}8t$ et $v(t) = -40 \Rightarrow -9{,}8t = -40 \Rightarrow t = 4{,}08$, donc

$0 = s(4{,}08) = -4{,}9(4{,}08)^2 + h \Rightarrow h = 4{,}9(4{,}08)^2 \approx 81{,}6$ m.

67. a) $EIy'' = mg(L-x) + \frac{1}{2}\rho g(L-x)^2 \Rightarrow EIy' = -\frac{1}{2}mg(L-x)^2 - \frac{1}{6}\rho g(L-x)^3 + C \Rightarrow EIy = \frac{1}{6}mg(L-x)^3 + \frac{1}{24}\rho g(L-x)^4 + Cx + D$.

Puisque l'extrémité gauche du tremplin est fixe, on doit avoir $y = y' = 0$ quand $x = 0$. Par conséquent, $0 = -\frac{1}{2}mgL^2 - \frac{1}{6}\rho gL^3 + C$ et

$0 = \frac{1}{6}mgL^3 + \frac{1}{24}\rho gL^4 + D$. Il s'ensuit que $EIy = \frac{1}{6}mg(L-x)^3 + \frac{1}{24}\rho g(L-x)^4 + (\frac{1}{2}mgL^2 + \frac{1}{6}\rho gL^3)x - (\frac{1}{6}mgL^3 + \frac{1}{24}\rho gL^4)$ et

$$f(x) = y = \frac{1}{EI}[\tfrac{1}{6}mg(L-x)^3 + \tfrac{1}{24}\rho g(L-x)^4 + (\tfrac{1}{2}mgL^2 + \tfrac{1}{6}\rho gL^3)x - (\tfrac{1}{6}mgL^3 + \tfrac{1}{24}\rho gL^4)]$$

b) $f(L) < 0$, ce qui fait que l'extrémité du tremplin est à une *distance* approximative de $-f(L)$ sous la ligne horizontale. Selon le résultat obtenu en a), on calcule

$$-f(L) = \frac{-1}{EI}[\tfrac{1}{2}mgL^3 + \tfrac{1}{6}\rho gL^4 - \tfrac{1}{6}mgL^3 - \tfrac{1}{24}\rho gL^4] = \frac{-1}{EI}(\tfrac{1}{3}mgL^3 + \tfrac{1}{8}\rho gL^4) = -\frac{gL^3}{EI}\left(\frac{m}{3} + \frac{\rho L}{8}\right)$$

Remarque: Ce résultat est positif puisque g est négative.

68. Coût marginal $= 1{,}92 - 0{,}002x = C'(x) \Rightarrow C(x) = 1{,}92x - 0{,}001x^2 + K$.

Cependant, $C(1) = 1{,}92 - 0{,}001 + K = 562 \Rightarrow K = 560{,}081$. Par conséquent,

$C(x) = 1{,}92x - 0{,}001x^2 + 560{,}081 \Rightarrow C(100) = 742{,}081$, donc le coût de production de 100 unités est de 742,08 $.

69. Soit $m(x)$ = la masse, mesurée depuis une extrémité. Alors $m(0) = 0$ et $\rho = \frac{dm}{dx} = x^{-1/2} \Rightarrow m(x) = 2x^{1/2} + C$ et $m(0) = C = 0$,

donc $m(x) = 2\sqrt{x}$. Par conséquent, la masse de la tige de 100 cm est $m(100) = 2\sqrt{100} = 20$ g.

70. Si on considère que la direction vers le haut est positive, on obtient pour $0 \le t \le 10$ (en utilisant l'indice 1 pour faire référence aux valeurs $0 \le t \le 10$), $a_1(t) = -(9 - 0{,}9t) = v_1'(t) \Rightarrow v_1(t) = -9t + 0{,}45t^2 + v_0$, mais

$v_1(0) = v_0 = -10 \Rightarrow v_1(t) = -9t + 0{,}45t^2 - 10 = s_1'(t) \Rightarrow s_1(t) = -\frac{9}{2}t^2 + 0{,}15t^3 - 10t + s_0$. Toutefois,

$s_1(0) = 500 = s_0 \Rightarrow s_1(t) = -\frac{9}{2}t^2 + 0{,}15t^3 - 10t + 500$. $s_1(10) = -450 + 150 - 100 + 500 = 100$, donc la goutte de pluie met plus de 10 secondes pour atteindre le sol. Or, pour $t > 10$,

$a(t) = 0 = v'(t) \Rightarrow v(t) = \text{constante} = v_1(10) = -9(10) + 0{,}45(10)^2 - 10 = -55 \Rightarrow v(t) = -55$. À 55 m/s, il faudra 100/55 ≈ 1,8 s à la goutte de pluie pour parcourir les derniers 100 m. Donc, le temps total nécessaire est $10 + \frac{100}{55} = \frac{130}{11} \approx 11.8$ s.

 © Groupe Modulo inc., 2013

71. $v'(t) = a(t) = -7$. La vitesse initiale est 80 km/h $= \frac{80 \cdot 1000}{3600} = \frac{200}{9}$ m/s, donc $v(t) = -7t + \frac{200}{9}$. L'automobile s'immobilise lorsque $v(t) = 0 \iff t = \frac{200}{7 \cdot 9} = \frac{200}{63}$. Puisque $s(t) = -\frac{7}{2}t^2 + \frac{200}{9}t$, la distance parcourue est $s(\frac{200}{63}) = -\frac{7}{2}(\frac{200}{63})^2 + \frac{200}{9} \cdot \frac{200}{63} = \frac{20000}{567} = 35{,}3$ m.

72. $a(t) = k$, la vitesse initiale est 50 km/h $= 50 \cdot \frac{1000}{3600} = \frac{125}{9}$ m/s, et la vitesse finale (après 5 secondes) est 80 km/h $= 80 \cdot \frac{1000}{3600} = \frac{200}{9}$ m/s. Donc, $v(t) = kt + C$ et $v(0) = \frac{125}{9} \Rightarrow C = \frac{125}{9}$. Par conséquent, $v(t) = kt + \frac{125}{9} \Rightarrow v(5) = 5k + \frac{125}{9}$. Toutefois, $v(5) = \frac{200}{9}$, donc $5k + \frac{125}{9} = \frac{200}{9} \Rightarrow 5k = \frac{75}{9} \Rightarrow k = \frac{5}{3} \approx 1{,}67$ m/s^2.

73. $a(t) = -4 \Rightarrow v(t) = -4t + v_0$ où v_0 est la vitesse de l'automobile (m/s) au moment où le conducteur a actionné les freins. L'automobile s'immobilise quand $-4t + v_0 = 0 \iff t = \frac{1}{4}v_0$. Or, $s(t) = \frac{1}{2}(-4)t^2 + v_0 t = -2t^2 + v_0 t$. L'automobile a parcouru 60 m avant de s'immobiliser, donc

$s(\frac{1}{4}v_0) = 60 \Rightarrow 60 = -2(\frac{1}{4}v_0)^2 + v_0(\frac{1}{4}v_0) = \frac{1}{8}v_0^2 \Rightarrow v_0^2 = 8 \cdot 60 = 480 \Rightarrow v_0 = 4\sqrt{30}$ m/s $\approx 21{,}9$ m/s.

74. Soit l'accélération $a(t) = k$ km/h^2. On a $v(0) = 100$ km/h et on peut donner à la position initiale $s(0)$ la valeur 0. On cherche le temps t_f pour lequel $v(t) = 0$ afin de satisfaire à la condition $s(t) < 0{,}08$ km. En général, $v'(t) = a(t) = k$, donc $v(t) = kt + C$, où $C = v(0) = 100$. Or, $s'(t) = v(t) = kt + 100$, donc $s(t) = \frac{1}{2}kt^2 + 100t + D$, où $D = s(0) = 0$. Par conséquent, $s(t) = \frac{1}{2}kt^2 + 100t$. Puisque $v(t_f) = 0$, on obtient $kt_f + 100 = 0$ ou $t_f = -100/k$, donc $s(t_f) = \frac{1}{2}k\left(-\frac{100}{k}\right)^2 + 100\left(-\frac{100}{k}\right) = 10\,000\left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{k}\right) = -\frac{5\,000}{k}$. La condition que doit remplir $s(t_f)$ est $-\frac{5\,000}{k} < 0{,}08 \Rightarrow -\frac{5\,000}{0{,}08} > k$ [k est négative] $\Rightarrow k < -62\,500$ km/h^2, ou encore, $k < -\frac{3125}{648} \approx -4{,}82$ m/s^2.

75. a) Pour $0 \le t \le 10$, on a $a(t) = 18t \Rightarrow v(t) = 9t^2 + C \Rightarrow v(0) = 0 = C \Rightarrow v(t) = 9t^2$, donc $s(t) = 3t^3 + C \Rightarrow s(0) = 0 = C \Rightarrow s(t) = 3t^3$. On constate que $v(10) = 900$ et $s(10) = 3000$. Pour $10 < t \le 180$, on a $a(t) = -g = -9{,}8$ m/s $\Rightarrow v(t) = -9{,}8(t - 10) + C \Rightarrow v(10) = 900 = C \Rightarrow$

$v(t) = -9{,}8(t - 10) + 900 = -9{,}8t + 998 \Rightarrow s(t) = -4{,}9(t - 10)^2 + 900(t - 10) + C \Rightarrow s(10) = 3000 = C \Rightarrow$

$s(t) = -4{,}9(t - 10)^2 + 900(t - 10) + 3\,000 = -4{,}9t^2 + 998t - 6490$. On constate que $v(180) = -766$ et $s(180) = 14\,390$.

Pour $180 < t \le 190$: L'accélération augmente de façon linéaire de −766 m/s à −16 m/s durant cette période, donc $\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-16 - (-766)}{190 - 180} = \frac{750}{10} = 75$. Par conséquent,

$v(t) = 75(t - 180) - 766 = 75t - 14\,266 \Rightarrow s(t) = \frac{75}{2}(t - 180)^2 - 766(t - 180) + 14\,390 = 37{,}5t^2 - 14\,266t + 1\,367\,270$ et $s(190) = 10\,480$ m.

 © Groupe Modulo inc., 2013

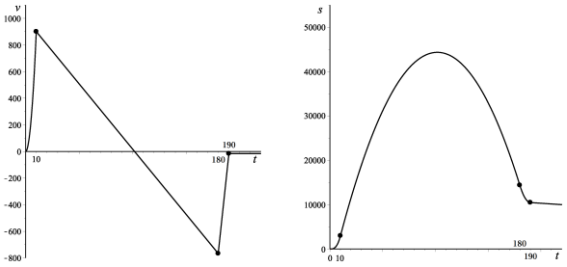
Pour $t > 190$: $v(t) = -16 \Rightarrow s(t) = -16(t-190) + C$. Cependant,

$s(190) = 10\,480 = C \Rightarrow s(t) = -18(t-190) + 10\,480 = -16t + 13\,520$. Par conséquent, jusqu'au moment où la fusée atterrit, on obtient

$$v(t) = \begin{cases} 9t^2 & \text{si } 0 \le t \le 10 \\ -9{,}8t + 998 & \text{si } 10 < t \le 180 \\ 75t - 14\,266 & \text{si } 180 < t \le 190 \\ -16 & \text{si } t > 190 \end{cases}$$

et

$$s(t) = \begin{cases} 3t^3 & \text{si } 0 \le t \le 10 \\ -4{,}9t^2 + 998t - 6\,490 & \text{si } 10 < t \le 180 \\ 37{,}5t^2 - 14\,266t + 1\,367\,270 & \text{si } 180 < t \le 190 \\ -16t + 13\,520 & \text{si } t > 190 \end{cases}$$



b) Pour calculer le moment auquel la fusée atteint sa hauteur maximale, on établit que $v(t)$ pour $10 < t \le 180$ est égale à 0.

$-9{,}8t + 998 = 0 \Rightarrow t_1 = 101{,}8367$ s et la hauteur maximale est $s(t_1) = -4{,}9t_1^{\,2} + 998t_1 - 6\,490 = 44\,326{,}531$ m.

c) Pour découvrir le moment auquel la fusée atterrit, on établit que $s(t) = -16t + 13\,520 = 0$. Alors, $t = 845$ s.

76. a) Il faut d'abord noter que $144 \text{ km/h} = 144 \times \frac{1000}{3600} \text{ m/s} = 40 \text{ m/s}$. Ensuite, $a(t) = 1{,}6 \text{ m/s}^2 \Rightarrow v(t) = 1{,}6t + C$, mais

$v(0) = 0 \Rightarrow C = 0$. Or, $1{,}6t = 40$ lorsque $t = \frac{40}{1{,}6} = 25$ s ; il faut donc 25 s au train pour atteindre 40 m/s. Considérant que $s(0) = 0$, on obtient $s(t) = 0{,}8t^2$, $0 \le t \le 25$. Donc, $s(25) = 500$ m. 15 min = 15(60) = 900 s, donc pour $25 < t \le 925$, on obtient

$v(t) = 40$ m/s $\Rightarrow s(925) = 40(900) + 500 = 36\,500 \text{ m} = 36{,}5$ km.

b) Comme dans la partie a), le train accélère pendant 25 s et parcourt 500 m durant cette accélération. De la même façon, il décélère pendant 25 s et parcourt 500 m à la fin de son parcours. Durant les 900 − 50 = 850 s qui restent, le train voyage à 40 m/s, donc la distance parcourue est 40 × 850 = 34 000 m. Par conséquent, la distance totale est 500 + 34 000 + 500 = 35 000 m = 35 km.

 © Groupe Modulo inc., 2013

c) 75 km = 75(1000) = 75 000 m. On soustrait 2(500) pour tenir compte de l'accélération et de la décélération ; on obtient ainsi 74 000 m à 40 m/s pour un voyage de 74 000/40 = 1850 s à 144 km/h. Le temps total est 1850 + 2(25) = 1900 s = 31 min 67 s = 31,40 min.

d) 37,5(60) = 2250 s. 2250 − 2(25) = 2200 s à la vitesse maximale. 2200(40) + 2(500) = 89 000 m = 89 km au total.

 © Groupe Modulo inc., 2013

1.2 La notation sigma

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{5}\sqrt{i}=\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}$

2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{i+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$

3. $\displaystyle\sum_{i=4}^{6}3^{i}=3^{4}+3^{5}+3^{6}$

4. $\displaystyle\sum_{i=4}^{6}i^{3}=4^{3}+5^{3}+6^{3}$

5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{4}\frac{2k-1}{2k+1}=-1+\frac{1}{3}+\frac{3}{5}+\frac{5}{7}+\frac{7}{9}$

6. $\displaystyle\sum_{k=5}^{8}x^{k}=x^{5}+x^{6}+x^{7}+x^{8}$

7. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}i^{10}=1^{10}+2^{10}+3^{10}+\cdots+n^{10}$

8. $\displaystyle\sum_{j=n}^{n+3}j^{2}=n^{2}+(n+1)^{2}+(n+2)^{2}+(n+3)^{2}$

9. $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{j}=1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}$

10. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\,\Delta x_i=f(x_1)\,\Delta x_1+f(x_2)\,\Delta x_2+f(x_3)\,\Delta x_3+\cdots+f(x_n)\,\Delta x_n$

11. $\displaystyle 1+2+3+4+\cdots+10=\sum_{i=1}^{10}i$

12. $\displaystyle\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}=\sum_{i=3}^{7}\sqrt{i}$

13. $\displaystyle\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\cdots+\frac{19}{20}=\sum_{i=1}^{19}\frac{i}{i+1}$

 © Groupe Modulo inc., 2013

14. $\dfrac{3}{7}+\dfrac{4}{8}+\dfrac{5}{9}+\dfrac{6}{10}+\cdots+\dfrac{23}{27}=\sum_{i=3}^{23}\dfrac{i}{i+4}$

15 $2+4+6+8+\cdots+2n=\sum_{i=1}^{n}2i$

16. $1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$

17. $1+2+4+8+16+32=\sum_{i=0}^{5}2^i$

18. $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{25}+\dfrac{1}{36}=\sum_{i=1}^{6}\dfrac{1}{i^2}$

19. $x+x^2+x^3+\cdots+x^n=\sum_{i=1}^{n}x^i$

20. $1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i x^i$

21. $\sum_{i=4}^{8}(3i-2)=[3(4)-2]+[3(5)-2]+[3(6)-2]+[3(7)-2]+[3(8)-2]=10+13+16+19+22=80$

22. $\sum_{i=3}^{6}i(i+2)=3\cdot5+4\cdot6+5\cdot7+6\cdot8=15+24+35+48=122$

23. $\sum_{j=1}^{6}3^{j+1}=3^2+3^3+3^4+3^5+3^6+3^7=9+27+81+243+729+2187=3276$

(Pour une formule plus générale, se référer à l'exercice 47.)

24. $\sum_{k=0}^{8}\cos k\pi=\cos 0+\cos\pi+\cos 2\pi+\cos 3\pi+\cos 4\pi+\cos 5\pi+\cos 6\pi+\cos 7\pi+\cos 8\pi$

$=1-1+1-1+1-1+1-1+1=1$

25. $\sum_{n=1}^{20}(-1)^n=-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1-1+1=0$

26. $\sum_{i=1}^{100}4=\underbrace{4+4+4+\cdots+4}_{(100\text{ termes})}=100\cdot4=400$

 © Groupe Modulo inc., 2013

27. $\sum_{i=0}^{4}(2^i + i^2) = (1+0)+(2+1)+(4+4)+(8+9)+(16+16) = 61$

28. $\sum_{i=-2}^{4} 2^{3-i} = 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 + 2^{-1} = 63{,}5$

29. $\sum_{i=1}^{n} 2i = 2\sum_{i=1}^{n} i = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2}$ [selon le théorème 3c)] $= n(n+1)$

30. $\sum_{i=1}^{n}(2-5i) = \sum_{i=1}^{n} 2 - \sum_{i=1}^{n} 5i = 2n - 5\sum_{i=1}^{n} i = 2n - \frac{5n(n+1)}{2} = \frac{4n}{2} - \frac{5n^2+5n}{2} = -\frac{n(5n+1)}{2}$

31. $\sum_{i=1}^{n}(i^2+3i+4) = \sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 4 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3n(n+1)}{2} + 4n$

$= \frac{1}{6}[(2n^3+3n^2+n)+(9n^2+9n)+24n] = \frac{1}{6}(2n^3+12n^2+34n) = \frac{1}{3}n(n^2+6n+17)$

32. $\sum_{i=1}^{n}(3+2i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(9+12i+4i^2) = \sum_{i=1}^{n} 9 + 12\sum_{i=1}^{n} i + 4\sum_{i=1}^{n} i^2 = 9n + 6n(n+1) + \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$

$= \frac{27n+18n^2+18n+4n^3+6n^2+2n}{3} = \frac{1}{3}(4n^3+24n^2+47n) = \frac{1}{3}n(4n^2+24n+47)$

33. $\sum_{i=1}^{n}(i+1)(i+2) = \sum_{i=1}^{n}(i^2+3i+2) = \sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3n(n+1)}{2} + 2n$

$= \frac{n(n+1)}{6}[(2n+1)+9] + 2n = \frac{n(n+1)}{3}(n+5) + 2n$

$= \frac{n}{3}[(n+1)(n+5)+6] = \frac{n}{3}(n^2+6n+11)$

34. $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2) = \sum_{i=1}^{n}(i^3+3i^2+2i) = \sum_{i=1}^{n} i^3 + 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} i$

$= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + \frac{3n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{2n(n+1)}{2}$

$= n(n+1)\left[\frac{n(n+1)}{4} + \frac{2n+1}{2} + 1\right] = \frac{n(n+1)}{4}(n^2+n+4n+2+4)$

$= \frac{n(n+1)}{4}(n^2+5n+6) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

35. $\sum_{i=1}^{n}(i^3-i-2) = \sum_{i=1}^{n} i^3 - \sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - \frac{n(n+1)}{2} - 2n$

$= \frac{1}{4}n(n+1)[n(n+1)-2] - 2n = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n-1) - 2n$

$= \frac{1}{4}n[(n+1)(n-1)(n+2)-8] = \frac{1}{4}n[(n^2-1)(n+2)-8] = \frac{1}{4}n(n^3+2n^2-n-10)$

36. Selon le théorème 3c), nous posons

$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = 78 \quad \Leftrightarrow \quad n(n+1) = 156 \quad \Leftrightarrow \quad n^2+n-156 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (n+13)(n-12) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad n = 12$ ou -13. Cependant, $n = -13$ produit une somme négative, donc $n = 12$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

37. Selon le théorème 2 a) et l'exemple 3, $\sum_{i=1}^{n} c = c\sum_{i=1}^{n} 1 = cn$.

38. Soit S_n la proposition $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

1. S_1 est vrai parce que $1^3 = \left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)^2$.

2. Supposons que S_k soit vrai, c'est-à-dire que $\sum_{i=1}^{k} i^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2$. Alors,

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2}{4}[k^2 + 4(k+1)] = \frac{(k+1)^2}{4}(k+2)^2 = \left(\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}\right)^2$$, ce qui entraîne que S_{k+1} est vrai.

Par conséquent, S_n est vrai pour tout n par l'axiome d'induction mathématique.

39. $$\sum_{i=1}^{n}[(i+1)^4 - i^4] = (2^4 - 1^4) + (3^4 - 2^4) + (4^4 - 3^4) + \cdots + [(n+1)^4 - n^4]$$
$$= (n+1)^4 - 1^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n$$

D'un autre côté,

$$\sum_{i=1}^{n}[(i+1)^4 - i^4] = \sum_{i=1}^{n}(4i^3 + 6i^2 + 4i + 1) = 4\sum_{i=1}^{n} i^3 + 6\sum_{i=1}^{n} i^2 + 4\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1$$
$$= 4S + n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n \quad \left[\text{où } S = \sum_{i=1}^{n} i^3\right]$$
$$= 4S + 2n^3 + 3n^2 + n + 2n^2 + 2n + n = 4S + 2n^3 + 5n^2 + 4n$$

Par conséquent, $n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n = 4S + 2n^3 + 5n^2 + 4n$. Il s'ensuit que $4S = n^4 + 2n^3 + n^2 = n^2(n^2 + 2n + 1) = n^2(n+1)^2$ et que $S = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

40. L'aire de G_i est

$$\left(\sum_{k=1}^{i} k\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{i-1} k\right)^2 = \left[\frac{i(i+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{(i-1)i}{2}\right]^2 = \frac{i^2}{4}[(i+1)^2 - (i-1)^2]$$
$$= \frac{i^2}{4}[(i^2 + 2i + 1) - (i^2 - 2i + 1)] = \frac{i^2}{4}(4i) = i^3$$

Par conséquent, l'aire de $ABCD$ est $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

41. a) $$\sum_{i=1}^{n}[i^4 - (i-1)^4] = (1^4 - 0^4) + (2^4 - 1^4) + (3^4 - 2^4) + \cdots + [n^4 - (n-1)^4] = n^4 - 0 = n^4$$

b) $$\sum_{i=1}^{100}(5^i - 5^{i-1}) = (5^1 - 5^0) + (5^2 - 5^1) + (5^3 - 5^2) + \cdots + (5^{100} - 5^{99}) = 5^{100} - 5^0 = 5^{100} - 1$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

c) $\displaystyle\sum_{i=3}^{99}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)=\frac{1}{3}-\frac{1}{100}=\frac{97}{300}$

d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i-1})=(a_1-a_0)+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=a_n-a_0$

42. En faisant la somme membre à membre des inégalités $-|a_i|\le a_i\le|a_i|$ pour i = 1, 2, …, n, nous obtenons $-\displaystyle\sum_{i=1}^{n}|a_i|\le\sum_{i=1}^{n}a_i\le\sum_{i=1}^{n}|a_i|$.

Puisque $|x|\le c \iff -c\le x\le c$, nous obtenons $\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_i\right|\le\sum_{i=1}^{n}|a_i|$. *Autre méthode:* Utiliser l'induction mathématique.

43. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{6}(1)(2)=\frac{1}{3}$

44. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^3+1\right]=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{i^3}{n^4}+\frac{1}{n}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{i=1}^{n}i^3+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}1=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^4}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+\frac{1}{n}(n)\right]$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+1=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$

45. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{n}\left[\left(\frac{2i}{n}\right)^3+5\left(\frac{2i}{n}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{16}{n^4}i^3+\frac{20}{n^2}i\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{16}{n^4}\sum_{i=1}^{n}i^3+\frac{20}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i\right]$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{16}{n^4}\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{20}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{4(n+1)^2}{n^2}+\frac{10n(n+1)}{n^2}\right]$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\left[4\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+10\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]=4\cdot1+10\cdot1=14$

46. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{n}\left[\left(1+\frac{3i}{n}\right)^3-2\left(1+\frac{3i}{n}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{n}\left[1+\frac{9i}{n}+\frac{27i^2}{n^2}+\frac{27i^3}{n^3}-2-\frac{6i}{n}\right]$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{81}{n^4}i^3+\frac{81}{n^3}i^2+\frac{9}{n^2}i-\frac{3}{n}\right]$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{81}{n^4}\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{81}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{9}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}-\frac{3}{n}n\right]$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{81}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\frac{27}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)+\frac{9}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)-3\right]$

$=\frac{81}{4}+\frac{54}{2}+\frac{9}{2}-3=\frac{195}{4}$

47. Soit $S=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}ar^{i-1}=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}$. En multipliant chaque membre de l'égalité par r, nous obtenons

$rS=ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+ar^n$. En soustrayant la première égalité de la seconde, nous obtenons $(r-1)S=ar^n-a=a(r^n-1)$,

donc $S=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$ [puisque $r\ne1$].

 © Groupe Modulo inc., 2013

48. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{2^{i-1}}=3\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}=\frac{3[(\frac{1}{2})^n-1]}{\frac{1}{2}-1}=6[1-(\frac{1}{2})^n]$ [en utilisant l'exercice 47 avec $a=3$ et $r=\frac{1}{2}$]

49. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(2i+2^i)=2\sum_{i=1}^{n}i+\sum_{i=1}^{n}2\cdot 2^{i-1}=2\frac{n(n+1)}{2}+\frac{2(2^n-1)}{2-1}=2^{n+1}+n^2+n-2$. Pour la première somme, nous avons utilisé les théorèmes 2 a) et 3 c) et, pour la seconde, l'exercice 47 avec $a = r = 2$.

50. $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{n}(i+j)\right]=\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{n}i+\sum_{j=1}^{n}j\right]$ [Théorème 2b)] $\displaystyle=\sum_{i=1}^{m}\left[ni+\frac{n(n+1)}{2}\right]$ [Théorèmes 3b) et 3c)]

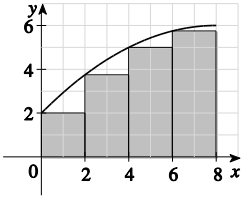
$$=\sum_{i=1}^{m}ni+\sum_{i=1}^{m}\frac{n(n+1)}{2}=\frac{nm(m+1)}{2}+\frac{nm(n+1)}{2}=\frac{nm}{2}(m+n+2)$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

1.3 L'aire et la distance

1. a) Comme la fonction *f est croissante,* nous obtenons une *approximation par défaut* lorsque nous utilisons les extrémités *gauches* des sous-intervalles. On nous demande de nous servir de quatre rectangles, donc $n = 4$.

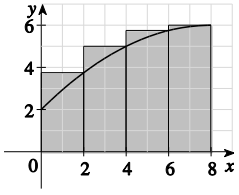
$$\begin{aligned} G_4 &= \sum_{i=1}^{4} f(x_{i-1})\Delta x \quad \left[\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{8-0}{4} = 2\right] \\ &= f(x_0)\cdot 2 + f(x_1)\cdot 2 + f(x_2)\cdot 2 + f(x_3)\cdot 2 \\ &= 2[f(0) + f(2) + f(4) + f(6)] \\ &\approx 2(2 + 3{,}75 + 5 + 5{,}75) = 2(16{,}5) = 33 \end{aligned}$$



Comme la fonction *f est croissante,* nous obtenons une *approximation par excès* lorsque nous utilisons les extrémités *droites* des sous-intervalles.

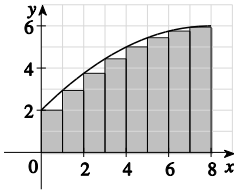
$$\begin{aligned} D_4 &= \sum_{i=1}^{4} f(x_i)\Delta x \\ &= f(x_1)\cdot 2 + f(x_2)\cdot 2 + f(x_3)\cdot 2 + f(x_4)\cdot 2 \\ &= 2[f(2) + f(4) + f(6) + f(8)] \\ &\approx 2(3{,}75 + 5 + 5{,}75 + 6) = 2(20{,}5) = 41 \end{aligned}$$

En comparant D_4 à G_4, nous constatons que nous avons ajouté à la somme l'aire du rectangle le plus près de l'extrémité supérieure droite, $f(8) \cdot 2$, et avons soustrait de cette somme l'aire du rectangle le plus près de l'extrémité inférieure gauche, $f(0) \cdot 2$.



b) $$\begin{aligned} G_8 &= \sum_{i=1}^{8} f(x_{i-1})\Delta x \quad \left[\Delta x = \frac{8-0}{8} = 1\right] \\ &= 1[f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_7)] \\ &= f(0) + f(1) + \cdots + f(7) \\ &\approx 2 + 3{,}0 + 3{,}75 + 4{,}4 + 5 + 5{,}4 + 5{,}75 + 5{,}9 \\ &= 35{,}2 \end{aligned}$$

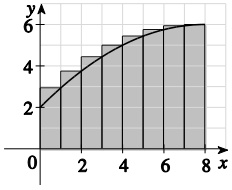
 © Groupe Modulo inc., 2013



$$D_8 = \sum_{i=1}^{8} f(x_i)\Delta x = f(1) + f(2) + \cdots + f(8)$$

$$= G_8 + 1 \cdot f(8) - 1 \cdot f(0) \quad \left[\begin{array}{l}\text{Ajouter l'aire du rectangle le plus près de l'extrémité supérieure droite,}\\ \text{soustraire l'aire du rectangle le plus près de l'extrémité inférieure gauche}\end{array}\right]$$

$$= 35{,}2 + 6 - 2 = 39{,}2$$

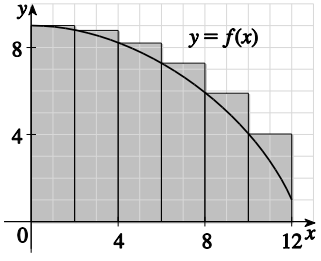


2. a)

i) $$G_6 = \sum_{i=1}^{6} f(x_{i-1})\Delta x \quad [\Delta x = \tfrac{12-0}{6} = 2]$$
$$= 2[f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5)]$$
$$= 2[f(0) + f(2) + f(4) + f(6) + f(8) + f(10)]$$
$$\approx 2(9 + 8{,}8 + 8{,}2 + 7{,}3 + 5{,}9 + 4{,}1)$$
$$= 2(43{,}3) = 86{,}6$$

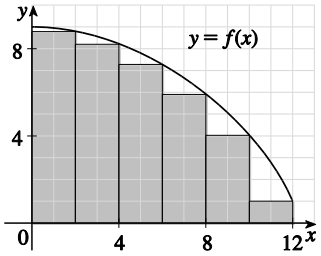
ii) $$D_6 = G_6 + 2 \cdot f(12) - 2 \cdot f(0)$$
$$\approx 86{,}6 + 2(1) - 2(9) = 70{,}6$$

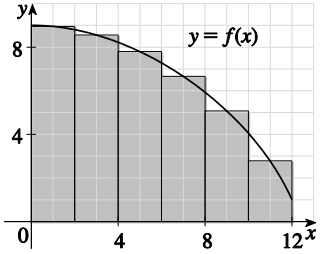
[Ajouter l'aire du rectangle le plus près de l'extrémité inférieure droite et soustraire l'aire du rectangle le plus près de l'extrémité supérieure gauche.]



iii) $$M_6 = \sum_{i=1}^{6} f(x_i^*)\Delta x$$
$$= 2[f(1) + f(3) + f(5) + f(7) + f(9) + f(11)]$$
$$\approx 2(8{,}9 + 8{,}5 + 7{,}8 + 6{,}6 + 5{,}1 + 2{,}8)$$
$$= 2(39{,}7) = 79{,}4$$

 © Groupe Modulo inc., 2013



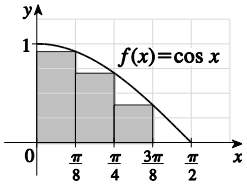


b) Comme la fonction *f est décroissante*, nous obtenons une *approximation par excès* lorsque nous utilisons les extrémités *gauches* des sous-intervalles, c'est-à-dire, G_6.

c) Comme la fonction *f est décroissante*, nous obtenons une *approximation par défaut* lorsque nous utilisons les extrémités *droites* des sous-intervalles, c'est-à-dire, D_6.

d) M_6 `semble être la meilleure approximation, puisque l'aire de chaque rectangle semble être plus proche de l'aire réelle que les approximations par excès et les approximations par défaut obtenues en utilisant G_6 et D_6.

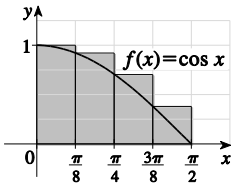
3. a) $$D_4 = \sum_{i=1}^{4} f(x_i)\Delta x \quad \left[\Delta x = \frac{\pi/2 - 0}{4} = \frac{\pi}{8}\right] \quad = \left[\sum_{i=1}^{4} f(x_i)\right]\Delta x$$
$$= [f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)]\,\Delta x$$
$$= [\cos\tfrac{\pi}{8} + \cos\tfrac{2\pi}{8} + \cos\tfrac{3\pi}{8} + \cos\tfrac{4\pi}{8}]\tfrac{\pi}{8}$$
$$\approx (0,923\,9 + 0,707\,1 + 0,382\,7 + 0)\tfrac{\pi}{8} \approx 0,790\,8$$



Comme la fonction *f est décroissante* sur l'intervalle $[0, \pi/2]$, on obtient une *approximation par défaut* lorsqu'on utilise l'approximation des extrémités *droites* des sous-intervalles, D_4.

b) $$G_4 = \sum_{i=1}^{4} f(x_{i-1})\Delta x = \left[\sum_{i=1}^{4} f(x_{i-1})\right]\Delta x$$
$$= [f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)]\,\Delta x$$
$$= [\cos 0 + \cos\tfrac{\pi}{8} + \cos\tfrac{2\pi}{8} + \cos\tfrac{3\pi}{8}]\tfrac{\pi}{8}$$
$$\approx (1 + 0,923\,9 + 0,707\,1 + 0,382\,7)\tfrac{\pi}{8} \approx 1,183\,5$$

 © Groupe Modulo inc., 2013



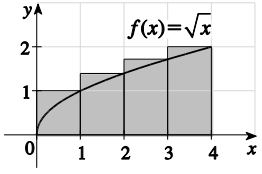
G_4 est une *approximation par excès*. Une autre façon de procéder consiste à ajouter l'aire du rectangle le plus près de l'extrémité supérieure gauche et à soustraire l'aire du rectangle le plus près de l'extrémité inférieure droite, c'est-à-dire, $G_4 = D_4 + f(0)\cdot\frac{\pi}{8} - f(\frac{\pi}{2})\cdot\frac{\pi}{8}$.

4. a) $D_4 = \sum_{i=1}^{4} f(x_i)\Delta x \quad \left[\Delta x = \frac{4-0}{4} = 1\right]$

$= f(x_1)\cdot 1 + f(x_2)\cdot 1 + f(x_3)\cdot 1 + f(x_4)\cdot 1$

$= f(1) + f(2) + f(3) + f(4)$

$= \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} \approx 6{,}146\,3$

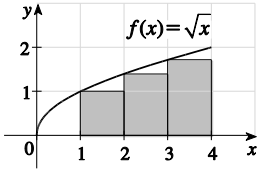


Comme la fonction *f est croissante* sur l'intervalle [0, 4], D_4 est une *approximation par excès*.

b) $G_4 = \sum_{i=1}^{4} f(x_{i-1})\Delta x = f(x_0)\cdot 1 + f(x_1)\cdot 1 + f(x_2)\cdot 1 + f(x_3)\cdot 1$

$= f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$

$= \sqrt{0} + \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} \approx 4{,}146\,3$



Comme la fonction *f est croissante* sur l'intervalle [0, 4], G_4 est une *approximation par défaut*.

5. a) $f(x) = 1 + x^2$ et $\Delta x = \frac{2-(-1)}{3} = 1 \quad \Rightarrow$

$D_3 = 1\cdot f(0) + 1\cdot f(1) + 1\cdot f(2) = 1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 5 = 8$.

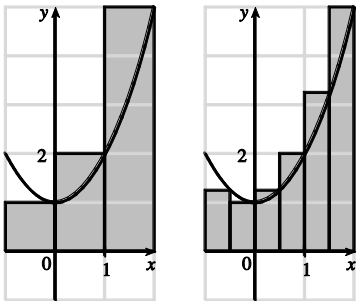
$\Delta x = \frac{2-(-1)}{6} = 0{,}5 \quad \Rightarrow$

$D_6 = 0{,}5[f(-0{,}5) + f(0) + f(0{,}5) + f(1) + f(1{,}5) + f(2)]$

$= 0{,}5(1{,}25 + 1 + 1{,}25 + 2 + 3{,}25 + 5)$

$= 0{,}5(13{,}75) = 6{,}875$

 © Groupe Modulo inc., 2013

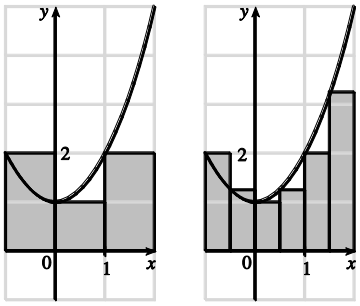


b) $G_3 = 1 \cdot f(-1) + 1 \cdot f(0) + 1 \cdot f(1) = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 5$

$G_6 = 0,5[f(-1) + f(-0,5) + f(0) + f(0,5) + f(1) + f(1,5)]$

$= 0,5(2 + 1,25 + 1 + 1,25 + 2 + 3,25)$

$= 0,5(10,75) = 5,375$



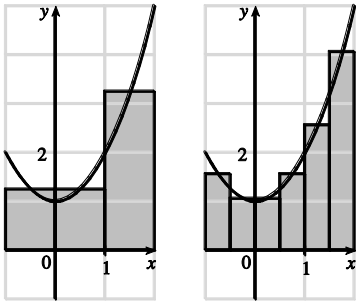
c) $M_3 = 1 \cdot f(-0,5) + 1 \cdot f(0,5) + 1 \cdot f(1,5)$

$= 1 \cdot 1,25 + 1 \cdot 1,25 + 1 \cdot 3,25 = 5,75$

$M_6 = 0,5[f(-0,75) + f(-0,25) + f(0,25) + f(0,75) + f(1,25) + f(1,75)]$

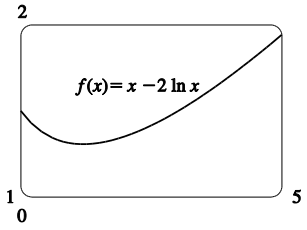
$= 0,5(1,562\,5 + 1,062\,5 + 1,062\,5 + 1,562\,5 + 2,562\,5 + 4,062\,5)$

$= 0,5(11,875) = 5,937\,5$



d) M_6 semble être la meilleure approximation.

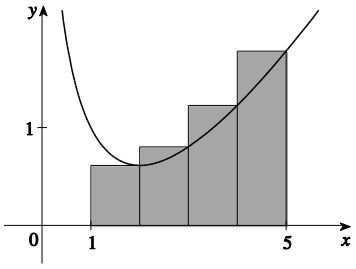
6. a)



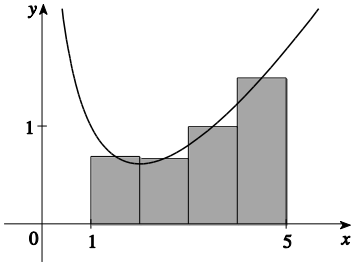
 © Groupe Modulo inc., 2013

b) $f(x) = x - 2\ln x$ et $\Delta x = \dfrac{5-1}{4} = 1 \quad \Rightarrow$

i)
$$\begin{aligned} D_4 &= 1 \cdot f(2) + 1 \cdot f(3) + 1 \cdot f(4) + 1 \cdot f(5) \\ &= (2 - 2\ln 2) + (3 - 2\ln 3) + (4 - 2\ln 4) + (5 - 2\ln 5) \\ &\approx 4{,}425 \end{aligned}$$

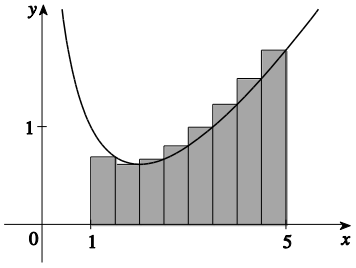


ii)
$$\begin{aligned} M_4 &= 1 \cdot f(1{,}5) + 1 \cdot f(2{,}5) + 1 \cdot f(3{,}5) + 1 \cdot f(4{,}5) \\ &= (1{,}5 - 2\ln 1{,}5) + (2{,}5 - 2\ln 2{,}5) + (3{,}5 - 2\ln 3{,}5) + (4{,}5 - 2\ln 4{,}5) \\ &\approx 3{,}843 \end{aligned}$$



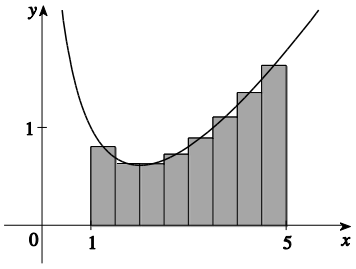
c)

i)
$$\begin{aligned} D_8 &= \tfrac{1}{2}\,[f(1{,}5) + f(2) + \cdots + f(5)] \\ &= \tfrac{1}{2}[(1{,}5 - 2\ln 1{,}5) + (2 - 2\ln 2) + \cdots + (5 - 2\ln 5)] \\ &\approx 4{,}134 \end{aligned}$$



ii)
$$\begin{aligned} M_8 &= \tfrac{1}{2}[f(1{,}25) + f(1{,}75) + \cdots + f(4{,}75)] \\ &= \tfrac{1}{2}[(1{,}25 - 2\ln 1{,}25) + (1{,}75 - 2\ln 1{,}75) + \cdots + (4{,}75 - 2\ln 4{,}75)] \\ &\approx 3{,}889 \end{aligned}$$

 © Groupe Modulo inc., 2013



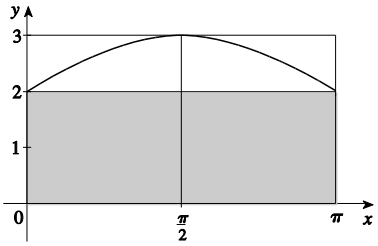
7. $f(x) = 2 + \sin x,\ 0 \le x \le \pi,\ \Delta x = \pi / n$.

n = **2:** Les valeurs maximum de la fonction f sur les deux sous-intervalles se produisent lorsque $x = \frac{\pi}{2}$; donc,

$$\begin{aligned}\text{Somme supérieure} &= f(\tfrac{\pi}{2}) \cdot \tfrac{\pi}{2} + f(\tfrac{\pi}{2}) \cdot \tfrac{\pi}{2} \\ &= 3 \cdot \tfrac{\pi}{2} + 3 \cdot \tfrac{\pi}{2} = 3\pi \approx 9{,}42.\end{aligned}$$

Les valeurs minimum de la fonction f sur les sous-intervalles se produisent lorsque $x = 0$ et $x = \pi$; donc,

$$\begin{aligned}\text{Somme inférieure} &= f(0) \cdot \tfrac{\pi}{2} + f(\pi) \cdot \tfrac{\pi}{2} \\ &= 2 \cdot \tfrac{\pi}{2} + 2\tfrac{\pi}{2} = 2\pi \approx 6{,}28.\end{aligned}$$

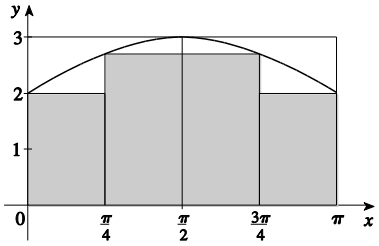


n = **4:**

$$\begin{aligned}\text{Somme supérieure} &= [f(\tfrac{\pi}{4}) + f(\tfrac{\pi}{2}) + f(\tfrac{\pi}{2}) + f(\tfrac{3\pi}{4})](\tfrac{\pi}{4}) \\ &= \left[\left(2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right) + (2+1) + (2+1) + \left(2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)\right](\tfrac{\pi}{4}) \\ &= \left(10 + \sqrt{2}\right)(\tfrac{\pi}{4}) \approx 8{,}96\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Somme inférieure} &= [f(0) + f(\tfrac{\pi}{4}) + f(\tfrac{3\pi}{4}) + f(\pi)](\tfrac{\pi}{4}) \\ &= \left[(2+0) + \left(2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right) + \left(2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right) + (2+0)\right](\tfrac{\pi}{4}) \\ &= \left(8 + \sqrt{2}\right)(\tfrac{\pi}{4}) \approx 7{,}39\end{aligned}$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

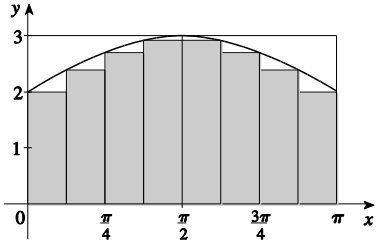


$n = 8$: Somme supérieure $= [f(\frac{\pi}{8}) + f(\frac{\pi}{4}) + f(\frac{3\pi}{8}) + f(\frac{\pi}{2}) + f(\frac{\pi}{2}) + f(\frac{5\pi}{8}) + f(\frac{3\pi}{4}) + f(\frac{7\pi}{8})](\frac{\pi}{8})$

$\approx 8{,}65$

Somme inférieure $= [f(0) + f(\frac{\pi}{8}) + f(\frac{\pi}{4}) + f(\frac{3\pi}{8}) + f(\frac{5\pi}{8}) + f(\frac{3\pi}{4}) + f(\frac{7\pi}{8}) + f(\pi)](\frac{\pi}{8})$

$\approx 7{,}86$



8. $f(x) = 1 + x^2,\ -1 \le x \le 1, \Delta x = 2/n$.

$n = 3$: Somme supérieure $= [f(-1) + f(\frac{1}{3}) + f(1)](\frac{2}{3})$

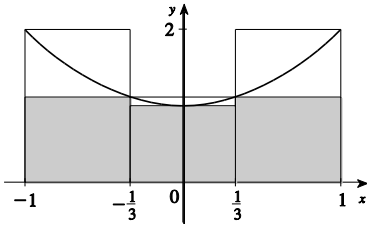
$= (2 + \frac{10}{9} + 2)(\frac{2}{3})$

$= \frac{92}{27} \approx 3{,}41$

Somme inférieure $= f(-\frac{1}{3}) + f(0) + f(\frac{1}{3})](\frac{2}{3})$

$= (\frac{10}{9} + 1 + \frac{10}{9})(\frac{2}{3})$

$= \frac{58}{27} \approx 2{,}15$



$n = 4$: Somme supérieure $= f(-1) + f(-\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2}) + f(1)](\frac{2}{4})$

$= (2 + \frac{5}{4} + \frac{5}{4} + 2)(\frac{1}{2})$

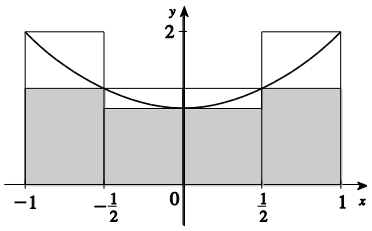
$= \frac{13}{4} = 3{,}25$

Somme inférieure $= [f(-\frac{1}{2}) + f(0) + f(0) + f(\frac{1}{2})](\frac{2}{4})$

$= (\frac{5}{4} + 1 + 1 + \frac{5}{4})(\frac{1}{2})$

$= \frac{9}{4} = 2{,}25$

 © Groupe Modulo inc., 2013



9. Voici un algorithme (séquence ordonnée d'opérations) qui pourrait être employé pour calculer les sommes :

1 Soit SOMME = 0, X_MIN = 0, X_MAX = 1, N = 10 (selon la somme qui est le sujet du calcul), DELTA_X = (X_MAX - X_MIN)/N et EXTRÉMITE_DROITE = X_MIN + DELTA_X.

2 Répéter les étapes 2a, 2b l'une après l'autre jusqu'à ce que EXTRÉMITE_DROITE > X_MAX.

2a Ajouter (EXTRÉMITE_DROITE)^4 à SOMME.

2b Ajouter DELTA_X à EXTRÉMITE_DROITE.

Une fois cette procédure complétée, (DELTA_X)·(SOMME) est la réponse que nous cherchons. Nous obtenons

$$D_{10}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}\left(\frac{i}{10}\right)^4\approx 0,253\,3, D_{30}=\frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30}\left(\frac{i}{30}\right)^4\approx 0,217\,0, D_{50}=\frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50}\left(\frac{i}{50}\right)^4\approx 0,210\,1 \text{ et } D_{100}=\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}\left(\frac{i}{100}\right)^4\approx 0,205\,0 .$$

Il semble que l'aire exacte soit 0,2. Le programme SOMMEDTE et sa sortie obtenue à l'aide d'une calculatrice TI-83/4 Plus apparaissent à la figure ci-après. Afin de généraliser le programme, nous avons entré des valeurs pour les variables Xmin, Xmax et N (plutôt que de les assigner). Nous avons également assigné x^4 à Y_1, ce qui nous a permis d'évaluer toute somme des extrémités droites simplement en changeant la valeur de Y_1 et en faisant rouler le programme.

```
PROGRAM:SOMMEDTE
:0→S
:Prompt Xmin
:Prompt Xmax
:Prompt N
:(Xmax-Xmin)/N→D
:Xmin+D→R
:For(I,1,N)
:S+Y1(R)→S
:R+D→R
:End
:D*S→Z
:Disp Z
```

```
prgmSOMMEDTE
Xmin=?0
Xmax=?1
N=?10
              .25333
                Done
```

10. Nous pouvons utiliser l'algorithme établi à l'exercice 9 avec les valeurs X_MIN = 0, X_MAX = $\pi/2$ et cos(EXTRÉMITE_DROITE) plutôt que (EXTRÉMITE_DROITE)^4 à l'étape 2a. Nous constatons que

$$D_{10}=\frac{\pi/2}{10}\sum_{i=1}^{10}\cos\left(\frac{i\pi}{20}\right)\approx 0,919\,4, D_{30}=\frac{\pi/2}{30}\sum_{i=1}^{30}\cos\left(\frac{i\pi}{60}\right)\approx 0,973\,6 \text{ et}$$

$D_{50}=\frac{\pi/2}{50}\sum_{i=1}^{50}\cos\left(\frac{i\pi}{100}\right)\approx 0,984\,2$ et $D_{100}=\frac{\pi/2}{100}\sum_{i=1}^{100}\cos\left(\frac{i\pi}{200}\right)\approx 0,992\,1$. Il semble que l'aire exacte soit 1.

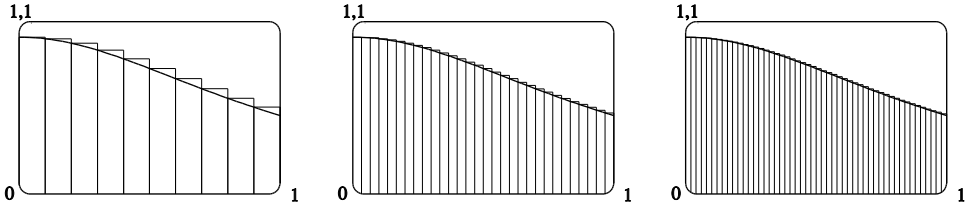
 © Groupe Modulo inc., 2013

11. Le logiciel Maple exige qu'un certain nombre d'étapes soient complétées avant qu'une réponse numérique puisse être obtenue. Après avoir chargé l'ensemble d'extensions « Student » [commande: with(Student);] nous employons la commande SOMME_GAUCHE:=leftsum(1/(x^2+1),x=0..1,10 [ou 30, ou 50]); qui nous donne l'expression en notation sigma. Afin d'obtenir une approximation numérique de la somme, nous employons evalf(SOMME_GAUCHE);. Le logiciel Mathematica est dépourvu de commande spéciale pour ces sommes; nous devons donc les entrer manuellement. Par exemple, nous obtenons la première somme des extrémités gauches en entrant (1/10) *Sum[1/(((i-1)/10)^2+1)], {i,1,10}], et en appliquant la commande N à la sortie obtenue afin d'obtenir une approximation numérique.

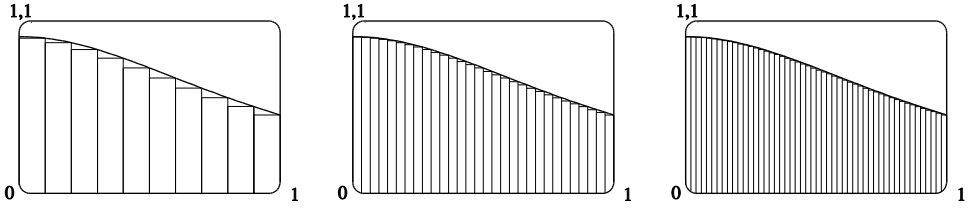
Avec le logiciel Derive, nous employons la commande LEFT_RIEMANN afin d'obtenir les sommes des extrémités gauches, mais nous devons ensuite définir les sommes des extrémités droites nous-mêmes. (Nous pouvons définir une nouvelle fonction qui utilise LEFT_RIEMANN avec la valeur de k allant de 1 à n plutôt que de 0 à $n - 1$.)

a) Lorsque $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, $0 \le x \le 1$, les sommes à gauche sont de la forme $G_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(\frac{i-1}{n})^2+1}$. Spécifiquement, $G_{10} \approx 0{,}810\ 0$, $G_{30} \approx 0{,}793\ 7$ et $G_{50} \approx 0{,}790\ 4$. Les sommes à droite sont de la forme $D_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(\frac{i}{n})^2+1}$. Spécifiquement, $D_{10} \approx 0{,}760\ 0$, $D_{30} \approx 0{,}777\ 0$ et $D_{50} \approx 0{,}780\ 4$.

b) Pour générer les graphiques à l'aide du logiciel Maple, nous employons les commandes leftbox (avec les mêmes arguments que ceux utilisés pour SOMME_GAUCHE) et rightbox.



extrémités gauches des sous-intervalles, $n = 10$ | extrémités gauches des sous-intervalles, $n = 30$ | extrémités gauches des sous-intervalles, $n = 50$



extrémités droites des sous-intervalles, $n = 10$ | extrémités droites des sous-intervalles, $n = 30$ | extrémités droites des sous-intervalles, $n = 50$

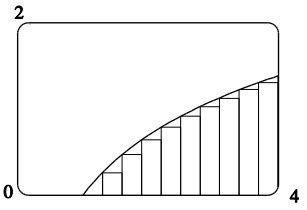
 © Groupe Modulo inc., 2013

c) Nous savons que, comme la fonction $y = 1/(x^2 + 1)$ est décroissante sur l'intervalle [0, 1], toutes les sommes à gauche sont plus grandes que l'aire exacte, alors que toutes les sommes à droite sont plus petites que l'aire exacte. Comme la somme à gauche obtenue lorsque $n = 50$ est d'environ 0,790 4 < 0,791 et que la somme à droite obtenue lorsque $n = 50$ est d'environ 0,780 4 > 0,780, nous concluons que $0{,}780 < D_{50} <$ aire exacte $< G_{50} < 0{,}791$. L'aire exacte se situe donc entre 0,780 et 0,791.

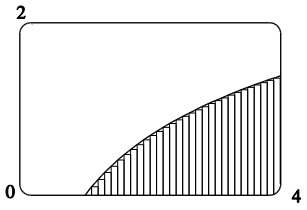
12. La solution de l'exercice 11 donne les commandes utilisées par les logiciels de calcul symbolique pour évaluer les sommes.

a) Lorsque $f(x) = \ln x$, $1 \le x \le 4$, les sommes à gauche sont de la forme $G_n = \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{3(i-1)}{n}\right)$. Notamment, $G_{10} \approx 2{,}331\ 6$, $G_{30} \approx 2{,}475\ 2$ et $G_{50} \approx 2{,}503\ 4$. Les sommes à droite sont de la forme $D_n = \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{3i}{n}\right)$. Notamment, $D_{10} \approx 2{,}747\ 5$, $D_{30} \approx 2{,}613\ 9$ et $D_{50} \approx 2{,}586\ 5$.

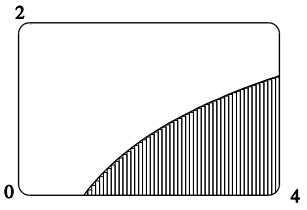
b) Pour générer les graphiques à l'aide du logiciel Maple, il faut employer les commandes leftbox (avec les mêmes arguments que ceux utilisés pour SOMME_GAUCHE) et rightbox.



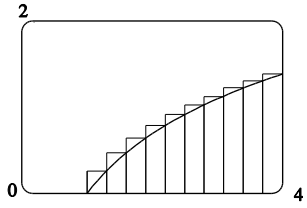
extrémités gauches des sous-intervalles, $n = 10$



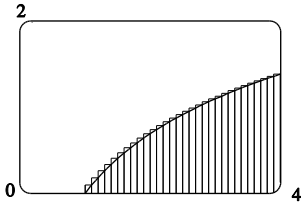
extrémités gauches des sous-intervalles, $n = 30$



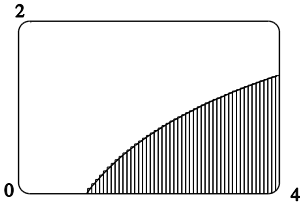
extrémités gauches des sous-intervalles, $n = 50$



extrémités droites des sous-intervalles, $n = 10$



extrémités droites des sous-intervalles, $n = 30$



extrémités droites des sous-intervalles, $n = 50$

c) Nous savons que, comme la fonction $y = \ln x$ est croissante sur l'intervalle [1, 4], toutes les sommes à gauche sont plus petites que l'aire exacte, alors que toutes les sommes à droite sont plus grandes que l'aire exacte. Comme la somme à gauche obtenue lorsque $n = 50$ est d'environ 2,503 > 2,50 et que la somme à droite obtenue lorsque $n = 50$ est d'environ 2,587 < 2,59, nous concluons que $2{,}50 < D_{50} <$ aire exacte $< G_{50} < 2{,}59$. L'aire exacte se situe donc entre 2,50 et 2,59.

 © Groupe Modulo inc., 2013

13. Comme la fonction v est croissante, G_6 donnera une approximation par défaut et D_6, une approximation par excès de la distance parcourue d.

$d \approx G_6 = (0 \text{ m/s})(0{,}5 \text{ s}) + (1{,}9)(0{,}5) + (3{,}3)(0{,}5) + (4{,}5)(0{,}5) + (5{,}5)(0{,}5) + (5{,}9)(0{,}5) = 0{,}5(21{,}1) = 10{,}55 \text{ m}$

$d \approx D_6 = 0{,}5(1{,}9 + 3{,}3 + 4{,}5 + 5{,}5 + 5{,}9 + 6{,}2) = 0{,}5(27{,}3) = 13{,}65 \text{ m}$

14. a) $d \approx G_5 = (30 \text{ m/s})(12 \text{ s}) + 28 \cdot 12 + 25 \cdot 12 + 22 \cdot 12 + 24 \cdot 12$
$= (30 + 28 + 25 + 22 + 24) \cdot 12 = 129 \cdot 12 = 1548 \text{ m}$

b) $d \approx D_5 = (28 + 25 + 22 + 24 + 27) \cdot 12 = 126 \cdot 12 = 1512 \text{ m}$

c) Les valeurs calculées ne sont ni des approximations par défaut ni des approximations par excès, car v n'est pas une fonction croissante ni une fonction décroissante de t.

15. Approximation par défaut de la fuite de pétrole: $D_5 = (7{,}6 + 6{,}8 + 6{,}2 + 5{,}7 + 5{,}3)(2) = (31{,}6)(2) = 63{,}2$ L.

Approximation par excès de la fuite de pétrole: $G_5 = (8{,}7 + 7{,}6 + 6{,}8 + 6{,}2 + 5{,}7)(2) = (35)(2) = 70$ L.

16. Nous pouvons trouver une approximation par excès en utilisant la vitesse finale pour chaque sous-intervalle de temps. Ainsi, la distance d parcourue après 62 s peut être évaluée approximativement par

$$d \approx \sum_{i=1}^{6} v(t_i)\,\Delta t_i = (56 \text{ m/s})(10 \text{ s}) + 97 \cdot 5 + 136 \cdot 5 + 226 \cdot 12 + 404 \cdot 27 + 440 \cdot 3 = 16\,665 \text{ m}.$$

17. Dans le cas d'une fonction décroissante, l'utilisation des extrémités gauches des sous-intervalles produit une approximation par excès alors que l'utilisation des extrémités droites des sous-intervalles produit une approximation par défaut. Nous utiliserons M_6 pour faire l'approximation. $\Delta t = 1$, donc

$$M_6 = 1[v(0{,}5) + v(1{,}5) + v(2{,}5) + v(3{,}5) + v(4{,}5) + v(5{,}5)] \approx 27{,}5 + 20 + 14 + 9 + 5 + 2 = 77{,}5 \text{ m}.$$

Remarque : Les réponses différeront évidemment selon la façon dont le graphique a été interprété.

Il est possible d'effectuer une vérification sommaire de ce calcul en traçant une ligne qui va de (0, 35) à (6, 0) et de calculer l'aire du triangle : $\frac{1}{2}(35)(6) = 105$. Il est clair qu'il s'agit ici d'une approximation par excès, et l'approximation de 77,5 obtenue à partir des milieux des sous-intervalles est donc vraisemblable. Les réponses différeront évidemment selon la façon dont le graphique a été interprété.

18. Dans le cas d'une fonction croissante, l'utilisation des extrémités gauches des sous-intervalles produit une approximation par défaut alors que l'utilisation des extrémités droites des sous-intervalles produit une approximation par excès. Nous utiliserons M_6 pour faire l'approximation. $\Delta t = \frac{30-0}{6} = 5 \text{ s} = \frac{5}{3600}\text{h} = \frac{1}{720}$ h.

$$M_6 = \tfrac{1}{720}[v(2{,}5) + v(7{,}5) + v(12{,}5) + v(17{,}5) + v(22{,}5) + v(27{,}5)]$$
$$= \tfrac{1}{720}(31{,}25 + 66 + 88 + 103{,}5 + 113{,}75 + 119{,}25) = \tfrac{1}{720}(521{,}75) \approx 0{,}725 \text{ km}$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

Remarque : Les réponses différeront évidemment selon la façon dont le graphique a été interprété.

Il est possible d'effectuer une vérification sommaire de ce calcul en traçant une ligne qui va de (0; 0) à (30; 120) et de calculer l'aire du triangle: $\frac{1}{2}(30)(120) = 1800$. Après division par 3600, on obtient 0,5, qui est clairement une approximation par défaut. Par conséquent, l'approximation de 0,725 obtenue à partir des milieux des sous-intervalles est vraisemblable. Les réponses différeront évidemment selon la façon dont le graphique a été interprété.

19. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, $1 \le x \le 3$. $\Delta x = (3-1)/n = 2/n$ et $x_i = 1 + i\Delta x = 1 + 2i/n$.

$$A = \lim_{n\to\infty} D_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2(1+2i/n)}{(1+2i/n)^2+1} \cdot \frac{2}{n}.$$

20. $f(x) = x^2 + \sqrt{1+2x}$, $4 \le x \le 7$. $\Delta x = (7-4)/n = 3/n$ et $x_i = 4 + i\,\Delta x = 4 + 3i/n$.

$$A = \lim_{n\to\infty} D_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[(4+3i/n)^2 + \sqrt{1+2(4+3i/n)}\right] \cdot \frac{3}{n}.$$

21. $f(x) = \sqrt{\sin x}$, $0 \le x \le \pi$. $\Delta x = (\pi - 0)/n = \pi/n$ et $x_i = 0 + i\Delta x = \pi i/n$.

$$A = \lim_{n\to\infty} D_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\sin(\pi i/n)} \cdot \frac{\pi}{n}.$$

22. On peut interpréter $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{2}{n}\left(5 + \frac{2i}{n}\right)^{10}$ comme étant l'aire de la région sous la courbe de la fonction $y = (5+x)^{10}$ sur l'intervalle [0, 2], puisque pour la fonction $y = (5+x)^{10}$ sur l'intervalle [0, 2] avec $\Delta x = \dfrac{2-0}{n} = \dfrac{2}{n}$, $x_i = 0 + i\Delta x = \dfrac{2i}{n}$ et $x_i^* = x_i$, l'expression représentant l'aire est $A = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(5 + \frac{2i}{n}\right)^{10} \frac{2}{n}$. Il faut noter qu'il y a plus d'une réponse à cette question. Nous pourrions utiliser $y = x^{10}$ sur l'intervalle [5, 7] ou, en général, $y = ((5-n)+x)^{10}$ sur l'intervalle $[n, n+2]$.

23. On peut interpréter $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\pi}{4n} \tan\frac{i\pi}{4n}$ comme étant l'aire de la région sous la courbe de la fonction $y = \tan x$ sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{4}]$, puisque pour la fonction $y = \tan x$ sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{4}]$ avec $\Delta x = \dfrac{\pi/4 - 0}{n} = \dfrac{\pi}{4n}$, $x_i = 0 + i\Delta x = \dfrac{i\pi}{4n}$ et $x_i^* = x_i$, l'expression représentant l'aire est $A = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \tan\left(\frac{i\pi}{4n}\right)\frac{\pi}{4n}$. Il faut noter qu'il y a plus d'une réponse à cette question, car

 © Groupe Modulo inc., 2013

l'expression représentant l'aire est la même pour la fonction $y = \tan(x - k\pi)$ sur l'intervalle $[k\pi, k\pi + \frac{\pi}{4}]$, où k représente tout nombre entier.

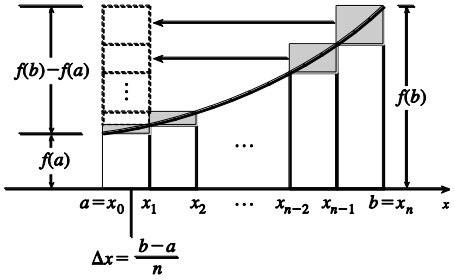
24. a) $\Delta x = \dfrac{1-0}{n} = \dfrac{1}{n}$ et $x_i = 0 + i\Delta x = \dfrac{i}{n}$. $A = \lim\limits_{n\to\infty} D_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\dfrac{i}{n}\right)^3 \cdot \dfrac{1}{n}$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{i^3}{n^3} \cdot \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^4} \sum\limits_{i=1}^{n} i^3 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^4} \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2}{4n^2} = \dfrac{1}{4} \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$

25. a) Comme la fonction f est croissante, G_n est une approximation par défaut de A [somme minorante] et D_n est une approximation par excès de A [somme supérieure]. Il s'ensuit que la relation entre A, G_n, et D_n est exprimée par l'inégalité $G_n < A < D_n$.

$$D_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$
$$G_n = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x$$

b) $$\begin{aligned} D_n - G_n &= f(x_n)\Delta x - f(x_0)\Delta x \\ &= \Delta x[f(x_n) - f(x_0)] \\ &= \frac{b-a}{n}[f(b) - f(a)] \end{aligned}$$



Dans le graphique, $D_n - G_n$ est la somme des aires des rectangles ombrés. Si nous glissons les rectangles ombrés vers la gauche de sorte qu'ils s'empilent sur le rectangle ombré le plus à gauche, nous formerons un rectangle de hauteur $f(b) - f(a)$ et de largeur $\dfrac{b-a}{n}$.

c) $A > G_n$, , donc $D_n - A < D_n - G_n$, c'est-à-dire, $D_n - A < \dfrac{b-a}{n}[f(b) - f(a)]$.

26. $D_n - A < \dfrac{b-a}{n}[f(b) - f(a)] = \dfrac{3-1}{n}[f(3) - f(1)] = \dfrac{2}{n}(e^3 - e)$

Si nous calculons la valeur de n dans l'expression $\dfrac{2}{n}(e^3 - e) < 0{,}000\,1$, nous obtenons

$2(e^3 - e) < 0{,}000\,1n \quad \Rightarrow \quad n > \dfrac{2(e^3 - e)}{0{,}000\,1} \quad \Rightarrow \quad n > 347\,345{,}1$. Une valeur de n qui nous assure que $D_n - A > 0{,}000\,1$ est donc $n = 347\,346$. [Il ne s'agit pas ici de *la plus petite* valeur de n.]

 © Groupe Modulo inc., 2013

27. a) $y = f(x) = x^5$. $\Delta x = \dfrac{2-0}{n} = \dfrac{2}{n}$ et $x_i = 0 + i\Delta x = \dfrac{2i}{n}$.

$$A = \lim_{n\to\infty} D_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2i}{n}\right)^5 \cdot \frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{32i^5}{n^5} \cdot \frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{64}{n^6} \sum_{i=1}^{n} i^5.$$

b) $$\sum_{i=1}^{n} i^5 \overset{\text{LCS}}{=} \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$$

c) $$\lim_{n\to\infty} \frac{64}{n^6} \cdot \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12} = \frac{64}{12} \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+2n+1)(2n^2+2n-1)}{n^2 \cdot n^2}$$
$$= \frac{16}{3} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\left(2 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{16}{3} \cdot 1 \cdot 2 = \tfrac{32}{3}$$

28. L'exemple 3 a) indique que $A = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} e^{-2i/n}$. À l'aide d'un logiciel de calcul symbolique, $\sum\limits_{i=1}^{n} e^{-2i/n} = \dfrac{e^{-2}(e^2-1)}{e^{2/n}-1}$

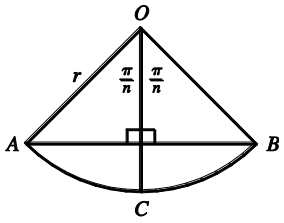
et $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n} \cdot \dfrac{e^{-2}(e^2-1)}{e^{2/n}-1} = e^{-2}(e^2-1) \approx 0{,}8647$, alors que l'approximation calculée à l'exemple 3 b), qui utilisait M_{10}, était de 0,863 2.

29. $y = f(x) = \cos x$. $\Delta x = \dfrac{b-0}{n} = \dfrac{b}{n}$ et $x_i = 0 + i\Delta x = \dfrac{bi}{n}$.

$$A = \lim_{n\to\infty} D_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \cos\left(\frac{bi}{n}\right) \cdot \frac{b}{n} \overset{\text{LCS}}{=} \lim_{n\to\infty} \left[\frac{b\sin\left(b\left(\frac{1}{2n}+1\right)\right)}{2n\sin\left(\frac{b}{2n}\right)} - \frac{b}{2n}\right] \overset{\text{LCS}}{=} \sin b$$

Si $b = \frac{\pi}{2}$, alors $A = \sin\frac{\pi}{2} = 1$.

30. a)



Le graphique montre un des n triangles congruents, le ΔAOB, dont l'angle au centre mesure $2\pi/n$. O est le centre du cercle et AB est un des côtés du polygone. Le rayon OC est tracé de façon à diviser l'$\angle AOB$ en deux parties égales. Il s'ensuit qu'OC croise AB à angle droit et qu'il divise AB en deux parties égales. Conséquemment, le ΔAOB est divisé en deux triangles droits dont les cathètes mesurent $\frac{1}{2}(AB) = r\sin(\pi/n)$ et $r\cos(\pi/n)$. L'aire du ΔAOB

est $2 \cdot \frac{1}{2}[r\sin(\pi/n)][r\cos(\pi/n)] = r^2\sin(\pi/n)\cos(\pi/n) = \frac{1}{2}r^2\sin(2\pi/n)$ et, conséquemment,

$A_n = n \cdot \text{aire}(\Delta AOB) = \frac{1}{2}nr^2\sin(2\pi/n)$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

b) Afin de pouvoir utiliser l'égalité $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$, il faut que l'expression qui apparaît au dénominateur soit la même que celle qui apparaît dans l'argument de la fonction sinusoïdale, dans ce cas, $2\pi/n$.

$\lim_{n \to \infty} A_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} nr^2 \sin(2\pi/n) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} nr^2 \frac{\sin(2\pi/n)}{2\pi/n} \cdot \frac{2\pi}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sin(2\pi/n)}{2\pi/n} \pi r^2$. Soit $\theta = \frac{2\pi}{n}$. Alors, comme $n \to \infty$, $\theta \to 0$,

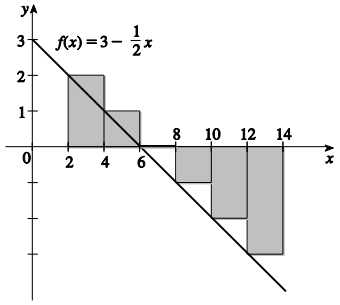
donc $\lim_{n \to \infty} \frac{\sin(2\pi/n)}{2\pi/n} \pi r^2 = \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \pi r^2 = (1)\pi r^2 = \pi r^2$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

1.4 L'intégrale définie

1. $f(x) = 3 - \frac{1}{2}x$, $2 \le x \le 14$. $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{14-2}{6} = 2$. Comme nous utilisons les extrémités gauches des sous-intervalles, $x_i^* = x_{i-1}$.

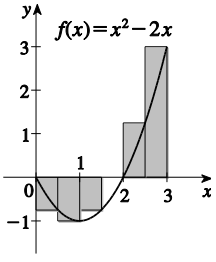
$$\begin{aligned} G_6 &= \sum_{i=1}^{6} f(x_{i-1})\Delta x \\ &= (\Delta x)[f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5)] \\ &= 2[f(2) + f(4) + f(6) + f(8) + f(10) + f(12)] \\ &= 2[2 + 1 + 0 + (-1) + (-2) + (-3)] = 2(-3) = -6 \end{aligned}$$



La somme de Riemann représente la somme des aires des deux rectangles situés au-dessus de l'axe des x moins la somme des aires des trois rectangles situés sous l'axe des x; il s'agit donc de l'*aire algébrique* des rectangles situés au-dessus et au-dessous de l'axe des x.

2. $f(x) = x^2 - 2x$, $0 \le x \le 3$. $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{3-0}{6} = \dfrac{1}{2}$. Comme nous utilisons les extrémités droites des sous-intervalles, $x_i^* = x_i$.

$$\begin{aligned} D_6 &= \sum_{i=1}^{6} f(x_i)\Delta x \\ &= (\Delta x)[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5) + f(x_6)] \\ &= \tfrac{1}{2}[f(\tfrac{1}{2}) + f(1) + f(\tfrac{3}{2}) + f(2) + f(\tfrac{5}{2}) + f(3)] \\ &= \tfrac{1}{2}(-\tfrac{3}{4} - 1 - \tfrac{3}{4} + 0 + \tfrac{5}{4} + 3) = \tfrac{1}{2}(\tfrac{7}{4}) = \tfrac{7}{8} \end{aligned}$$

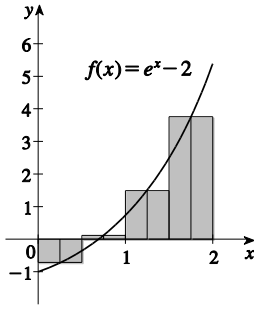


La somme de Riemann représente la somme des aires des deux rectangles situés au-dessus de l'axe des x moins la somme des aires des trois rectangles situés sous l'axe des x; il s'agit donc de l'*aire algébrique* des rectangles situés au-dessus et au-dessous de l'axe des x.

 © Groupe Modulo inc., 2013

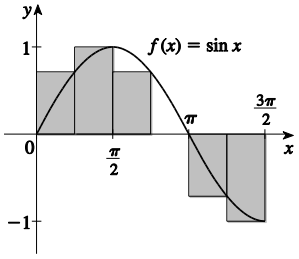
3. $f(x) = e^x - 2$, $0 \le x \le 2$. $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{2-0}{4} = \dfrac{1}{2}$. Comme nous utilisons les milieux des sous-intervalles, $x_i^* = \overline{x}_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$.

$$\begin{aligned} M_4 &= \sum_{i=1}^{4} f(\overline{x}_i)\Delta x = (\Delta x)[f(\overline{x}_1) + f(\overline{x}_2) + f(\overline{x}_3) + f(\overline{x}_4)] \\ &= \tfrac{1}{2}[f(\tfrac{1}{4}) + f(\tfrac{3}{4}) + f(\tfrac{5}{4}) + f(\tfrac{7}{4})] \\ &= \tfrac{1}{2}[(e^{1/4} - 2) + (e^{3/4} - 2) + (e^{5/4} - 2) + (e^{7/4} - 2)] \\ &\approx 2{,}322\,986 \end{aligned}$$



La somme de Riemann représente la somme des aires des trois rectangles situés au-dessus de l'axe des *x* moins l'aire du rectangle situé sous l'axe des *x*; il s'agit donc de l'*aire algébrique* des rectangles situés au-dessus et au-dessous de l'axe des *x*.

4. a) $f(x) = \sin x$, $0 \le x \le \dfrac{3\pi}{2}$. $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{\frac{3\pi}{2} - 0}{6} = \dfrac{\pi}{4}$. Comme nous utilisons les extrémités droites des sous-intervalles, $x_i^* = x_i$.

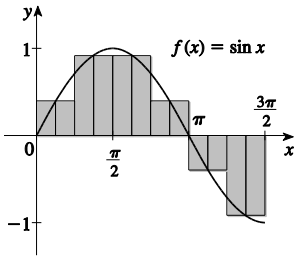


$$\begin{aligned} D_6 &= \sum_{i=1}^{6} f(x_i)\,\Delta x \\ &= (\Delta x)[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5) + f(x_6)] \\ &= \frac{\pi}{4}\left[f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f\left(\frac{2\pi}{4}\right) + f\left(\frac{3\pi}{4}\right) + f\left(\frac{4\pi}{4}\right) + f\left(\frac{5\pi}{4}\right) + f\left(\frac{6\pi}{4}\right)\right] \\ &= \frac{\pi}{4}\left(\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{3\pi}{4} + \sin\pi + \sin\frac{5\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{2}\right) \\ &= \frac{\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 - \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{8} \approx 0{,}555\,360 \end{aligned}$$

La somme de Riemann représente la somme des aires des trois rectangles situés au-dessus de l'axe des *x* moins la somme des aires des deux rectangles situés sous l'axe des *x*.

b) Comme nous utilisons les milieux des sous-intervalles, $x_i^* = \overline{x}_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$.

 © Groupe Modulo inc., 2013



$$\begin{aligned}
M_6 &= \sum_{i=1}^{6} f(\bar{x}_i)\,\Delta x \\
&= (\Delta x)\,[f(\bar{x}_1) + f(\bar{x}_2) + f(\bar{x}_3) + f(\bar{x}_4) + f(\bar{x}_5) + f(\bar{x}_6)] \\
&= \frac{\pi}{4}\left[f\left(\frac{\pi}{8}\right) + f\left(\frac{3\pi}{8}\right) + f\left(\frac{5\pi}{8}\right) + f\left(\frac{7\pi}{8}\right) + f\left(\frac{9\pi}{8}\right) + f\left(\frac{11\pi}{8}\right)\right] \\
&= \frac{\pi}{4}\left(\sin\frac{\pi}{8} + \sin\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{5\pi}{8} + \sin\frac{7\pi}{8} + \sin\frac{9\pi}{8} + \sin\frac{11\pi}{8}\right) \\
&\approx \frac{\pi}{4}(1,306\,563) \approx 1,026\,172
\end{aligned}$$

La somme de Riemann représente la somme des aires des quatre rectangles situés au-dessus de l'axe des *x* moins la somme des aires des deux rectangles situés sous l'axe des *x*. Il est à noter que la somme de Riemann a la même valeur que la somme des aires des deux premiers rectangles.

5. a) $\int_0^{10} f(x)dx \approx D_5 = [f(2) + f(4) + f(6) + f(8) + f(10)]\,\Delta x$
$= [-1 + 0 + (-2) + 2 + 4](2) = 3(2) = 6$

b) $\int_0^{10} f(x)dx \approx G_5 = [f(0) + f(2) + f(4) + f(6) + f(8)]\,\Delta x$
$= [3 + (-1) + 0 + (-2) + 2](2) = 2(2) = 4$

c) $\int_0^{10} f(x)dx \approx M_5 = [f(1) + f(3) + f(5) + f(7) + f(9)]\,\Delta x$
$= [0 + (-1) + (-1) + 0 + 3](2) = 1(2) = 2$

6. a) $\int_{-2}^{4} g(x)dx \approx D_6 = [g(-1) + g(0) + g(1) + g(2) + g(3) + g(4)]\,\Delta x$
$= \left[-\tfrac{3}{2} + 0 + \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2} + (-1) + \tfrac{1}{2}\right](1) = 0$

b) $\int_{-2}^{4} g(x)dx \approx G_6 = [g(-2) + g(-1) + g(0) + g(1) + g(2) + g(3)]\,\Delta x$
$= \left[0 + \left(-\tfrac{3}{2}\right) + 0 + \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2} + (-1)\right](1) = -\tfrac{1}{2}$

c) $\int_{-2}^{4} g(x)dx \approx M_6 = [g(-\tfrac{3}{2}) + g(-\tfrac{1}{2}) + g(\tfrac{1}{2}) + g(\tfrac{3}{2}) + g(\tfrac{5}{2}) + g(\tfrac{7}{2})]\,\Delta x$
$= [-1 + (-1) + 1 + 1 + 0 + (-\tfrac{1}{2})](1) = -\tfrac{1}{2}$

7. Comme la valeur de la fonction *f* est croissante, $G_5 \le \int_{10}^{30} f(x)dx \le D_5$.

$$\begin{aligned}
\text{Approximation par défaut} = G_5 &= \sum_{i=1}^{5} f(x_{i-1})\Delta x = 4[f(10) + f(14) + f(18) + f(22) + f(26)] \\
&= 4[-12 + (-6) + (-2) + 1 + 3] = 4(-16) = -64
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Approximation par excès} = D_5 &= \sum_{i=1}^{5} f(x)\Delta x = 4[f(14) + f(18) + f(22) + f(26) + f(30)] \\
&= 4[-6 + (-2) + 1 + 3 + 8] = 4(4) = 16
\end{aligned}$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

8. a) Si nous utilisons les extrémités droites des sous-intervalles pour effectuer une approximation de $\int_3^9 f(x)dx$, nous obtenons $\sum_{i=1}^{3} f(x_i)\,\Delta x = 2[f(5)+f(7)+f(9)] = 2(-0,6+0,9+1,8) = 4,2$. Comme la fonction *f est croissante*, l'utilisation des extrémités *droites* produit une *approximation par excès.*

b) Si nous utilisons les extrémités gauches des sous-intervalles pour effectuer une approximation de $\int_3^9 f(x)dx$, nous obtenons $\sum_{i=1}^{3} f(x_{i-1})\,\Delta x = 2[f(3)+f(5)+f(7)] = 2(-3,4-0,6+0,9) = -6,2$. Comme la fonction *f est croissante*, l'utilisation des extrémités *gauches* produit une *approximation par défaut.*

c) Si nous utilisons les milieux des sous-intervalles pour effectuer une approximation de $\int_3^9 f(x)dx$, nous obtenons $\sum_{i=1}^{3} f(\bar{x}_i)\,\Delta x = 2[f(4)+f(6)+f(8)] = 2(-2,1+0,3+1,4) = -0,8$. Il est impossible de comparer l'approximation obtenue en utilisant les milieux des sous-intervalles et la valeur exacte de l'intégrale.

9. Comme $\Delta x = (8-0)/4 = 2$, les extrémités des sous-intervalles sont 0, 2, 4, 6 et 8, et les milieux des sous-intervalles sont 1, 3, 5 et 7. La méthode des milieux des sous-intervalles donne

$$\int_0^8 \sin\sqrt{x}\,dx \approx \sum_{i=1}^{4} f(\bar{x}_i)\,\Delta x = 2\left(\sin\sqrt{1}+\sin\sqrt{3}+\sin\sqrt{5}+\sin\sqrt{7}\right) \approx 2(3,091\,0) = 6,182\,0 .$$

10. Comme $\Delta x = (\pi/2-0)/4 = \frac{\pi}{8}$, les extrémités des sous-intervalles sont 0, $\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{8}$ et $\frac{\pi}{2}$, et les milieux des sous-intervalles sont $\frac{\pi}{16}$, $\frac{3\pi}{16}$, $\frac{5\pi}{16}$ et $\frac{7\pi}{16}$. La méthode des milieux des sous-intervalles donne

$$\int_0^{\pi/2} \cos^4 x\,dx \approx \sum_{i=1}^{4} f(\bar{x}_i)\,\Delta x = \tfrac{\pi}{8}[\cos^4(\tfrac{\pi}{16})+\cos^4(\tfrac{3\pi}{16})+\cos^4(\tfrac{5\pi}{16})+\cos^4(\tfrac{7\pi}{16})] = \tfrac{\pi}{8}(\tfrac{3}{2}) \approx 0,589\,0 .$$

11. Comme $\Delta x = (2-0)/5 = \frac{2}{5}$, les extrémités des sous-intervalles sont 0, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{8}{5}$ et 2, et les milieux des sous-intervalles sont $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{5}$, $\frac{7}{5}$ et $\frac{9}{5}$. La méthode des milieux des sous-intervalles donne

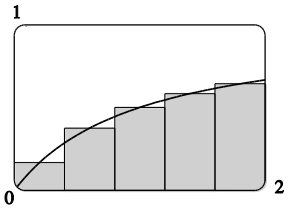
$$\int_0^2 \frac{x}{x+1}dx \approx \sum_{i=1}^{5} f(\bar{x}_i)\,\Delta x = \frac{2}{5}\left(\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}+1}+\frac{\frac{3}{5}}{\frac{3}{5}+1}+\frac{\frac{5}{5}}{\frac{5}{5}+1}+\frac{\frac{7}{5}}{\frac{7}{5}+1}+\frac{\frac{9}{5}}{\frac{9}{5}+1}\right) = \frac{2}{5}\left(\frac{127}{56}\right) = \frac{127}{140} \approx 0,907\,1 .$$

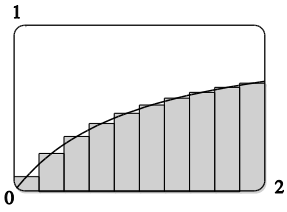
12. Comme $\Delta x = (5-1)/4 = 1$, les extrémités des sous-intervalles sont 1, 2, 3, 4 et 5, et les milieux des sous-intervalles sont 1,5; 2,5; 3,5 et 4,5. La méthode des milieux des sous-intervalles donne

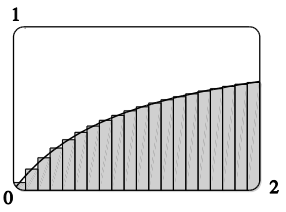
$$\int_1^5 x^2 e^{-x}dx \approx \sum_{i=1}^{4} f(\bar{x}_i)\,\Delta x = 1[(1,5)^2e^{-1,5}+(2,5)^2e^{-2,5}+(3,5)^2e^{-3,5}+(4,5)^2e^{-4,5}] \approx 1,6099 .$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

13. Si vous utilisez Maple 14 ou une version plus récente, employez les commandes with(Student[Calculus1]) et ReimannSum (x/(x+1),0..2,partition=5,method=midpoint,output=plot). Certaines des anciennes versions de Maple ne permettent d'employer seulement la commande with(student) pour charger les commandes middlesum et middlebox, suivie par m:=middlesum (x/(x+1), x=0..2), qui produit la somme en notation sigma, et par M:=evalf(m), qui produit l'approximation numérique, et finalement middlebox(x/(x+1),x=0..2), qui génère le graphique. Les valeurs obtenues pour n = 5, 10 et 20 sont 0,907 1, 0,902 9 et 0,901 8, respectivement.







14. Pour la fonction $f(x) = x/(x + 1)$ sur l'intervalle [0, 2], nous calculons que $G_{100} \approx 0{,}894\,69$ et que $D_{100} \approx 0{,}908\,02$. Comme la fonction f est croissante sur l'intervalle [0, 2], G_{100} est une approximation par défaut de $\int_0^2 \frac{x}{x+1}dx$ et D_{100} en est une approximation par excès.

Il s'ensuit que $0{,}894\,6 < \int_0^2 \frac{x}{x+1}dx < 0{,}908\,1$.

15. Nous construirons un tableau de valeurs dans le but de calculer une approximation de l'intégrale $\int_0^{\pi} \sin x dx$ en utilisant le programme qui apparaît à la solution de l'exercice 1.3.9, avec les valeurs $Y_1 = \sin x$, Xmin = 0, Xmax = π et n = 5, 10, 50 et 100. Les valeurs de D_n semblent se rapprocher de 2.

n	D_n
5	1,933 766
10	1,983 524
50	1,999 342
100	1,999 836

16. $\int_0^2 e^{-x^2} dx$ avec n = 5, 10, 50 et 100.

N	G_n	D_n
5	1,077 467	0,684 794
10	0,980 007	0,783 670
50	0,901 705	0,862 438
100	0,891 896	0,872 262

 © Groupe Modulo inc., 2013

La valeur de l'intégrale définie se situe entre 0,872 et 0,892. Il faut noter que la fonction $f(x) = e^{-x^2}$ est décroissante sur l'intervalle]0, 2[. On ne peut faire un énoncé semblable pour l'intégrale $\int_{-1}^{2} e^{-x^2}\,dx$ puisque la fonction f est croissante sur]–1, 0[.

17. Sur l'intervalle [2, 6], $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \ln(1+x_i^2)\,\Delta x = \int_2^6 x\ln(1+x^2)\,dx$.

18. Sur l'intervalle $[\pi, 2\pi]$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\cos x_i}{x_i}\,\Delta x = \int_{\pi}^{2\pi} \dfrac{\cos x}{x}\,dx$.

19. Sur l'intervalle [2, 7], $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} [5(x_i^*)^3 - 4x_i^*]\,\Delta x = \int_2^7 (5x^3 - 4x)\,dx$.

20. Sur l'intervalle [1, 3], $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{x_i^*}{(x_i^*)^2+4}\,\Delta x = \int_1^3 \dfrac{x}{x^2+4}\,dx$.

21. Il faut noter que $\Delta x = \dfrac{5-2}{n} = \dfrac{3}{n}$ et que $x_i = 2 + i\Delta x = 2 + \dfrac{3i}{n}$.

$$\begin{aligned}
\int_2^5 (4-2x)\,dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(2+\frac{3i}{n}\right)\frac{3}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[4-2\left(2+\frac{3i}{n}\right)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{6i}{n}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\left(-\frac{6}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} i = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{18}{n^2}\right)\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{18}{2}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right) = -9\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = -9(1) = -9
\end{aligned}$$

22. Il faut noter que $\Delta x = \dfrac{4-1}{n} = \dfrac{3}{n}$ et que $x_i = 1 + i\Delta x = 1 + \dfrac{3i}{n}$.

$$\begin{aligned}
\int_1^4 (x^2-4x+2)\,dx &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(1+\frac{3i}{n}\right)\frac{3}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(1+\frac{3i}{n}\right)^2 - 4\left(1+\frac{3i}{n}\right)+2\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[1+\frac{6i}{n}+\frac{9i^2}{n^2}-4-\frac{12i}{n}+2\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{9i^2}{n^2}-\frac{6i}{n}-1\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\left[\frac{9}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 1\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{27}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{18}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{3}{n}\cdot n(1)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{9}{2}\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} - 9\frac{n+1}{n} - 3\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{9}{2}\frac{n+1}{n}\frac{2n+1}{n} - 9\left(1+\frac{1}{n}\right) - 3\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{9}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) - 9\left(1+\frac{1}{n}\right) - 3\right] = \frac{9}{2}(1)(2) - 9(1) - 3 = -3
\end{aligned}$$

23. Il faut noter que $\Delta x = \dfrac{0-(-2)}{n} = \dfrac{2}{n}$ et que $x_i = -2 + i\Delta x = -2 + \dfrac{2i}{n}$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

$$\int_{-2}^{0}(x^2+x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(-2+\frac{2i}{n}\right)\frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(-2+\frac{2i}{n}\right)^2+\left(-2+\frac{2i}{n}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[4-\frac{8i}{n}+\frac{4i^2}{n^2}-2+\frac{2i}{n}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4i^2}{n^2}-\frac{6i}{n}+2\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left[\frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i^2-\frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n}i+\sum_{i=1}^{n}2\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{8}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{12}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}+\frac{2}{n}\cdot n(2)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{4}{3}\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}-6\frac{n+1}{n}+4\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{4}{3}\frac{n+1}{n}\frac{2n+1}{n}-6\left(1+\frac{1}{n}\right)+4\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)-6\left(1+\frac{1}{n}\right)+4\right] = \frac{4}{3}(1)(2)-6(1)+4 = \frac{2}{3}$$

24. Il faut noter que $\Delta x = \dfrac{2-0}{n} = \dfrac{2}{n}$ et que $x_i = 0+i\Delta x = \dfrac{2i}{n}$.

$$\int_{0}^{2}(2x-x^3)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{2i}{n}\right)\frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[2\left(\frac{2i}{n}\right)-\left(\frac{2i}{n}\right)^3\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{4i}{n}-\frac{8i^3}{n^3}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\left[\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}i-\frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^3\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{8}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}-\frac{16}{n^4}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2\right\} = \lim_{n\to\infty}\left[4\frac{n+1}{n}-4\frac{(n+1)^2}{n^2}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[4\left(1+\frac{1}{n}\right)-4\frac{n+1}{n}\frac{n+1}{n}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[4\left(1+\frac{1}{n}\right)-4\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= 4(1)-4(1)(1) = 0$$

25. Il faut noter que $\Delta x = \dfrac{1-0}{n} = \dfrac{1}{n}$ et que $x_i = 0+i\Delta x = \dfrac{i}{n}$.

$$\int_{0}^{1}(x^3-3x^2)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{i}{n}\right)^3-3\left(\frac{i}{n}\right)^2\right]\frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{i^3}{n^3}-\frac{3i^2}{n^2}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^3-\frac{3}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i^2\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n^4}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2-\frac{3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{4}\frac{n+1}{n}\frac{n+1}{n}-\frac{1}{2}\frac{n+1}{n}\frac{2n+1}{n}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\right] = \frac{1}{4}(1)(1)-\frac{1}{2}(1)(2) = -\frac{3}{4}$$

26. a) $\Delta x = (4-0)/8 = 0{,}5$ et $x_i^* = x_i = 0{,}5i$.

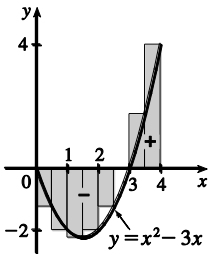
$$\int_{0}^{4}(x^2-3x)dx \approx \sum_{i=1}^{8} f(x_i^*)\,\Delta x$$

$$= 0{,}5\{[0{,}5^2-3(0{,}5)]+[1{,}0^2-3(1{,}0)]+\cdots+[3{,}5^2-3(3{,}5)]+[4{,}0^2-3(4{,}0)]\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{5}{4}-2-\tfrac{9}{4}-2-\tfrac{5}{4}+0+\tfrac{7}{4}+4\right) = -1{,}5$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

b)



c) $\int_0^4 (x^2-3x)dx = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{4i}{n}\right)^2 - 3\left(\frac{4i}{n}\right)\right]\left(\frac{4}{n}\right)$

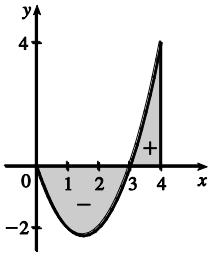
$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n}\left[\frac{16}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n} i^2 - \frac{12}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} i\right]$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{64}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{48}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right]$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{32}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) - 24\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$

$= \frac{32}{3}\cdot 2 - 24 = -\frac{8}{3}$

d) $\int_0^4 (x^2-3x)dx = A_1 - A_2$, où A_1 est l'aire indiquée par le signe + et A_2 est l'aire indiquée par le signe –.



27. $\int_a^b x dx = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left[a + \frac{b-a}{n}i\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{a(b-a)}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} 1 + \frac{(b-a)^2}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n} i\right]$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{a(b-a)}{n}n + \frac{(b-a)^2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right] = a(b-a) + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(b-a)^2}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$= a(b-a) + \frac{1}{2}(b-a)^2 = (b-a)(a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a) = (b-a)\frac{1}{2}(b+a) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$

 © Groupe Modulo inc., 2013

28. $$\int_a^b x^2dx = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[a+\frac{b-a}{n}i\right]^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[a^2+2a\frac{b-a}{n}i+\frac{(b-a)^2}{n^2}i^2\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(b-a)^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2+\frac{2a(b-a)^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i+\frac{a^2(b-a)}{n}\sum_{i=1}^{n}1\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(b-a)^3}{n^3}\frac{n(n+1)\ (2n+1)}{6}+\frac{2a(b-a)^2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}+\frac{a^2(b-a)}{n}n\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(b-a)^3}{6}\cdot 1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)+a(b-a)^2\cdot 1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)+a^2(b-a)\right]$$
$$= \frac{(b-a)^3}{3}+a(b-a)^2+a^2(b-a) = \frac{b^3-3ab^2+3a^2b-a^3}{3}+ab^2-2a^2b+a^3+a^2b-a^3$$
$$= \frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}-ab^2+a^2b+ab^2-a^2b = \frac{b^3-a^3}{3}$$

29. $f(x)=\dfrac{x}{1+x^5}$, $a=2$, $b=6$ et $\Delta x=\dfrac{6-2}{n}=\dfrac{4}{n}$. À l'aide du théorème 4, nous obtenons $x_i^* = x_i = 2+i\Delta x = 2+\dfrac{4i}{n}$,

donc $$\int_2^6\frac{x}{1+x^5}dx = \lim_{n\to\infty}D_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{2+\dfrac{4i}{n}}{1+\left(2+\dfrac{4i}{n}\right)^5}\cdot\frac{4}{n}.$$

30. $\Delta x=\dfrac{10-1}{n}=\dfrac{9}{n}$ et $x_i = 1+i\Delta x = 1+\dfrac{9i}{n}$, donc $\displaystyle\int_1^{10}(x-4\ln x)dx = \lim_{n\to\infty}D_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(1+\frac{9i}{n}\right)-4\ln\left(1+\frac{9i}{n}\right)\right]\cdot\frac{9}{n}$.

31. $\Delta x = (\pi-0)/n = \pi/n$ et $x_i^* = x_i = \pi i/n$.

$$\int_0^{\pi}\sin 5x dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\sin 5x_i)\left(\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\sin\frac{5\pi i}{n}\right)\frac{\pi}{n} \overset{\text{LCS}}{=} \pi\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cot\left(\frac{5\pi}{2n}\right) \overset{\text{LCS}}{=} \pi\left(\frac{2}{5\pi}\right) = \frac{2}{5}$$

32. $\Delta x = (10-2)/n = 8/n$ et $x_i^* = x_i = 2+8i/n$.

$$\int_2^{10}x^6dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(2+\frac{8i}{n}\right)^6\left(\frac{8}{n}\right) = 8\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(2+\frac{8i}{n}\right)^6$$
$$\overset{\text{LCS}}{=} 8\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{64(58\,593n^6+164\,052n^5+131\,208n^4-27\,776n^2+2\,048)}{21n^5}$$
$$\overset{\text{LCS}}{=} 8\left(\frac{1\,249\,984}{7}\right) = \frac{9\,999\,872}{7}\approx 1\,428\,553{,}1$$

33. a) Traitez $\int_0^2 f(x)dx$ comme la valeur de l'aire d'un trapèze de bases 1 et 3 et de hauteur 2. L'aire d'un trapézoïde se calcule au moyen de la formule

$A=\frac{1}{2}(b+B)h$, donc $\int_0^2 f(x)dx = \frac{1}{2}(1+3)2 = 4$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

b) $\int_0^5 f(x)dx = \underbrace{\int_0^2 f(x)dx}_{\text{trapèze}} + \underbrace{\int_2^3 f(x)dx}_{\text{rectangle}} + \underbrace{\int_3^5 f(x)dx}_{\text{triangle}}$

$= \frac{1}{2}(1+3)2 + \quad 3\cdot 1 \quad + \quad \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3 = 4+3+3 = 10$

c) $\int_5^7 f(x)dx$ est l'aire, affectée du signe *moins*, du triangle de base 2 et de hauteur 3. $\int_5^7 f(x)dx = -\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3 = -3$.

d) $\int_7^9 f(x)dx$ est l'aire, affectée du signe *moins*, du trapèze de bases 3 et 2 et de hauteur 2. Elle est donc égale à $-\frac{1}{2}(B+b)h = -\frac{1}{2}(3+2)2 = -5$. Il s'ensuit que $\int_0^9 f(x)dx = \int_0^5 f(x)dx + \int_5^7 f(x)dx + \int_7^9 f(x)dx = 10 + (-3) + (-5) = 2$.

34. a) $\int_0^2 g(x)dx = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2 = 4$ [aire d'un triangle]

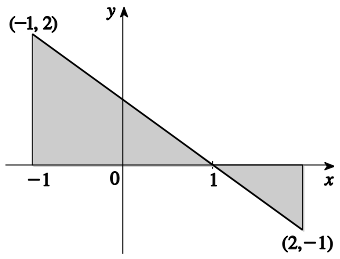
b) $\int_2^6 g(x)dx = -\frac{1}{2}\pi(2)^2 = -2\pi$ [aire, affectée du signe moins, d'un demi-cercle]

c) $\int_6^7 g(x)dx = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 = \frac{1}{2}$ [aire d'un triangle]

$\int_0^7 g(x)dx = \int_0^2 g(x)dx + \int_2^6 g(x)dx + \int_6^7 g(x)dx = 4 - 2\pi + \frac{1}{2} = 4{,}5 - 2\pi$

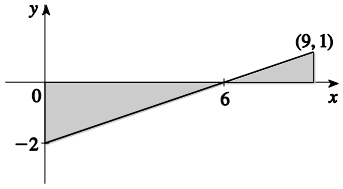
35. On peut interpréter $\int_{-1}^2 (1-x)dx$ comme étant la différence entre les aires des deux triangles ombrés, c'est-à-dire,

$\frac{1}{2}(2)(2) - \frac{1}{2}(1)(1) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.



36. On peut interpréter $\int_0^9 \left(\frac{1}{3}x - 2\right)dx$ comme étant la différence entre les aires des deux triangles ombrés, c'est-à-dire,

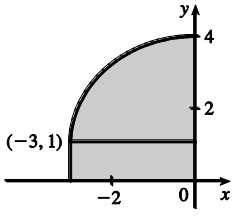
$-\frac{1}{2}(6)(2) + \frac{1}{2}(3)(1) = -6 + \frac{3}{2} = -\frac{9}{2}$.



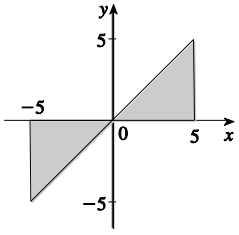
 © Groupe Modulo inc., 2013

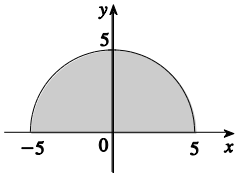
37. On peut interpréter $\int_{-3}^{0}\left(1+\sqrt{9-x^2}\right)dx$ comme étant l'aire sous le graphique de la fonction $f(x)=1+\sqrt{9-x^2}$ entre $x=-3$ et $x=0$.

Ceci est égal à un quart de l'aire du cercle de rayon 3, plus l'aire du rectangle, donc $\int_{-3}^{0}\left(1+\sqrt{9-x^2}\right)\,dx=\frac{1}{4}\pi\cdot 3^2+1\cdot 3=3+\frac{9}{4}\pi$.

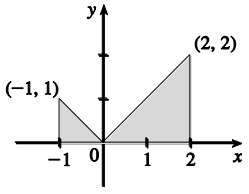


38. $\int_{-5}^{5}\left(x-\sqrt{25-x^2}\right)dx=\int_{-5}^{5}x\,dx-\int_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}\,dx$. En raison de la symétrie, la valeur de la première intégrale est 0 puisque l'aire ombrée au-dessus de l'axe des x est égale à l'aire ombrée sous l'axe des *x.* On peut interpréter la deuxième intégrale comme étant la moitié de l'aire d'un cercle de rayon 5, c'est-à-dire, $\frac{1}{2}\pi(5)^2=\frac{25}{2}\pi$. Il s'ensuit que la valeur de l'intégrale originale est $0-\frac{25}{2}\pi=-\frac{25}{2}\pi$.

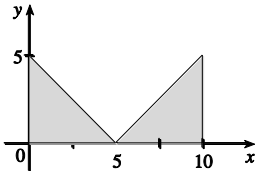




39. On peut interpréter $\int_{-1}^{2}|x|\,dx$ comme étant la somme des aires des deux triangles ombrés, c'est-à-dire, $\frac{1}{2}(1)(1)+\frac{1}{2}(2)(2)=\frac{1}{2}+\frac{4}{2}=\frac{5}{2}$.



40. On peut interpréter $\int_{0}^{10}|x-5|\,dx$ comme étant la somme des aires des deux triangles ombrés, c'est-à-dire, $2\left(\frac{1}{2}\right)(5)(5)=25$.



41. $\int_{\pi}^{\pi}\sin^2 x\cos^4 x\,dx=0$ parce que les bornes d'intégration sont égales.

 © Groupe Modulo inc., 2013

42. $\int_1^0 3u\sqrt{u^2+4}\,du = -\int_0^1 3u\sqrt{u^2+4}\,du$ [parce que nous avons inversé les bornes d'intégration]

$= -\int_0^1 3x\sqrt{x^2+4}\,dx$ [nous pouvons utiliser n'importe quelle lettre sans changer la valeur de l'intégrale]

$= -\left(5\sqrt{5}-8\right)$ [valeur fournie]

$= 8-5\sqrt{5}$

43. $\int_0^1 (5-6x^2)\,dx = \int_0^1 5\,dx - 6\int_0^1 x^2\,dx = 5(1-0) - 6(\tfrac{1}{3}) = 5-2 = 3$

44. $\int_1^3 (2e^x - 1)\,dx = 2\int_1^3 e^x\,dx - \int_1^3 1\,dx = 2(e^3 - e) - 1(3-1) = 2e^3 - 2e - 2$

45. $\int_1^3 e^{x+2}\,dx = \int_1^3 e^x \cdot e^2\,dx = e^2\int_1^3 e^x\,dx = e^2(e^3 - e) = e^5 - e^3$

46. $\int_0^{\pi/2} (2\cos x - 5x)\,dx = \int_0^{\pi/2} 2\cos x\,dx - \int_0^{\pi/2} 5x\,dx = 2\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx - 5\int_0^{\pi/2} x\,dx$

$= 2(1) - 5\dfrac{(\pi/2)^2 - 0^2}{2} = 2 - \dfrac{5\pi^2}{8}$

47.

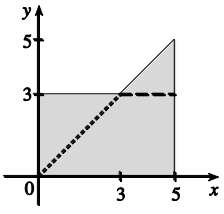
$\int_{-2}^2 f(x)\,dx + \int_2^5 f(x)\,dx - \int_{-2}^{-1} f(x)\,dx = \int_{-2}^5 f(x)\,dx + \int_{-1}^{-2} f(x)\,dx$ [selon la propriété 5 et en inversant les bornes d'intégration]

$= \int_{-1}^5 f(x)\,dx$ [selon la propriété 5]

48. $\int_1^4 f(x)\,dx = \int_1^5 f(x)\,dx - \int_4^5 f(x)\,dx = 12 - 3{,}6 = 8{,}4$

49. $\int_0^9 [2f(x) + 3g(x)]\,dx = 2\int_0^9 f(x)\,dx + 3\int_0^9 g(x)\,dx = 2(37) + 3(16) = 122$

50. Si $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 3 \\ x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$, alors on peut interpréter $\int_0^5 f(x)\,dx$ comme étant l'aire de la région ombrée, qui consiste en un rectangle de dimensions 5 par 3 sur lequel repose un triangle rectangle isocèle dont les cathètes sont de longueur 2. Il s'ensuit que $\int_0^5 f(x)\,dx = 5(3) + \frac{1}{2}(2)(2) = 17$.



 © Groupe Modulo inc., 2013

51. Il est clair que la valeur de $\int_0^3 f(x)dx$ est inférieure à –1 et que cette valeur est la plus petite. La pente de la tangente de la fonction f lorsque $x = 1$, $f'(1)$, a une valeur qui se situe entre –1 et 0; cette valeur est donc la deuxième plus petite. La valeur la plus grande est celle de $\int_3^8 f(x)dx$, suivie par celle de $\int_4^8 f(x)dx$, qui est inférieure d'environ 1 unité à celle de $\int_3^8 f(x)dx$. $\int_0^8 f(x)dx$ est également positive, mais sa valeur est plus petite que celle de $\int_4^8 f(x)dx$. Si nous classons ces valeurs par ordre croissant, nous obtenons

$$\int_0^3 f(x)dx < f'(1) < \int_0^8 f(x)dx < \int_4^8 f(x)dx < \int_3^8 f(x)dx \text{ ou B} < \text{E} < \text{A} < \text{D} < \text{C}$$

52. $F(0) = \int_2^0 f(t)dt = -\int_0^2 f(t)dt$, donc la valeur de $F(0)$ est négative, et, de la même façon, la valeur de $F(1)$ l'est également. Les valeurs de $F(3)$ et de $F(4)$ sont négatives vu qu'elles représentent des aires, affectées du signe *moins*, situées sous l'axe des x. Comme $F(2) = \int_2^2 f(t)dt = 0$ est la seule valeur non-négative, C a la plus grande valeur.

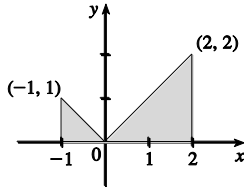
53. $I = \int_{-4}^{2}[f(x) + 2x + 5]dx = \int_{-4}^{2} f(x)dx + 2\int_{-4}^{2} x\,dx + \int_{-4}^{2} 5dx = I_1 + 2I_2 + I_3$

$I_1 = -3$ [aire située sous l'axe des x] $+3 - 3 = -3$

$I_2 = -\frac{1}{2}(4)(4)$ [aire du triangle, se reporter au graphique] $+\frac{1}{2}(2)(2)$
$= -8 + 2 = -6$

$I_3 = 5[2 - (-4)] = 5(6) = 30$

Il s'ensuit que $I = -3 + 2(-6) + 30 = 15$.



54. Si nous utilisons la propriété 8 de l'intégrale définie, nous obtenons

$m \le f(x) \le M \quad \Rightarrow \quad m(2-0) \le \int_0^2 f(x)dx \le M)(2-0) \quad \Rightarrow \quad 2m \le \int_0^2 f(x)dx \le 2M$.

55. $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \ge 0$ sur l'intervalle [0, 4], donc $\int_0^4 (x^2 - 4x + 4)dx \ge 0$ [propriété 6].

56. $x^2 \le x$ sur l'intervalle [0, 1], donc $\sqrt{1+x^2} \le \sqrt{1+x}$ sur l'intervalle [0, 1]. Il s'ensuit que $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx \le \int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx$ [propriété 7].

 © Groupe Modulo inc., 2013

57. Si $-1 \le x \le 1$, alors $0 \le x^2 \le 1$ et $1 \le 1 + x^2 \le 2$, donc $1 \le \sqrt{1+x^2} \le \sqrt{2}$ et $1[1-(-1)] \le \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}\,dx \le \sqrt{2}\left[1-(-1)\right]$ [propriété 8], c'est-à-dire, $2 \le \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}\,dx \le 2\sqrt{2}$.

58. Si $\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{4}$, alors $\cos\frac{\pi}{6} \ge \cos x \ge \cos\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2} \le \cos x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) \le \int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos x\,dx \le \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)$ [propriété 8], c'est-à-dire, $\frac{\sqrt{2}\pi}{24} \le \int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos x\,dx \le \frac{\sqrt{3}\pi}{24}$.

59. Si $1 \le x \le 4$, alors $1 \le \sqrt{x} \le 2$, donc $1(4-1) \le \int_1^4 \sqrt{x}\,dx \le 2(4-1)$, c'est-à-dire, $3 \le \int_1^4 \sqrt{x}\,dx \le 6$.

60. Si $0 \le x \le 2$, alors $1 \le 1 + x^2 \le 5$ et $\frac{1}{5} \le \frac{1}{1+x^2} \le 1$, donc $\frac{1}{5}(2-0) \le \int_0^2 \frac{1}{1+x^2}\,dx \le 1(2-0)$, c'est-à-dire, $\frac{2}{5} \le \int_0^2 \frac{1}{1+x^2}\,dx \le 2$.

61. Si $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{3}$, alors $1 \le \tan x \le \sqrt{3}$, donc $1(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}) \le \int_{\pi/4}^{\pi/3} \tan x\,dx \le \sqrt{3}(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})$ ou $\frac{\pi}{12} \le \int_{\pi/4}^{\pi/3} \tan x dx \le \frac{\pi}{12}\sqrt{3}$.

62. Soit $f(x) = x^3 - 3x + 3$ pour $0 \le x \le 2$. Alors, $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$, donc la fonction f est décroissante sur]0, 1[et croissante sur]1, 2]. Le minimum absolu de la fonction f est $f(1) = 1$. Comme $f(0) = 3$ et $f(2) = 5$, le maximum absolu de la fonction f est $f(2) = 5$. Ainsi, $1 \le x^3 - 3x + 3 \le 5$ pour tout x sur l'intervalle [0, 2]. Il s'ensuit de la propriété 8 que $1\cdot(2-0) \le \int_0^2 (x^3 - 3x + 3)dx \le 5\cdot(2-0)$, c'est-à-dire, $2 \le \int_0^2 (x^3 - 3x + 3)dx \le 10$.

63. Le seul point critique de $f(x) = xe^{-x}$ sur l'intervalle [0, 2] est $x = 1$. Comme $f(0) = 0$, $f(1) = e^{-1} \approx 0{,}368$ et $f(2) = 2e^{-2} \approx 0{,}271$, nous savons que le minimum absolu de la fonction f sur l'intervalle [0, 2] est 0, et que son maximum absolu est e^{-1}. Selon la propriété 8, $0 \le xe^{-x} \le e^{-1}$ pour $0 \le x \le 2 \;\Rightarrow\; 0(2-0) \le \int_0^2 xe^{-x}dx \le e^{-1}(2-0) \;\Rightarrow\; 0 \le \int_0^2 xe^{-x}dx \le 2/e$.

64. Soit $f(x) = x - 2\sin x$ pour $\pi \le x \le 2\pi$. Alors, $f'(x) = 1 - 2\cos x$ et $f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; \cos x = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; x = \frac{5\pi}{3}$. Le maximum absolu de la fonction f est $f(\frac{5\pi}{3}) = \frac{5\pi}{3} - 2\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 6{,}97$ puisque les valeurs de $f(\pi) = \pi$ et $f(2\pi) = 2\pi$ sont toutes deux inférieures à 6,97. Il s'ensuit que $\pi \le f(x) \le \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3} \;\Rightarrow\; \pi(2\pi - \pi) \le \int_\pi^{2\pi} f(x)dx \le \left(\frac{5\pi}{3} + \sqrt{3}\right)(2\pi - \pi)$, c'est-à-dire, $\pi^2 \le \int_\pi^{2\pi} (x - 2\sin x)dx \le \frac{5}{3}\pi^2 + \sqrt{3}\pi$.

65. $\sqrt{x^4+1} \ge \sqrt{x^4} = x^2$, donc $\int_1^3 \sqrt{x^4+1}dx \ge \int_1^3 x^2dx = \frac{1}{3}(3^3 - 1^3) = \frac{26}{3}$.

66. $0 \le \sin x \le 1$ pour $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, donc $x\sin x \le x \;\Rightarrow\; \int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx \le \int_0^{\pi/2} x\,dx = \frac{1}{2}[(\frac{\pi}{2})^2 - 0^2] = \frac{\pi^2}{8}$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

67. Si, comme dans la démonstration de la propriété 2, nous utilisons les extrémités droites des sous-intervalles, nous obtenons

$$\int_a^b cf(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} cf(x_i)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} c\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = c\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = c\int_a^b f(x)dx\ .$$

68. a) Comme $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$, il s'ensuit de la propriété 7 que

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx \quad\Rightarrow\quad \left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Il faut noter que, comme l'intégrale définie est un nombre réel, la propriété ci-après s'applique : $-a \le b \le a \quad\Rightarrow\quad |b| \le a$ pour tout nombre réel b et tout entier naturel a.

b) $\left|\int_0^{2\pi} f(x)\sin 2x dx\right| \le \int_0^{2\pi} |f(x)\sin 2x|\,dx$ [selon la sous-question a)] $= \int_0^{2\pi} |f(x)|\,|\sin 2x|\,dx \le \int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx$ selon la propriété 7, puisque $|\sin 2x| \le 1 \quad\Rightarrow\quad |f(x)|\,|\sin 2x| \le |f(x)|$.

69. Supposons que la fonction f est intégrable sur l'intervalle [0, 1], c'est-à-dire que $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$ existe pour toute valeur de x_i^* dans $[x_{i-1}, x_i]$. Soit n un entier naturel; divisons l'intervalle [0, 1] en n sous-intervalles égaux $\left[0, \frac{1}{n}\right]$, $\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$, …, $\left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$. Si nous faisons le choix que x_i^* est un nombre rationnel dans le $i^{\text{ème}}$ sous-intervalle, nous obtenons alors la somme de Riemann $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\cdot\frac{1}{n} = 0$, donc $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\cdot\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$. Si nous faisons plutôt le choix que x_i^* est un nombre irrationnel, nous obtenons alors $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\cdot\frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} 1\cdot\frac{1}{n} = n\cdot\frac{1}{n} = 1$ pour toute valeur de n, donc $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\cdot\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$. Comme la valeur de $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$ est dépendante du choix des points d'échantillonnage x_i^*, la limite n'existe pas et f n'est pas intégrable sur l'intervalle [0, 1].

70. Divisons l'intervalle [0, 1] en n sous-intervalles égaux et choisissons $x_1^* = \frac{1}{n^2}$. Alors, pour $f(x) = \frac{1}{x}$, $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x \ge f(x_1^*)\Delta x = \frac{1}{1/n^2}\cdot\frac{1}{n} = n$. Il s'ensuit qu'il est possible d'augmenter, de façon arbitraire, la valeur de $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$ jusqu'à ce qu'elle soit importante et, conséquemment, la fonction f n'est pas intégrable sur l'intervalle [0, 1].

71. $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^4}{n^5} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^4}{n^4}\cdot\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^4\frac{1}{n}$. À ce point, nous devons reconnaître que la limite est de la forme $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$, où $\Delta x = (1-0)/n = 1/n$, $x_i = 0 + i\,\Delta x = i/n$ et $f(x) = x^4$. Il s'ensuit que l'intégrale définie est $\int_0^1 x^4 dx$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

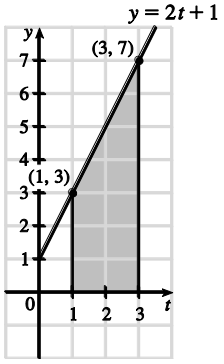
72. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(i/n)^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(i/n)^2}\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\,\Delta x$, où $\Delta x=(1-0)/n=1/n$, $x_i=0+i\,\Delta x=i/n$ et $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$. Il s'ensuit que l'intégrale définie est $\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$.

73. Choisissez $x_i=1+\frac{i}{n}$ et $x_i^*=\sqrt{x_i\,{}_{-1}\,x_i}=\sqrt{\left(1+\frac{i-1}{n}\right)\left(1+\frac{i}{n}\right)}$. Alors,

$$\begin{aligned}\int_1^2 x^{-2}dx&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{i-1}{n}\right)\left(1+\frac{i}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(n+i-1)(n+i)}\\&=\lim_{n\to\infty}n\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n+i-1}-\frac{1}{n+i}\right)\quad[\text{selon l'indice}]\quad=\lim_{n\to\infty}n\left(\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{n+i}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}n\left(\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right]-\left[\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right]\right)\\&=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty}(1-\tfrac{1}{2})=\tfrac{1}{2}\end{aligned}$$

À DÉCOUVRIR : LA FONCTION AIRE

1. a)

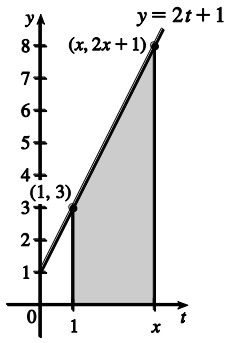


Aire du trapèze $=\frac{1}{2}(b_1+b_2)h=\frac{1}{2}(3+7)2$
$=10$ unités^2

ou :

Aire du rectangle + aire du triangle $=b_rh_r+\frac{1}{2}b_th_t=(2)(3)+\frac{1}{2}(2)(4)=10$ unités^2

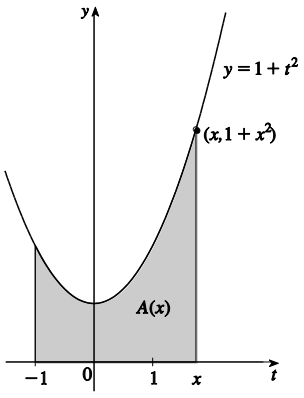
 © Groupe Modulo inc., 2013

b) 

Tel que déterminé à la sous-question a),

$$A(x) = \tfrac{1}{2}[3 + (2x+1)](x-1) = \tfrac{1}{2}(2x + 4)(x-1)$$
$$= (x+2)(x-1) = x^2 + x - 2 \text{ unités}^2$$

c) $A'(x) = 2x + 1$. Il s'agit ici de l'ordonnée du point $(x, 2x + 1)$ appartenant à la droite donnée.

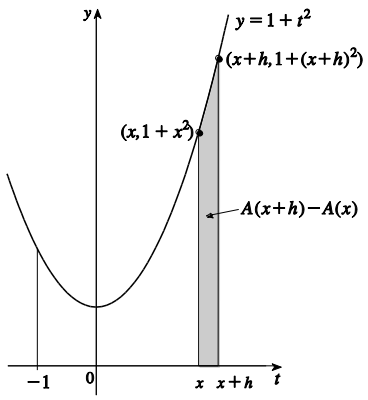
2. a) 

b) $$A(x) = \int_{-1}^{x}(1+t^2)dt = \int_{-1}^{x} 1\,dt + \int_{-1}^{x} t^2 dt \quad [\text{propriété 2}]$$
$$= 1[x-(-1)] + \frac{x^3-(-1)^3}{3} \quad \left[\begin{matrix}\text{propriété 1 et}\\ \text{exercice 1.4.28}\end{matrix}\right]$$
$$= x + 1 + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{3}$$
$$= \tfrac{1}{3}x^3 + x + \tfrac{4}{3}$$

c) $A'(x) = x^2 + 1$. Il s'agit ici de l'ordonnée du point $(x, 1 + x^2)$ appartenant à la courbe donnée.

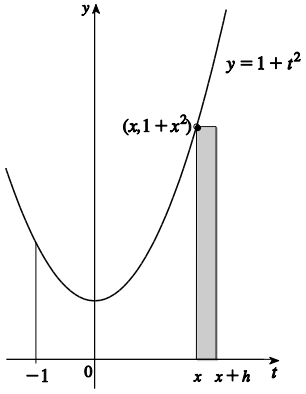
 © Groupe Modulo inc., 2013

d)



d) $A(x + h) - A(x)$ est l'aire sous la courbe $y = 1 + t^2$ de $t = x$ à $t = x + h$.

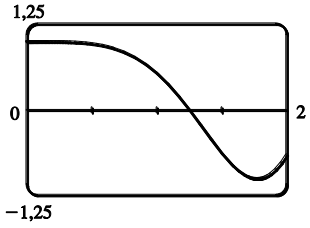
e)



Un rectangle qui est une approximation de la région apparaît dans le graphique. Sa hauteur est $1 + x^2$, sa largeur h et son aire $h(1 + x^2)$, donc $A(x+h) - A(x) \approx h(1+x^2) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{A(x+h) - A(x)}{h} \approx 1 + x^2$.

f) La sous-question e) indique que le taux de variation moyen sur $[x, x + h[$ de A est d'environ $1 + x^2$. Si h se rapproche de 0, le quotient se rapproche du taux de variation instantané en x, soit $A'(x)$. Le résultat obtenu à la sous-question c), $A'(x) = x^2 + 1$, est donc géométriquement plausible.

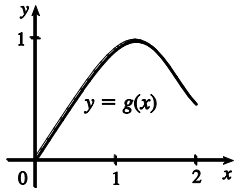
3. a) $f(x) = \cos(x^2)$



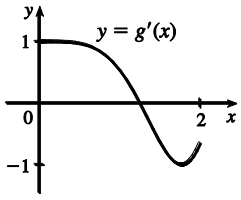
b) La fonction $g(x)$ commence à décroître à la valeur de x où cos (t^2) change de positive à négative, c'est-à-dire lorsque $x = 1{,}25$ environ.

 © Groupe Modulo inc., 2013

c) $g(x) = \int_0^x \cos(t^2)\, dt$. À l'aide d'une commande d'intégration, nous trouvons que $g(0) = 0$, $g(0{,}2) \approx 0{,}200$, $g(0{,}4) \approx 0{,}399$, $g(0{,}6) \approx 0{,}592$, $g(0{,}8) \approx 0{,}768$, $g(1{,}0) \approx 0{,}905$, $g(1{,}2) \approx 0{,}974$, $g(1{,}4) \approx 0{,}950$, $g(1{,}6) \approx 0{,}826$, $g(1{,}8) \approx 0{,}635$ et $g(2{,}0) \approx 0{,}461$.



d) Nous construisons le graphique de g'. Comme les graphiques de $g'(x)$ et de $f(x)$ sont semblables, nous supposons que $g'(x) = f(x)$.



4. Nous avons démontré aux problèmes 1 et 2 que si $g(x) = \int_a^x f(t)\, dt$, alors $g'(x) = f(x)$, pour les fonctions $f(t) = 2t + 1$ et $f(t) = 1 + t^2$. Au problème 3, nous avons supposé que cela est vrai également pour $f(t) = \cos(t^2)$, en nous appuyant sur des preuves visuelles. Nous présumons donc que $g'(x) = f(x)$ pour toute fonction continue f. Ceci est en fait vrai, et est prouvé à la section 1.5 (Le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral).

 © Groupe Modulo inc., 2013

1.5 Le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral

1. Un procédé défait ce que fait l'autre procédé. Le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral donne l'énoncé rigoureux de cette affirmation. Veuillez vous référer à l'énoncé de ce théorème et au paragraphe subséquent à la page 50.

2. a) $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, donc $g(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0$.

$g(1) = \int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1$ [aire du triangle] $= \frac{1}{2}$.

$g(2) = \int_0^2 f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^2 f(t)\,dt$ [sous l'axe des x]
$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 0.$

$g(3) = g(2) + \int_2^3 f(t)\,dt = 0 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = -\frac{1}{2}$.

$g(4) = g(3) + \int_3^4 f(t)\,dt = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 0$.

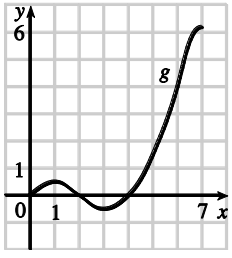
$g(5) = g(4) + \int_4^5 f(t)\,dt = 0 + 1{,}5 = 1{,}5$.

$g(6) = g(5) + \int_5^6 f(t)\,dt = 1{,}5 + 2{,}5 = 4$.

b) $g(7) = g(6) + \int_6^7 f(t)dt \approx 4 + 2{,}2$ [approximation à partir du graphique] = 6,2.

c) Les réponses aux sous-questions a) et b) indiquent que la fonction *g* atteint un minimum lorsque $x = 3$ et un maximum lorsque $x = 7$. Si nous nous reportons au graphique de la fonction *f,* nous voyons que ceci est raisonnable puisque nous soustrayons l'aire sur l'intervalle $1 < x < 3$ et ajoutons celle sur l'intervalle $3 < x < 7$.

d)



3. a) $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

$g(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0$

$g(1) = \int_0^1 f(t)\,dt = 1 \cdot 2 = 2$ [rectangle],

 © Groupe Modulo inc., 2013

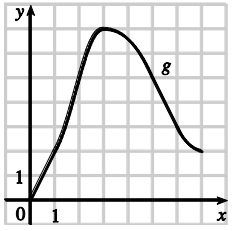
$$g(2) = \int_0^2 f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt + \int_1^2 f(t)dt = g(1) + \int_1^2 f(t)dt$$
$$= 2 + 1 \cdot 2 + \tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 5 \quad \text{[rectangle plus triangle]},$$

$$g(3) = \int_0^3 f(t)dt = g(2) + \int_2^3 f(t)dt = 5 + \tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 = 7\,,$$

$$g(6) = g(3) + \int_3^6 f(t)dt \quad \text{[l'intégrale est négative puisque la fonction } f \text{ est située sous l'axe des } x\text{]}$$
$$= 7 + \left[-\tfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2\right] = 7 - 4 = 3$$

b) La fonction g est croissante sur]0, 3[parce que, à mesure que x augmente de 0 à 3, nous ajoutons des aires.

c) La fonction g atteint un maximum lorsque nous commençons à soustraire des aires, c'est-à-dire, lorsque $x = 3$.

d) 

4. a) $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, donc $g(0) = 0$ puisque les bornes d'intégration sont égales et $g(6) = 0$ puisque les aires situées au-dessus et au-dessous de l'axe des x ont la même valeur.

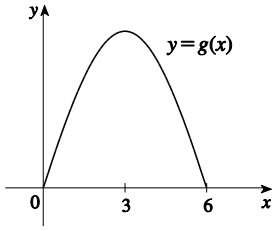
b) $g(1)$ est l'aire de la région sous la courbe de 0 à 1, qui comprend deux carrés-unités et de 80 % à 90 % d'un troisième carré-unité, donc $g(1) \approx 2{,}8$. D'une façon similaire, $g(2) \approx 4{,}9$ et $g(3) \approx 5{,}7$.

Comme $g(3) - g(2) \approx 0{,}8$, $g(4) \approx g(3) - 0{,}8 \approx 4{,}9$ en raison de la symétrie de la fonction f autour de $x = 3$. De la même façon, $g(5) \approx 2{,}8$.

c) À mesure que x augmente de 0 à 3, nous ajoutons des aires, ce qui fait que la fonction g est croissante sur]0, 3[.

d) La fonction g est croissante sur]0, 3[et est décroissante sur]3, 6[[où nous soustrayons des aires], donc la fonction g atteint un maximum à $x = 3$.

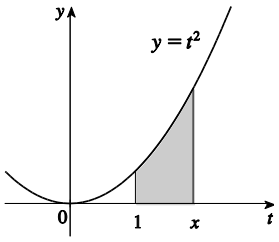
e) Un graphique de la fonction g doit montrer un maximum en $x = 3$, être symétrique autour de $x = 3$ et montrer des valeurs zéro à $x = 0$ et $x = 6$.



f) Si nous traçons le graphique de la fonction g' à l'aide des valeurs estimées des pentes des tangentes à la courbe de la fonction g, nous obtenons un graphique semblable à celui de la fonction f (tel qu'indiqué par le TFC1).

 © Groupe Modulo inc., 2013

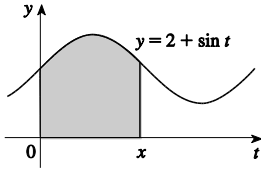
5.



a) Selon le TFC1, avec $f(t) = t^2$ et $a = 1$, $g(x) = \int_1^x t^2 dt \quad \Rightarrow \quad g'(x) = f(x) = x^2$.

b) Selon le TFC2, $g(x) = \int_1^x t^2 dt = [\frac{1}{3}t^3]_1^x = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad g'(x) = x^2$.

6.



a) Selon le TFC1, avec $f(t) = 2 + \sin t$ et $a = 0$, $g(x) = \int_0^x (2 + \sin t)\, dt \quad \Rightarrow \quad g'(x) = f(x) = 2 + \sin x$.

b) Selon le TFC2,

$$g(x) = \int_0^x (2 + \sin t) dt = [2t - \cos t]_0^x = (2x - \cos x) - (0 - 1)$$
$$= 2x - \cos x + 1 \quad \Rightarrow$$

$$g'(x) = 2 - (-\sin x) + 0 = 2 + \sin x$$

7. $f(t) = \dfrac{1}{t^3 + 1}$ et $g(x) = \int_1^x \dfrac{1}{t^3 + 1} dt$, donc, selon le TFC1, $g'(x) = f(x) = \dfrac{1}{x^3 + 1}$. Il faut noter que la borne inférieure, 1, pourrait être tout nombre réel supérieur à –1 et que la réponse serait identique.

8. $f(t) = e^{t^2 - t}$ et $g(x) = \int_3^x e^{t^2 - t} dt$, donc, selon le TFC1, $g'(x) = f(x) = e^{x^2 - x}$.

9. $f(x) = (t - t^2)^8$ et $g(s) = \int_5^s (t - t^2)^8 dt$, donc, selon le TFC1, $g'(s) = f(s) = (s - s^2)^8$.

10. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ et $g(r) = \int_0^r \sqrt{x^2 + 4}\, dx$, donc, selon le TFC1, $g'(r) = f(r) = \sqrt{r^2 + 4}$.

11. $F(x) = \int_x^\pi \sqrt{1 + \sec t}\, dt = -\int_\pi^x \sqrt{1 + \sec t}\, dt \quad \Rightarrow \quad F'(x) = -\dfrac{d}{dx}\int_\pi^x \sqrt{1 + \sec t}\, dt = -\sqrt{1 + \sec x}$

 © Groupe Modulo inc., 2013

12. $G(x)=\int_x^1 \cos\sqrt{t}\ dt=-\int_1^x \cos\sqrt{t}\ dt \quad\Rightarrow\quad G'(x)=-\dfrac{d}{dx}\int_1^x \cos\sqrt{t}\ dt=-\cos\sqrt{x}$

13. Soit $u=e^x$. Alors $\dfrac{du}{dx}=e^x$. Aussi, $\dfrac{dh}{dx}=\dfrac{dh}{du}\dfrac{du}{dx}$, donc

$$h'(x)=\frac{d}{dx}\int_1^{e^x}\ln t\ dt=\frac{d}{du}\int_1^u \ln t\ dt\cdot\frac{du}{dx}=\ln u\frac{du}{dx}=(\ln e^x)\cdot e^x=xe^x\ .$$

14. Soit $u=\sqrt{x}$. Alors $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Aussi, $\dfrac{dh}{dx}=\dfrac{dh}{du}\dfrac{du}{dx}$, donc

$$h'(x)=\frac{d}{dx}\int_1^{\sqrt{x}}\frac{z^2}{z^4+1}dz=\frac{d}{du}\int_1^u\frac{z^2}{z^4+1}dz\cdot\frac{du}{dx}=\frac{u^2}{u^4+1}\frac{du}{dx}=\frac{x}{x^2+1}\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}}{2(x^2+1)}.$$

15. Soit $u=\tan x$. Alors $\dfrac{du}{dx}=\sec^2 x$. Aussi, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$, donc

$$y'=\frac{d}{dx}\int_0^{\tan x}\sqrt{t+\sqrt{t}}\ dt=\frac{d}{du}\int_0^u\sqrt{t+\sqrt{t}}\ dt\cdot\frac{du}{dx}=\sqrt{u+\sqrt{u}}\frac{du}{dx}=\sqrt{\tan x+\sqrt{\tan x}}\sec^2 x\ .$$

16. Soit $u=x^4$. Alors $\dfrac{du}{dx}=4x^3$. Aussi, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$, donc

$$y'=\frac{d}{dx}\int_0^{x^4}\cos^2\theta\ d\theta=\frac{d}{du}\int_0^u\cos^2\theta\ d\theta\cdot\frac{du}{dx}=\cos^2 u\frac{du}{dx}=\cos^2(x^4)\cdot 4x^3\ .$$

17. Soit $w=1-3x$. Alors $\dfrac{dw}{dx}=-3$. Aussi, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dw}\dfrac{dw}{dx}$, donc

$$y'=\frac{d}{dx}\int_{1-3x}^1\frac{u^3}{1+u^2}du=\frac{d}{dw}\int_w^1\frac{u^3}{1+u^2}du\cdot\frac{dw}{dx}=-\frac{d}{dw}\int_1^w\frac{u^3}{1+u^2}du\cdot\frac{dw}{dx}=-\frac{w^3}{1+w^2}(-3)=\frac{3(1-3x)^3}{1+(1-3x)^2}$$

18. Soit $u=\sin x$. Alors $\dfrac{du}{dx}=\cos x$. Aussi, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$, donc

$$\begin{aligned}y'&=\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^1\sqrt{1+t^2}\ dt=\frac{d}{du}\int_u^1\sqrt{1+t^2}dt\cdot\frac{du}{dx}=-\frac{d}{du}\int_1^u\sqrt{1+t^2}dt\cdot\frac{du}{dx}\\&=-\sqrt{1+u^2}\cos x=-\sqrt{1+\sin^2 x}\cos x\end{aligned}$$

19. $\displaystyle\int_{-1}^2(x^3-2x)dx=\left[\frac{x^4}{4}-x^2\right]_{-1}^2=\left(\frac{2^4}{4}-2^2\right)-\left(\frac{(-1)^4}{4}-(-1)^2\right)=(4-4)-(\tfrac{1}{4}-1)=0-(-\tfrac{3}{4})=\tfrac{3}{4}$

20. $\displaystyle\int_{-1}^1 x^{100}dx=[\tfrac{1}{101}x^{101}]_{-1}^1=\tfrac{1}{101}-(-\tfrac{1}{101})=\tfrac{2}{101}$

 © Groupe Modulo inc., 2013

21. $\int_1^4 (5-2t+3t^2)dt = [5t-t^2+t^3]_1^4 = (20-16+64)-(5-1+1) = 68-5 = 63$

22. $\int_0^1 (1+\frac{1}{2}u^4-\frac{2}{5}u^9)du = [u+\frac{1}{10}u^5-\frac{1}{25}u^{10}]_0^1 = (1+\frac{1}{10}-\frac{1}{25})-0 = \frac{53}{50}$

23. $\int_1^9 \sqrt{x}\ dx = \int_1^9 x^{1/2}\ dx = \left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_1^9 = \frac{2}{3}[x^{3/2}]_1^9 = \frac{2}{3}(9^{3/2}-1^{3/2}) = \frac{2}{3}(27-1) = \frac{52}{3}$

24. $\int_1^8 x^{-2/3}dx = \left[\frac{x^{1/3}}{1/3}\right]_1^8 = 3[x^{1/3}]_1^8 = 3(8^{1/3}-1^{1/3}) = 3(2-1) = 3$

25. $\int_{\pi/6}^{\pi} \sin\theta\ d\theta = [-\cos\theta]_{\pi/6}^{\pi} = -\cos\pi-(-\cos\frac{\pi}{6}) = -(-1)-\left(-\sqrt{3}/2\right) = 1+\sqrt{3}/2$

26. $\int_{-5}^{5} e\ dx = [ex]_{-5}^{5} = 5e-(-5e) = 10e$

27. $\int_0^1 (u+2)(u-3)du = \int_0^1 (u^2-u-6)du = [\frac{1}{3}u^3-\frac{1}{2}u^2-6u]_0^1 = (\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-6)-0 = -\frac{37}{6}$

28. $\int_0^4 (4-t)\sqrt{t}\ dt = \int_0^4 (4-t)t^{1/2}\ dt = \int_0^4 (4t^{1/2}-t^{3/2})dt = \left[\frac{8}{3}t^{3/2}-\frac{2}{5}t^{5/2}\right]_0^4 = \frac{8}{3}(8)-\frac{2}{5}(32) = \frac{320-192}{15} = \frac{128}{15}$

29. $\int_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}}dx = \int_1^9 \left(\frac{x}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \int_1^9 (x^{1/2}-x^{-1/2})dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}-2x^{1/2}\right]_1^9$
$= (\frac{2}{3}\cdot 27-2\cdot 3)-(\frac{2}{3}-2) = 12-(-\frac{4}{3}) = \frac{40}{3}$

30. $\int_0^2 (y-1)(2y+1)dy = \int_0^2 (2y^2-y-1)dy = [\frac{2}{3}y^3-\frac{1}{2}y^2-y]_0^2 = (\frac{16}{3}-2-2)-0 = \frac{4}{3}$

31. $\int_0^{\pi/4} \sec^2 t\ dt = [\tan t]_0^{\pi/4} = \tan\frac{\pi}{4}-\tan 0 = 1-0 = 1$

32. $\int_0^{\pi/4} \sec\theta\tan\theta\ d\theta = [\sec\theta]_0^{\pi/4} = \sec\frac{\pi}{4}-\sec 0 = \sqrt{2}-1$

33. $\int_1^2 (1+2y)^2 dy = \int_1^2 (1+4y+4y^2)dy = [y+2y^2+\frac{4}{3}y^3]_1^2 = (2+8+\frac{32}{3})-(1+2+\frac{4}{3}) = \frac{62}{3}-\frac{13}{3} = \frac{49}{3}$

34. $\int_0^3 (2\sin x-e^x)dx - [-2\cos x-e^x]_0^3 = (-2\cos 3-e^3)-(-2-1) = 3-2\cos 3-e^3$

35. $\int_1^2 \frac{v^3+3v^6}{v^4} = \int_1^2 \left(\frac{1}{v}+3v^2\right)dv = [\ln|v|+v^3]_1^2 = (\ln 2+8)-(\ln 1+1) = \ln 2+7$

 © Groupe Modulo inc., 2013

36. $\int_1^{18} \sqrt{\frac{3}{z}}\,dz = \int_1^{18} \sqrt{3} z^{-1/2}\,dz = \sqrt{3}[2z^{1/2}]_1^{18} = 2\sqrt{3}(18^{1/2} - 1^{1/2}) = 2\sqrt{3}\left(3\sqrt{2} - 1\right)$

37. $\int_0^1 (x^e + e^x)dx = \left[\frac{x^{e+1}}{e+1} + e^x\right]_0^1 = \left(\frac{1}{e+1} + e\right) - (0+1) = \frac{1}{e+1} + e - 1$

38. $\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{8}{1+x^2}\,dx = \left[8 \arctan x\right]_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = 8\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = 8\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{4\pi}{3}$

39. $\int_1^2 \frac{4+u^2}{u^3}\,du = \int_1^2 (4u^{-3} + u^{-1})du = \left[\frac{4}{-2}u^{-2} + \ln|u|\right]_1^2 = \left[\frac{-2}{u^2} + \ln u\right]_1^2 = (-\frac{1}{2} + \ln 2) - (-2 + \ln 1) = \frac{3}{2} + \ln 2$

40. $\int_{-1}^1 e^{u+1}du = [e^{u+1}]_{-1}^1 = e^2 - e^0 = e^2 - 1$ [ou bien utilisez d'abord $e^{u+1} = e^u e^1$]

41. $\int_{1/2}^{1/\sqrt{2}} \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left[4 \arcsin x\right]_{1/2}^{1/\sqrt{2}} = 4\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = 4\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{3}$

42. Si $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } 0 \le x < \pi/2 \\ \cos x & \text{si } \pi/2 \le x \le \pi \end{cases}$, alors

$$\int_0^{\pi} f(x)dx = \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x\,dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} + [\sin x]_{\pi/2}^{\pi} = -\cos\tfrac{\pi}{2} + \cos 0 + \sin\pi - \sin\tfrac{\pi}{2}$$
$$= -0 + 1 + 0 - 1 = 0$$

Selon le théorème 3 à la section 1.4, la fonction f est intégrable.

43. Si $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } -2 \le x \le 0 \\ 4 - x^2 & \text{si } 0 < x \le 2 \end{cases}$, alors

$$\int_{-2}^2 f(x)dx = \int_{-2}^0 2\,dx + \int_0^2 (4 - x^2)dx = [2x]_{-2}^0 + [4x - \tfrac{1}{3}x^3]_0^2 = [0 - (-4)] + (\tfrac{16}{3} - 0) = \tfrac{28}{3}$$

Selon le théorème 3 à la section 1.4, la fonction f est intégrable.

44. La fonction $f(x) = x^{-4}$ n'est pas continue sur l'intervalle [–2, 1]; on ne peut pas donc appliquer le TFC2.

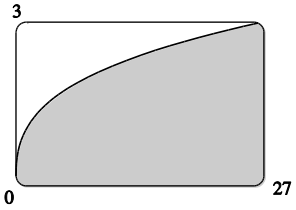
45. La fonction $f(x) = \frac{4}{x^3}$ n'est pas continue sur l'intervalle [–1, 2]; on ne peut donc pas appliquer le TFC2.

46. La fonction $f(\theta) = \sec\theta \tan\theta$ n'est pas continue sur l'intervalle $[\pi/3, \pi]$; on ne peut donc pas appliquer le TFC2.

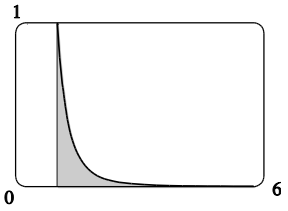
47. La fonction $f(x) = \sec^2 x$ n'est pas continue sur l'intervalle $[0, \pi]$; on ne peut donc pas appliquer le TFC2.

 © Groupe Modulo inc., 2013

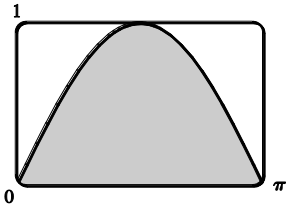
48. Selon le graphique, il semble que l'aire soit d'environ 60. L'aire exacte est $\int_0^{27} x^{1/3}dx = \left[\frac{3}{4}x^{4/3}\right]_0^{27} = \frac{3}{4}\cdot 81 - 0 = \frac{243}{4} = 60,75$. Ceci représente les trois-quarts de l'aire du rectangle.



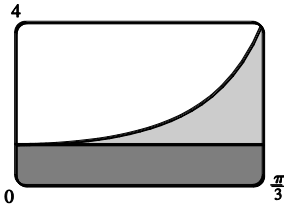
49. Selon le graphique, il semble que l'aire soit d'environ $\frac{1}{3}$. L'aire exacte est $\int_1^6 x^{-4}dx = \left[\frac{x^{-3}}{-3}\right]_1^6 = \left[\frac{-1}{3x^3}\right]_1^6 = -\frac{1}{3\cdot 216} + \frac{1}{3} = \frac{215}{648} \approx 0,3318$.



50. Il semble que l'aire sous la courbe représente environ les deux-tiers de l'aire du rectangle, soit environ $\frac{2}{3}\pi \approx 2,1$. L'aire exacte est $\int_0^{\pi} \sin x\ dx = [-\cos x]_0^{\pi} = (-\cos\pi) - (-\cos 0) = -(-1) + 1 = 2$.

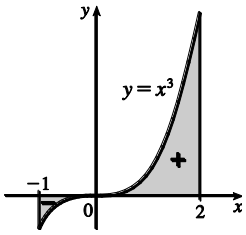


51. Si nous divisons la région telle que montrée au graphique, nous estimons que l'aire sous la courbe soitapproximativement $\frac{\pi}{3} + \frac{1}{4}(3\cdot\frac{\pi}{3}) \approx 1,8$. L'aire exacte est $\int_0^{\pi/3} \sec^2 x\ dx = [\tan x]_0^{\pi/3} = \sqrt{3} - 0 = \sqrt{3} \approx 1,73$.

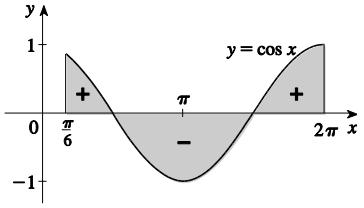


52. $\int_{-1}^{2} x^3 dx = [\frac{1}{4}x^4]_{-1}^{2} = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4} = 3,75$

 © Groupe Modulo inc., 2013



53. $\int_{\pi/6}^{2\pi} \cos x \, dx = [\sin x]_{\pi/6}^{2\pi} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$



54. $g(x) = \int_{2x}^{3x} \frac{u^2-1}{u^2+1} du = \int_{2x}^{0} \frac{u^2-1}{u^2+1} du + \int_{0}^{3x} \frac{u^2-1}{u^2+1} du = -\int_{0}^{2x} \frac{u^2-1}{u^2+1} du + \int_{0}^{3x} \frac{u^2-1}{u^2+1} du \quad \Rightarrow$

$$g'(x) = -\frac{(2x)^2-1}{(2x)^2+1} \cdot \frac{d}{dx}(2x) + \frac{(3x)^2-1}{(3x)^2+1} \cdot \frac{d}{dx}(3x) = -2 \cdot \frac{4x^2-1}{4x^2+1} + 3 \cdot \frac{9x^2-1}{9x^2+1}$$

55. $g(x) = \int_{1-2x}^{1+2x} t \sin t \, dt = \int_{1-2x}^{0} t \sin t \, dt + \int_{0}^{1+2x} t \sin t \, dt = -\int_{0}^{1-2x} t \sin t \, dt + \int_{0}^{1+2x} t \sin t \, dt \quad \Rightarrow$

$$\begin{aligned} g'(x) &= -(1-2x)\sin(1-2x) \cdot \frac{d}{dx}(1-2x) + (1+2x)\sin(1+2x) \cdot \frac{d}{dx}(1+2x) \\ &= 2(1-2x)\sin(1-2x) + 2(1+2x)\sin(1+2x) \end{aligned}$$

56. $F(x) = \int_{x}^{x^2} e^{t^2} \, dt = \int_{x}^{0} e^{t^2} \, dt + \int_{0}^{x^2} e^{t^2} \, dt = -\int_{0}^{x} e^{t^2} \, dt + \int_{0}^{x^2} e^{t^2} \, dt \quad \Rightarrow$

$$F'(x) = -e^{x^2} + e^{(x^2)^2} \cdot \frac{d}{dx}(x^2) = -e^{x^2} + 2xe^{x^4}$$

57. $F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{2x} \arctan t \, dt = \int_{\sqrt{x}}^{0} \arctan t \, dt + \int_{0}^{2x} \arctan t \, dt = -\int_{0}^{\sqrt{x}} \arctan t \, dt + \int_{0}^{2x} \arctan t \, dt \quad \Rightarrow$

$$F'(x) = -\arctan\sqrt{x} \cdot \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) + \arctan 2x \cdot \frac{d}{dx}(2x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \arctan\sqrt{x} + 2\arctan 2x$$

58. $y = \int_{\cos x}^{\sin x} \ln(1+2v) dv = \int_{\cos x}^{0} \ln(1+2v) dv + \int_{0}^{\sin x} \ln(1+2v) dv$

$$= -\int_{0}^{\cos x} \ln(1+2v) dv + \int_{0}^{\sin x} \ln(1+2v) dv \quad \Rightarrow$$

$$y' = -\ln(1+2\cos x) \cdot \frac{d}{dx}\cos x + \ln(1+2\sin x) \cdot \frac{d}{dx}\sin x = \sin x \ln(1+2\cos x) + \cos x \ln(1+2\sin x)$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

59. La fonction $f(x)=\int_0^x (1-t^2)e^{t^2}\,dt$ est croissante lorsque la fonction $f'(x)=(1-x^2)e^{x^2}$ est positive.

Comme $e^{x^2}>0$, $f'(x)>0 \;\Leftrightarrow\; 1-x^2>0 \;\Leftrightarrow\; |x|<1$, donc la fonction f est croissante sur]–1, 1[.

60. $y=\int_0^x \frac{t^2}{t^2+t+2}\,dt \;\Rightarrow\; y'=\frac{x^2}{x^2+x+2} \;\Rightarrow$

$y''=\frac{(x^2+x+2)(2x)-x^2(2x+1)}{(x^2+x+2)^2}=\frac{2x^3+2x^2+4x-2x^3-x^2}{(x^2+x+2)^2}=\frac{x^2+4x}{(x^2+x+2)^2}=\frac{x(x+4)}{(x^2+x+2)^2}$. La courbe y est concave vers le bas lorsque $y''<0$, c'est-à-dire sur]–4, 0[.

61. $g(y)=\int_3^y f(x)dx \;\Rightarrow\; g'(y)=f(y)$. Comme $f(x)=\int_0^{\sin x}\sqrt{1+t^2}\,dt$, $g''(y)=f'(y)=\sqrt{1+\sin^2 y}\cdot\cos y$, donc

$g''(\frac{\pi}{6})=\sqrt{1+\sin^2(\frac{\pi}{6})}\cdot\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{1+(\frac{1}{2})^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{15}}{2}$.

62. Selon le TFC2, $\int_1^4 f'(x)dx=f(4)-f(1)$, donc $17=f(4)-12 \;\Rightarrow\; f(4)=17+12=29$.

63. a) $\operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt \;\Rightarrow\; \int_0^x e^{-t^2}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erf}(x)$. Selon la propriété 5 des intégrales définies qui est donnée à la section 1.4,

$\int_0^b e^{-t^2}\,dt=\int_0^a e^{-t^2}\,dt+\int_a^b e^{-t^2}\,dt$, donc $\int_a^b e^{-t^2}\,dt=\int_0^b e^{-t^2}\,dt-\int_0^a e^{-t^2}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erf}(b)-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erf}(a)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}[\operatorname{erf}(b)-\operatorname{erf}(a)]$.

b) $y=e^{x^2}\operatorname{erf}(x) \;\Rightarrow\; y'=2xe^{x^2}\operatorname{erf}(x)+e^{x^2}\operatorname{erf}'(x)=2xy+e^{x^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$ [selon TFC1] $=2xy+\frac{2}{\sqrt{\pi}}$.

64. a) La fonction de Fresnel $S(x)=\int_0^x \sin(\frac{\pi}{2}t^2)dt$ atteint des maxima locaux lorsque $0=S'(x)=\sin(\frac{\pi}{2}t^2)$ et la valeur de S' change de positive à négative. Pour $x>0$, cela se produit lorsque

$\frac{\pi}{2}x^2=(2n-1)\pi$ [multiples impairs de π] $\Leftrightarrow\; x^2=2(2n-1) \;\Leftrightarrow\; x=\sqrt{4n-2}$, n étant tout entier naturel. Pour $x<0$, la valeur de S' change de positive à négative lorsque $\frac{\pi}{2}x^2=2n\pi$ [multiples pairs de π] $\Leftrightarrow\; x^2=4n \;\Leftrightarrow\; x=-2\sqrt{n}$. Le signe de S' ne change pas lorsque $x=0$.

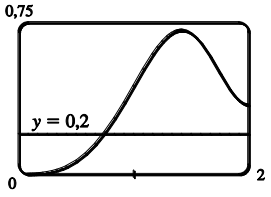
b) La fonction S est concave vers le haut sur les intervalles où $S''(x)>0$. Si nous prenons la dérivée de l'expression pour $S'(x)$, nous obtenons $S''(x)=\cos(\frac{\pi}{2}x^2)(2\frac{\pi}{2}x)=\pi x\cos(\frac{\pi}{2}x^2)$. Pour $x>0$, $S''(x)>0$ où $\cos(\frac{\pi}{2}x^2)>0 \;\Leftrightarrow\; 0<\frac{\pi}{2}x^2<\frac{\pi}{2}$ ou $(2n-\frac{1}{2})\pi<\frac{\pi}{2}x^2<(2n+\frac{1}{2})\pi$, n étant tout nombre entier $\;\Leftrightarrow\; 0<x<1$ ou $\sqrt{4n-1}<x<\sqrt{4n+1}$, n étant tout entier naturel. Pour $x<0$, $S''(x)>0$ où $\cos(\frac{\pi}{2}x^2)<0 \;\Leftrightarrow\; (2n-\frac{3}{2})\pi<\frac{\pi}{2}x^2<(2n-\frac{1}{2})\pi$, n étant tout nombre entier

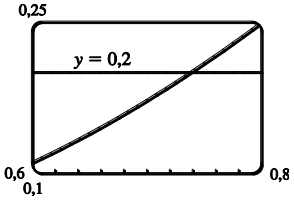
$\Leftrightarrow\; 4n-3<x^2<4n-1 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{4n-3}<|x|<\sqrt{4n-1} \;\Rightarrow\; \sqrt{4n-3}<-x<\sqrt{4n-1} \;\Rightarrow\; -\sqrt{4n-3}>x>-\sqrt{4n-1}$. Il

 © Groupe Modulo inc., 2013

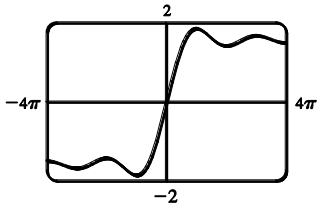
s'ensuit que les intervalles de concavité vers le haut pour $x < 0$ sont $]-\sqrt{4n-1}, -\sqrt{4n-3}[$, n étant tout entier naturel. En résumé, la fonction S est concave vers le haut sur les intervalles $]0, 1[$, $\left]-\sqrt{3}, -1\right[$, $\left]\sqrt{3}, \sqrt{5}\right[$, $\left]-\sqrt{7}, -\sqrt{5}\right[$, $\left]\sqrt{7}, 3\right[$,….

c) Si vous utilisez Maple, employez la commande plot ({int (sin (Pi*t^2/2),t=0..x), 0.2}, x=0..2);. Le logiciel Maple dispose à son lancement la fonction de Fresnel. La commande est FresnelS (x) : plot(FresnelS(x), x=0..2). Si vous utilisez Mathematica, employez Plot [{Integrate [Sin [Pi*t^2/2], {t,0,x}], 0.2}, {x,0,2}]. Avec Derive, il faut charger le fichier d'utilitaire (l'extension) FRESNEL et utiliser la commande plot FRESNEL_SIN(x). Les graphiques suivants démontrent que $\int_0^x \sin(\frac{\pi}{2}t^2)dt = 0,2$ en $x \approx 0,74$.





65. a) Si vous utilisez Maple, vous devez tout d'abord entrer la commande si:=int (sin(t)/t, t=0..x);. Si vous utilisez Mathematica, la commande à employer est si=Integrate [Sin[t]/t, {t,0,x}]. Il faut noter que les deux logiciels disposent de cette fonction; le logiciel Maple l'appelle Si(x) alors que Mathematica la nomme SinIntegral[x]. Avec Maple, la commande qui génère le graphique est plot (si, x=-4*Pi..4*Pi);. Avec Mathematica, elle est Plot [si,{x, -4*Pi, 4*Pi}]. Avec Derive, il faut charger le fichier d'utilitaire EXP_INT et utiliser la commande plot SI(x).



b) La fonction Si(x) atteint des maxima locaux lorsque la valeur de Si′(x) change de positive à négative, en passant par 0. Puisque, selon le théorème fondamental, $\text{Si}'(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\sin x}{x}$, la fonction doit atteindre un maximum lorsque $\sin x = 0$. Pour $x > 0$, la fonction doit atteindre un maximum lorsque $x = (2n - 1)\pi$, n étant tout entier naturel, si la valeur de Si′ change de positive à négative à x. Pour $x < 0$, la fonction doit atteindre un maximum lorsque $x = 2n\pi$, n étant tout entier naturel, puisque le dénominateur de Si′(x) est négatif pour $x < 0$. Il s'ensuit que les maxima locaux se produisent lorsque $x = \pi, -2\pi, 3\pi, -4\pi, 5\pi, -6\pi$,….

c) Pour trouver le premier point d'inflexion, nous trouvons la valeur de $\text{Si}''(x) = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} = 0$. Nous pouvons constater sur le graphique que le premier point d'inflexion se situe entre $x = 3$ et $x = 5$. À l'aide d'un logiciel permettant d'extraire les racines,

 © Groupe Modulo inc., 2013

nous obtenons la valeur $x \approx 4{,}493\ 4$. Pour trouver l'ordonnée du point d'inflexion, nous calculons $\text{Si}(4{,}493\ 4) \approx 1{,}655\ 6$. Les coordonnées du premier point d'inflexion à la droite de l'origine sont donc environ (4,493 4; 1,655 6). Une autre méthode consiste à tracer le graphique de la fonction $S''(x)$ et à estimer la première valeur positive de x à laquelle la valeur de la fonction change de positive à négative ou l'inverse.

d) Selon le graphique, il semble que la fonction admet des asymptotes horizontales à $y \approx 1{,}5$, avec des bornes respectives de $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \text{Si}(x) \approx \pm 1{,}5$. Si nous utilisons la commande de calcul d'une limite, nous obtenons $\lim\limits_{x \to \infty} \text{Si}(x) = -\frac{\pi}{2}$. Comme $\text{Si}(x)$ est une fonction impaire, $\lim\limits_{x \to -\infty} \text{Si}(x) = -\frac{\pi}{2}$. La fonction $\text{Si}(x)$ admet donc des asymptotes horizontales d'équations $y = \pm\frac{\pi}{2}$.

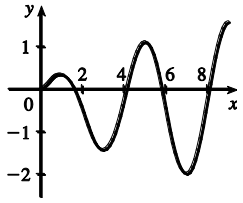
e) Nous utilisons la commande fsolve du logiciel Maple (ou la commande FindRoot de Mathematica) et trouvons que la solution est $x \approx 1{,}1$. Comme dans la question 65 c), nous pouvons également tracer les courbes des fonctions $y = \text{Si}(x)$ et $y = 1$ dans le même graphique afin de trouver le point où elles se croisent.

66. a) Selon le TFC1, $g'(x) = f(x)$. Donc, $g'(x) = f(x) = 0$ à $x = 1$, 3, 5, 7 et 9. La fonction g atteint des maxima locaux à $x = 1$ et 5 (puisque la valeur de $f = g'$ change de positive à négative à ces endroits) et des minima locaux à $x = 3$ et 7. La fonction n'atteint pas de maximum ou de minimum local à $x = 9$, puisque la fonction f n'est pas définie pour $x > 9$.

b) Le graphique montre que $\left|\int_0^1 f\ dt\right| < \left|\int_1^3 f\ dt\right| < \left|\int_3^5 f\ dt\right| < \left|\int_5^7 f\ dt\right| < \left|\int_7^9 f\ dt\right|$. Donc, $g(1) = \left|\int_0^1 f\ dt\right|$, $g(5) = \int_0^5 f\ dt = g(1) - \left|\int_1^3 f\ dt\right| + \left|\int_3^5 f\ dt\right|$ et $g(9) = \int_0^9 f\ dt = g(5) - \left|\int_5^7 f\ dt\right| + \left|\int_7^9 f\ dt\right|$. Il s'ensuit que $g(1) < g(5) < g(9)$ et la fonction $g(x)$ atteint un maximum absolu à $x = 9$.

c) La fonction g est concave vers le bas sur les intervalles où $g'' < 0$. Cependant, $g'(x) = f(x)$, donc $g''(x) = f'(x)$, qui est négative sur les intervalles approximatifs $\left]\frac{1}{2}, 2\right[$,]4, 6[et]8, 9[. La fonction g est donc concave vers le bas sur ces intervalles.

d)



67. a) Selon le TFC1, $g'(x) = f(x)$. Donc, $g'(x) = f(x) = 0$ à $x = 2$, 4, 6, 8 et 10. La fonction g atteint des maxima locaux à $x = 2$ et 6 (puisque la valeur de $f = g'$ change de positive à négative à ces endroits) et des minima locaux à $x = 4$ et 8. La fonction n'atteint pas de maximum ou de minimum local à $x = 10$, puisque la fonction f n'est pas définie pour $x > 10$.

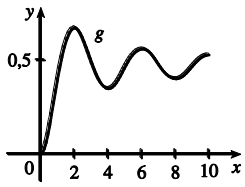
 © Groupe Modulo inc., 2013

b) Le graphique montre que $\left|\int_0^2 f\ dt\right| > \left|\int_2^4 f\ dt\right| > \left|\int_4^6 f\ dt\right| > \left|\int_6^8 f\ dt\right| > \left|\int_8^{10} f\ dt\right|$. Donc, $g(2) = \left|\int_0^2 f\ dt\right|$,

$g(6) = \int_0^6 f\ dt = g(2) - \left|\int_2^4 f\ dt\right| + \left|\int_4^6 f\ dt\right|$ et $g(10) = \int_0^{10} f\ dt = g(6) - \left|\int_6^8 f\ dt\right| + \left|\int_8^{10} f\ dt\right|$. Il s'ensuit que $g(2) > g(6) > g(10)$ et la fonction $g(x)$ atteint un maximum absolu à $x = 2$.

c) La fonction g est concave vers le bas sur les intervalles où $g'' < 0$. Cependant, $g'(x) = f(x)$, donc $g''(x) = f'(x)$, qui est négative sur les intervalles]1, 3[,]5, 7[et]9, 10[. La fonction g est donc concave vers le bas sur ces intervalles.

d)



68. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{i^3}{n^4} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-0}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^3 = \int_0^1 x^3\ dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$

69. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-0}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}} = \int_0^1 \sqrt{x}\ dx = \left[\frac{2x^{3/2}}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3}$

70. Supposons que $h < 0$. Puisque la fonction f est continue sur l'intervalle $[x + h, x]$, il découle du théorème des valeurs extrêmes qu'il existe dans $[x,\ x + h]$ des nombres u et v tels que $f(u) = m$ et $f(v) = M$ où m et M sont respectivement le minimum et le maximum absolus de f sur $[x,\ x + h]$. Selon la propriété 8 des intégrales, $m(-h) \le \int_{x+h}^{x} f(t)dt \le M(-h)$, c'est-à-dire $f(u)(-h) \le -\int_x^{x+h} f(t)dt \le f(v)(-h)$. Comme $-h > 0$, nous pouvons diviser cette inégalité par $-h$: $f(u) \le \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \le f(v)$.

Selon l'égalité 2, $\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\ dt$ pour $h \neq 0$, et il s'ensuit que $f(u) \le \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \le f(v)$, qui sont les inégalités 3 lorsque $h < 0$.

71.
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\ dt &= \frac{d}{dx}\left[\int_{g(x)}^{a} f(t)dt + \int_a^{h(x)} f(t)\ dt\right] \quad [\text{où } a \text{ fait partie du domaine de } f]\\ &= \frac{d}{dx}\left[-\int_a^{g(x)} f(t)\ dt\right] + \frac{d}{dx}\left[\int_a^{h(x)} f(t)\ dt\right] = -f(g(x))g'(x) + f(g(x))\ h'(x)\\ &= f(h(x))\ h'(x) - f(g(x))\ g'(x)\end{aligned}$$

72. a) Soit $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = 1/\left(2\sqrt{x}\right) > 0$ pour $x > 0 \Rightarrow f$ est croissante sur]0, ∞[. Si $x \ge 0$, alors $x^3 \ge 0$, donc $1 + x^3 \ge 1$ et, comme la fonction f est croissante, cela signifie que $f(1 + x^3) \ge f(1) \Rightarrow \sqrt{1 + x^3} \ge 1$ pour $x \ge 0$. Ensuite, soit

 © Groupe Modulo inc., 2013

$g(t) = t^2 - t \;\Rightarrow\; g'(t) = 2t - 1 \;\Rightarrow\; g'(t) > 0$ lorsque $t \geq 1$. Ainsi, la fonction g est croissante sur $]1, \infty[$. Et puisque $g(1) = 0$,

$g(t) \geq 0$ lorsque $t \geq 1$. Finalement, soit $t = \sqrt{1+x^3}$, lorsque $x \geq 0$. $\sqrt{1+x^3} \geq 1$ (voir plus haut)

$\Rightarrow\; t \geq 1 \;\Rightarrow\; g(t) \geq 0 \;\Rightarrow\; (1+x^3) - \sqrt{1+x^3} \geq 0$ pour $x \geq 0$. Par conséquent, $1 \leq \sqrt{1+x^3} \leq 1 + x^3$ pour $x \geq 0$.

b) Selon la sous-question a) et la propriété 7, $\int_0^1 1\,dx \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^3}\,dx \leq \int_0^1 (1+x^3)\,dx \;\Leftrightarrow$

$[x]_0^1 \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^3}\,dx \leq [x + \frac{1}{4}x^4]_0^1 \;\Leftrightarrow\; 1 \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^3}\,dx \leq 1 + \frac{1}{4} = 1{,}25$.

73. a) Pour $0 \leq x \leq 1$, nous avons $x^2 \leq x$. Puisque la fonction $f(x) = \cos x$ est décroissante sur $]0, 1[$, $\cos(x^2) \geq \cos x$.

b) $\pi/6 < 1$, donc selon la sous-question a), $\cos(x^2) \geq \cos x$ sur $]0, \pi/6[$. Il s'ensuit

que $\int_0^{\pi/6} \cos(x^2)\,dx \geq \int_0^{\pi/6} \cos x\,dx = [\sin x]_0^{\pi/6} = \sin(\pi/6) - \sin 0 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$.

74. $0 < \dfrac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} < \dfrac{x^2}{x^4} = \dfrac{1}{x^2}$ sur $]5, 10[$, donc

$$0 \leq \int_5^{10} \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}\,dx < \int_5^{10} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_5^{10} = -\frac{1}{10} - \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{10} = 0{,}1.$$

75. a) Si $x < 0$, alors $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x 0\,dt = 0$.

Si $0 \leq x \leq 1$, alors $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x t\,dt = [\frac{1}{2}t^2]_0^x = \frac{1}{2}x^2$.

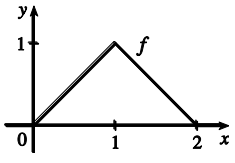
Si $1 < x \leq 2$, alors

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt + \int_1^x f(t)dt = g(1) + \int_1^x (2-t)dt$$
$$= \tfrac{1}{2}(1)^2 + [2t - \tfrac{1}{2}t^2]_1^x = \tfrac{1}{2} + (2x - \tfrac{1}{2}x^2) - (2 - \tfrac{1}{2}) = 2x - \tfrac{1}{2}x^2 - 1.$$

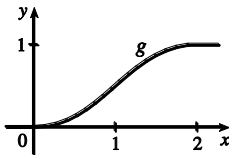
Si $x > 2$, alors $g(x) = \int_0^x f(t)dt = g(2) + \int_2^x 0\,dt = 1 + 0 = 1$. Donc,

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x - \frac{1}{2}x^2 - 1 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

b)



 © Groupe Modulo inc., 2013



c) La fonction f n'est pas dérivable lorsqu'elle forme un « coin » en $x = 0$, 1 et 2. La fonction f est dérivable sur $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$, $]1, 2[$ et $]2, \infty[$. La fonction g est dérivable sur $]-\infty, \infty[$.

76. Selon le TFC1, nous prenons la dérivée des deux côtés de $6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2}dt = 2\sqrt{x}$ afin d'obtenir $\frac{f(x)}{x^2} = 2\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f(x) = x^{3/2}$. Pour trouver a, nous substituons $x = a$ dans l'équation originale pour obtenir $6 + \int_a^a \frac{f(t)}{t^2}dt = 2\sqrt{a} \Rightarrow 6 + 0 = 2\sqrt{a} \Rightarrow 3 = \sqrt{a} \Rightarrow a = 9$.

77. $B = 3A \Rightarrow \int_0^b e^x\,dx = 3\int_0^a e^x\,dx \Rightarrow [e^x]_0^b = 3[e^x]_0^a \Rightarrow e^b - 1 = 3(e^a - 1) \Rightarrow e^b = 3e^a - 2 \Rightarrow b = \ln(3e^a - 2)$

78. a) Soit $F(t) = \int_0^t f(s)\,ds$. Alors, selon le TFC1, $F'(t) = f(t)$ = taux de dépréciation, donc $F(t)$ représente la perte de valeur sur l'intervalle $[0, t]$.

b) La fonction $C(t) = \frac{1}{t}\left[A + \int_0^t f(s)ds\right] = \frac{A + F(t)}{t}$ représente la dépense moyenne par unité de t durant l'intervalle $[0, t]$, en supposant qu'il n'y a eu qu'une seule révision pendant cette période. L'entreprise désire réduire au maximum la dépense moyenne.

c) $C(t) = \frac{1}{t}\left[A + \int_0^t f(s)ds\right]$. Selon le TFC1, nous avons $C'(t) = -\frac{1}{t^2}\left[A + \int_0^t f(s)\,ds\right] + \frac{1}{t}f(t)$.

$C'(t) = 0 \Rightarrow t\,f(t) = A + \int_0^t f(s)\,ds \Rightarrow f(t) = \frac{1}{t}\left[A + \int_0^t f(s)\,ds\right] = C(t)$.

79. a) $C(t) = \frac{1}{t}\int_0^t [f(s) + g(s)]\,ds$. Selon le TFC1 et la règle de la dérivée d'un produit, nous avons $C'(t) = \frac{1}{t}[f(t) + g(t)] - \frac{1}{t^2}\int_0^t [f(s) + g(s)]\,ds$. Soit $C'(t) = 0$;

$\frac{1}{t}[f(t) + g(t)] - \frac{1}{t^2}\int_0^t [f(s) + g(s)]\,ds = 0 \Rightarrow [f(t) + g(t)] - \frac{1}{t}\int_0^t [f(s) + g(s)]\,ds = 0 \Rightarrow$

$[f(t) + g(t)] - C(t) = 0 \Rightarrow C(t) = f(t) + g(t)$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

b) Pour $0 \le t \le 30$, nous avons $D(t) = \int_0^t \left(\frac{V}{15} - \frac{V}{450} s \right) ds = \left[\frac{V}{15} s - \frac{V}{900} s^2 \right]_0^t = \frac{V}{15} t - \frac{V}{900} t^2$.

Donc, $D(t) = V \Rightarrow \frac{V}{15} - \frac{V}{900} t^2 = V \Rightarrow 60t - t^2 = 900 \Rightarrow t^2 - 60t + 900 = 0 \Rightarrow (t-30)^2 = 0 \Rightarrow t = 30$. Le temps requis T est donc 30 mois.

c) $C(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \left(\frac{V}{15} - \frac{V}{450} s + \frac{V}{12\,900} s^2 \right) ds = \frac{1}{t} \left[\frac{V}{15} s - \frac{V}{900} s^2 + \frac{V}{38\,700} s^3 \right]_0^t$

$= \frac{1}{t} \left(\frac{V}{15} t - \frac{V}{900} t^2 + \frac{V}{38\,700} t^3 \right) = \frac{V}{15} - \frac{V}{900} t + \frac{V}{38\,700} t^2 \Rightarrow$

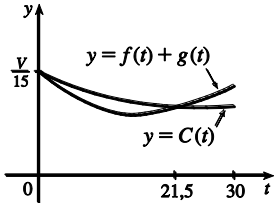
$C'(t) = -\frac{V}{900} + \frac{V}{19\,350} t = 0$ lorsque $\frac{1}{19\,350} t = \frac{1}{900} \Rightarrow t = 21{,}5$. $C(21{,}5) = \frac{V}{15} - \frac{V}{900}(21{,}5) + \frac{V}{38\,700}(21{,}5)^2 \approx 0{,}0547\,2V$,

$C(0) = \frac{V}{15} \approx 0{,}06667V$ et $C(30) = \frac{V}{15} - \frac{V}{900}(30) + \frac{V}{38\,700}(30)^2 \approx 0{,}05659V$; le minimum absolu que la fonction atteint est donc $C(21{,}5) \approx 0{,}0547\,2V$.

d) Comme à la sous-question c), nous avons $C(t) = \frac{V}{15} - \frac{V}{900} t + \frac{V}{38\,700} t^2$, donc $C(t) = f(t) + g(t) \Leftrightarrow$

$\frac{V}{15} - \frac{V}{900} t + \frac{V}{38\,700} t^2 = \frac{V}{15} - \frac{V}{450} t + \frac{V}{12\,900} t^2 \Leftrightarrow$

$t^2 \left(\frac{1}{12\,900} - \frac{1}{38\,700} \right) = t \left(\frac{1}{450} - \frac{1}{900} \right) \Leftrightarrow t = \frac{1/900}{2/38\,700} = \frac{43}{2} = 21{,}5$. Il s'agit là de la valeur de t que nous avons trouvée comme point critique de C à la sous-question c); nous avons donc, dans ce cas, vérifié le résultat obtenu en a).



1.6 L'intégrale indéfinie et le théorème de la variation nette

1. $\dfrac{d}{dx}\left[-\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C\right]=\dfrac{d}{dx}\left[-\dfrac{(1+x^2)^{1/2}}{x}+C\right]=-\dfrac{x\cdot\frac{1}{2}(1+x^2)^{-1/2}(2x)-(1+x^2)^{1/2}\cdot 1}{(x)^2}+0$

$=-\dfrac{(1+x^2)^{-1/2}[x^2-(1+x^2)]}{x^2}=-\dfrac{-1}{(1+x^2)^{1/2}x^2}=\dfrac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$

2. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}\sin 2x+C\right)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\cos 2x\cdot 2+0=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2x$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2\cos^2 x-1)=\frac{1}{2}+\cos^2 x-\frac{1}{2}=\cos^2 x$

3. $\dfrac{d}{dx}[\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C]=\dfrac{d}{dx}[\sin x-\frac{1}{3}(\sin x)^3+C]=\cos x-\frac{1}{3}\cdot 3(\sin x)^2(\cos x)+0$

$=\cos x(1-\sin^2 x)=\cos x(\cos^2 x)=\cos^3 x$

4. $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{2}{3b^2}(bx-2a)\sqrt{a+bx}+C\right]=\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{2}{3b^2}(bx-2a)(a+bx)^{1/2}+C\right]$

$=\dfrac{2}{3b^2}\left[(bx-2a)\cdot\frac{1}{2}(a+bx)^{-1/2}(b)+(a+bx)^{1/2}(b)\right]+0$

$=\dfrac{2}{3b^2}\cdot\dfrac{1}{2}b(a+bx)^{-1/2}[(bx-2a)+2(a+bx)]=\dfrac{1}{3b\sqrt{a+bx}}[3bx]=\dfrac{x}{\sqrt{a+bx}}$

5. $\displaystyle\int(x^2+x^{-2})dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^{-1}}{-1}+C=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{x}+C$

6. $\displaystyle\int\left(\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^2}\right)dx=\int(x^{3/2}+x^{2/3})\,dx=\frac{x^{5/2}}{5/2}+\frac{x^{5/3}}{5/3}+C=\frac{2}{5}x^{5/2}+\frac{3}{5}x^{5/3}+C$

7. $\displaystyle\int(x^4-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x-2)\,dx=\frac{x^5}{5}-\frac{1}{2}\frac{x^4}{4}+\frac{1}{4}\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}\frac{x^2}{2}-2x+C=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{8}x^2-2x+C$

8. $\displaystyle\int(y^3+1{,}8y^2-2{,}4y)dy=\frac{y^4}{4}+1{,}8\frac{y^3}{3}-2{,}4\frac{y^2}{2}+C=\frac{1}{4}y^4+0{,}6y^3-1{,}2y^2+C$

9. $\displaystyle\int(u+4)(2u+1)\,du=\int(2u^2+9u+4)du=2\frac{u^3}{3}+9\frac{u^2}{2}+4u+C=\frac{9}{2}u^2+4u+C$

10. $\displaystyle\int v(v^2+1)^2dv=\int v(v^4+4v^2+4)dv=\int(v^5+4v^3+4v)dv=\frac{v^6}{6}+4\frac{v^4}{4}+4\frac{v^2}{2}+C=\frac{1}{6}v^6+v^4+2v^2+C$

11. $\displaystyle\int\frac{x^3-2\sqrt{x}}{x}\,dx=\int\left(\frac{x^3}{x}-\frac{2x^{1/2}}{x}\right)dx=\int(x^2-2x^{-1/2})\,dx=\frac{x^3}{3}-2\frac{x^{1/2}}{1/2}+C=\frac{1}{3}x^3-4\sqrt{x}+C$

 © Groupe Modulo inc., 2013

12. $\int\left(x^2+1+\dfrac{1}{x^2+1}\right)dx=\dfrac{x^3}{3}+x+\arctan x+C$

13. $\int(\sin x+\cos x)dx=-\cos x+\sin x+C$

14. $\int(\csc^2 t-2e^t)dt=-\cot t-2e^t+C$

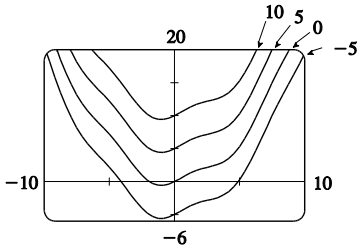
15. $\int(\theta-\csc\theta\cot\theta)\,d\theta=\frac{1}{2}\theta^2+\csc\theta+C$

16. $\int\sec t(\sec t+\tan t)dt=\int(\sec^2 t+\sec t\tan t)dt=\tan t+\sec t+C$

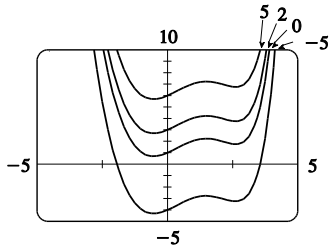
17. $\int(1+\tan^2\alpha)\,d\alpha=\int\sec^2\alpha\,d\alpha=\tan\alpha+C$

18. $\int\dfrac{\sin 2x}{\sin x}dx=\int\dfrac{2\sin x\cos x}{\sin x}dx=\int 2\cos x\,dx=2\sin x+C$

19. $\int(\cos x+\frac{1}{2}x)\,dx=\sin x+\frac{1}{4}x^2+C$. Les membres de la famille de primitives dans cette figure correspondent à $C=-5$, 0, 5 et 10.



20. $\int(e^x-2x^2)\,dx=e^x-\frac{2}{3}x^3+C$. Les membres de la famille de primitives dans cette figure correspondent à $C=$ 5, 0, 2 et 5.



21. $\int_{-2}^{3}(x^2-3)\,dx=[\frac{1}{3}x^3-3x]_{-2}^{3}=(9-9)-(-\frac{8}{3}+6)=\frac{8}{3}-\frac{18}{3}=-\frac{10}{3}$

22. $\int_{1}^{2}(4x^3-3x^2+2x)\,dx=[x^4-x^3+x^2]_{1}^{2}=(16-8+4)-(1-1+1)=12-1=11$

 © Groupe Modulo inc., 2013

23. $\int_{-2}^{0}(\frac{1}{2}t^4+\frac{1}{4}t^3-t)dt=[\frac{1}{10}t^5+\frac{1}{16}t^4-\frac{1}{2}t^2]_{-2}^{0}=0-[\frac{1}{10}(-32)+\frac{1}{16}(16)-\frac{1}{2}(4)]=-(-\frac{16}{5}+1-2)=\frac{21}{5}$

24. $\int_0^3(1+6w^2-10w^4)dw=[w+2w^3-2w^5]_0^3=(3+54-486)-0=-429$

25. $\int_0^2(2x-3)(4x^2+1)dx=\int_0^2(8x^3-12x^2+2x-3)dx=[2x^4-4x^3+x^2-3x]_0^2=(32-32+4-6)-0=-2$

26. $\int_{-1}^{1}t(1-t)^2\,dt=\int_{-1}^{1}t(1-2t+t^2)dt=\int_{-1}^{1}(t-2t^2+t^3)dt=[\frac{1}{2}t^2-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{4}t^4]_{-1}^{1}$
$=(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4})-(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4})=-\frac{4}{3}$

27. $\int_0^{\pi}(5e^x+3\sin x)\,dx=[5e^x-3\cos x]_0^{\pi}=[5e^{\pi}-3(-1)]-[5(1)-3(1)]=5e^{\pi}+1$

28. $\int_1^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}\right)dx=\int_1^2(x^{-2}-4x^{-3})dx=\left[\frac{x^{-1}}{-1}-\frac{4x^{-2}}{-2}\right]_1^2=\left[-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right]_1^2=\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)-(-1+2)=-1$

29. $\int_1^4\left(\frac{4+6u}{\sqrt{u}}\right)du=\int_1^4\left(\frac{4}{\sqrt{u}}+\frac{6u}{\sqrt{u}}\right)du=\int_1^4(4u^{-1/2}+6u^{1/2})du=\left[8u^{1/2}+4u^{3/2}\right]_1^4=(16+32)-(8+4)=36$

30. $\int_0^4\left(3\sqrt{t}-2e^t\right)\,dt=\int_0^4(3t^{1/2}-2e^t)\,dt=\left[2t^{3/2}-2e^t\right]_0^4=(16-2e^4)-(0-2)=18-2e^4$

31. $\int_0^1 x\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}\right)dx=\int_0^1(x^{4/3}+x^{5/4})\,dx=\left[\frac{3}{7}x^{7/3}+\frac{4}{9}x^{9/4}\right]_0^1=(\frac{3}{7}+\frac{4}{9})-0=\frac{55}{63}$

32. $\int_1^4\frac{\sqrt{y}-y}{y^2}dy=\int_1^4\left(\frac{\sqrt{y}}{y^2}-\frac{y}{y^2}\right)dy=\int_1^4(y^{-3/2}-y^{-1})\,dy=[-2y^{-1/2}-\ln|y|]_1^4=\left[-\frac{2}{\sqrt{y}}-\ln|y|\right]_1^4$
$=(-1-\ln 4)-(-2-\ln 1)=1-\ln 4$

33. $\int_1^2\left(\frac{x}{2}-\frac{2}{x}\right)dx=\left[\frac{1}{4}x^2-2\ln|x|\right]_1^2=(1-2\ln 2)-\left(\frac{1}{4}-2\ln 1\right)=\frac{3}{4}-2\ln 2$

34. $\int_0^1(5x-5^x)\,dx=\left[\frac{5}{2}x^2-\frac{5^x}{\ln 5}\right]_0^1=\left(\frac{5}{2}-\frac{5}{\ln 5}\right)-\left(0-\frac{1}{\ln 5}\right)=\frac{5}{2}-\frac{4}{\ln 5}$

35. $\int_0^1(x^{10}+10^x)\,dx=\left[\frac{x^{11}}{11}+\frac{10^x}{\ln 10}\right]_0^1=\left(\frac{1}{11}+\frac{10}{\ln 10}\right)-\left(0+\frac{1}{\ln 10}\right)=\frac{1}{11}+\frac{9}{\ln 10}$

36. $\int_{\pi/4}^{\pi/3}\csc^2\theta\,d\theta=[-\cot\theta]_{\pi/4}^{\pi/3}=-\cot(\pi/3)-[-\cot(\pi/4)]=-1/\sqrt{3}+1$

 © Groupe Modulo inc., 2013

37. $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{1+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=\int_0^{\pi/4}\left(\frac{1}{\cos^2\theta}+\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\right)d\theta=\int_0^{\pi/4}(\sec^2\theta+1)\,d\theta$

$=[\tan\theta+\theta]_0^{\pi/4}=(\tan\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4})-(0+0)=1+\frac{\pi}{4}$

38. $\displaystyle\int_0^{\pi/3}\frac{\sin\theta+\sin\theta\tan^2\theta}{\sec^2\theta}\,d\theta=\int_0^{\pi/3}\frac{\sin\theta(1+\tan^2\theta)}{\sec^2\theta}\,d\theta=\int_0^{\pi/3}\frac{\sin\theta\sec^2\theta}{\sec^2\theta}\,d\theta=\int_0^{\pi/3}\sin\theta\,d\theta$

$=[-\cos\theta]_0^{\pi/3}=-\frac{1}{2}-(-1)=\frac{1}{2}$

39. $\displaystyle\int_1^{64}\frac{1+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\,dx=\int_1^{64}\left(\frac{1}{x^{1/2}}+\frac{x^{1/3}}{x^{1/2}}\right)dx=\int_1^{64}(x^{-1/2}+x^{(1/3)-(1/2)})\,dx=\int_1^{64}(x^{-1/2}+x^{-1/6})\,dx$

$=\left[2x^{1/2}+\frac{6}{5}x^{5/6}\right]_1^{64}=(16+\frac{192}{5})-(2+\frac{6}{5})=14+\frac{186}{5}=\frac{256}{5}$

40. $\displaystyle\int_{-10}^{10}\frac{2}{\sin^2x+\cos^2x}\,dx=\int_{-10}^{10}\frac{2}{1}\,dx=\int_{-10}^{10}2\,dx=[2x]_{-10}^{10}=20-(-20)=40$

41. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}/2}\frac{dr}{\sqrt{1-r^2}}=[\arcsin r]_0^{\sqrt{3}/2}=\arcsin\left(\sqrt{3}/2\right)-\arcsin 0=\frac{\pi}{3}-0=\frac{\pi}{3}$

42. $\displaystyle\int_1^2\frac{(x-1)^3}{x^2}dx=\int_1^2\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2}\,dx=\int_1^2\left(x-3+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx=\left[\frac{1}{2}x^2-3x+3\ln|x|+\frac{1}{x}\right]_1^2$

$=(2-6+3\ln 2+\frac{1}{2})-(\frac{1}{2}-3+0+1)=3\ln 2-2$

43. $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{3}}\frac{t^2-1}{t^4-1}\,dt=\int_0^{1/\sqrt{3}}\frac{t^2-1}{(t^2+1)(t^2-1)}dt=\int_0^{1/\sqrt{3}}\frac{1}{t^2+1}dt=[\arctan t]_0^{1/\sqrt{3}}=\arctan\left(1/\sqrt{3}\right)-\arctan 0$

$=\frac{\pi}{6}-0=\frac{\pi}{6}$

44. $|2x-1|=\begin{cases}2x-1 & \text{si } 2x-1\ge 0\\ -(2x-1) & \text{si } 2x-1<0\end{cases}=\begin{cases}2x-1 & \text{si } x\ge\frac{1}{2}\\ 1-2x & \text{si } x<\frac{1}{2}\end{cases}$

Donc, $\displaystyle\int_0^2|2x-1|\,dx=\int_0^{1/2}(1-2x)\,dx+\int_{1/2}^2(2x-1)dx=[x-x^2]_0^{1/2}+[x^2-x]_{1/2}^2$

$=(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})-0+(4-2)-(\frac{1}{4}-\frac{1}{2})=\frac{1}{4}+2-(-\frac{1}{4})=\frac{5}{2}$

45. $\displaystyle\int_{-1}^2(x-2|x|)\,dx=\int_{-1}^0[x-2(-x)]\,dx+\int_0^2[x-2(x)]\,dx=\int_{-1}^0 3x\,dx+\int_0^2(-x)\,dx=3[\frac{1}{2}x^2]_{-1}^0-[\frac{1}{2}x^2]_0^2$

$=3(0-\frac{1}{2})-(2-0)=-\frac{7}{2}$

46. $\displaystyle\int_0^{3\pi/2}|\sin x|\,dx=\int_0^{\pi}\sin x\,dx+\int_{\pi}^{3\pi/2}(-\sin x)\,dx=[-\cos x]_0^{\pi}+[\cos x]_{\pi}^{3\pi/2}=[1-(-1)]+[0-(-1)]=2+1=3$

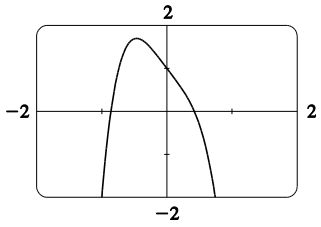
47. On voit au graphique que la courbe d'équation $y=1-2x-5x^4$ a des points d'intersection avec l'axe des x lorsque $x=a\approx -0{,}86$ et $x=b\approx 0{,}42$. L'aire de la région située sous la courbe et au-dessus de l'axe des x est donc

$\displaystyle\int_a^b(1-2x-5x^4)\,dx=[x-x^2-x^5]_a^b$

$=(b-b^2-b^5)-(a-a^2-a^5)$

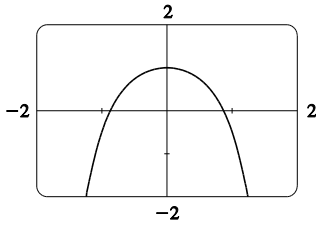
$\approx 1{,}36$

 © Groupe Modulo inc., 2013



48. On voit au graphique que la courbe d'équation $y = (x^2 + 1)^{-1} - x^4$ a des points d'intersection avec l'axe des x lorsque $x = a \approx -0{,}87$ et $x = b \approx 0{,}87$. L'aire de la région située sous la courbe et au-dessus de l'axe des x est donc

$$\begin{aligned}\int_a^b [(x^2+1)^{-1} - x^4]\,dx &= [\arctan x - \tfrac{1}{5}x^5]_a^b \\ &= (\arctan b - \tfrac{1}{5}b^5) - (\arctan a - \tfrac{1}{5}a^5) \\ &\approx 1{,}23\end{aligned}$$



49. $A = \int_0^2 (2y - y^2)\,dy = [y^2 - \tfrac{1}{3}y^3]_0^2 = (4 - \tfrac{8}{3}) - 0 = \tfrac{4}{3}$

50. $y = \sqrt[4]{x} \;\Rightarrow\; x = y^4$, donc $A = \int_0^1 y^4\,dy = [\tfrac{1}{5}y^5]_0^1 = \tfrac{1}{5}$.

51. Si $w'(t)$ est le taux de croissance en kilogrammes par année, alors $w(t)$ représente le poids en kilogrammes de l'enfant à l'âge t. Selon le théorème de la variation nette, nous savons que $\int_5^{10} w'(t)\,dt = w(10) - w(5)$. L'intégrale représente donc l'augmentation du poids de l'enfant (en kilogrammes) de l'âge de 5 ans à l'âge de 10 ans.

52. Selon le théorème de la variation nette, $\int_a^b I(t)\,dt = \int_a^b Q'(t)\,dt = Q(b) - Q(a)$. L'intégrale représente donc la variation de la charge Q du temps $t = a$ au temps $t = b$.

53. Comme $r(t)$ représente le taux auquel le pétrole s'échappe, nous avons $r(t) = -V'(t)$, où $V(t)$ est le volume de pétrole au temps t. [Le signe « - » est requis parce que la fonction V est décroissante, ce qui fait que la valeur de $V'(t)$ est négative, alors que celle de $r(t)$ est positive.] Donc, selon le théorème de la variation nette, $\int_0^{120} r(t)\,dt = -\int_0^{120} V'(t)\,dt = -[V(120) - V(0)] = V(0) - V(120)$, qui représente le nombre de litres de pétrole qui se sont échappés du réservoir durant les deux premières heures (120 minutes).

 © Groupe Modulo inc., 2013

54. Selon le théorème de la variation nette, $\int_0^{15} n'(t)\,dt = n(15) - n(0) = n(15) - 100$ représente l'augmentation de la population d'abeilles en 15 semaines. Donc, $100 + \int_0^{15} n'(t)\,dt = n(15)$ représente la population d'abeilles totale après 15 semaines.

55. Selon le théorème de la variation nette, $\int_{1000}^{5000} R'(x)\,dx = R(5000) - R(1000)$, qui représente donc l'augmentation du revenu qui découle de l'augmentation des ventes de 1000 à 5000 unités.

56. La pente du sentier représente le taux de variation de l'élévation E, donc $f(x) = E'(x)$. Selon le théorème de la variation nette, $\int_3^5 f(x)\,dx = \int_3^5 E'(x)\,dx = E(5) - E(3)$ est la variation de l'élévation E entre $x = 3$ kilomètres et $x = 5$ kilomètres à partir du début du sentier.

57. En général, l'unité de mesure pour $\int_a^b f(x)\,dx$ est le produit de l'unité pour $f(x)$ et de l'unité pour x. Comme $f(x)$ est mesurée en newtons, et x est mesuré en mètres, les unités pour $\int_0^{100} f(x)\,dx$ sont des newtons-mètres. (L'abréviation pour le newton-mètre est N·m.)

58. Les unités pour $a(x)$ sont les kilogrammes par mètre, et les unités pour x sont les mètres, donc les unités pour da/dx sont des kilogrammes par mètre par mètre, soit (kg/m)/m. L'unité de mesure pour $\int_2^8 a(x)\,dx$ est le produit des kilogrammes par mètre et des mètres, c'est-à-dire les kilogrammes.

59. a) $\text{Déplacement} = \int_0^3 (3t-5)\,dt = [\frac{3}{2}t^2 - 5t]_0^3 = \frac{27}{2} - 15 = -\frac{3}{2}$ m

b) $\text{Distance parcourue} = \int_0^3 |3t-5|\,dt = \int_0^{5/3} (5-3t)\,dt + \int_{5/3}^3 (3t-5)\,dt$

$= [5t - \frac{3}{2}t^2]_0^{5/3} + [\frac{3}{2}t^2 - 5t]_{5/3}^3 = \frac{25}{3} - \frac{3}{2}\cdot\frac{25}{9} + \frac{27}{2} - 15 - (\frac{3}{2}\cdot\frac{25}{9} - \frac{25}{3}) = \frac{41}{6}$ m

60. a) $\text{Déplacement} = \int_1^6 (t^2 - 2t - 8)\,dt = [\frac{1}{3}t^3 - t^2 - 8t]_1^6 = (72 - 36 - 48) - (\frac{1}{3} - 1 - 8) = -\frac{10}{3}$ m

b) $\text{Distance parcourue} = \int_1^6 |t^2 - 2t - 8|\,dt = \int_1^6 |(t-4)(t+2)|\,dt$

$= \int_1^4 (-t^2 + 2t + 8)\,dt + \int_4^6 (t^2 - 2t - 8)dt = [-\frac{1}{3}t^3 + t^2 + 8t]_1^4 + [\frac{1}{3}t^3 - t^2 - 8t]_4^6$

$= (-\frac{64}{3} + 16 + 32) - (-\frac{1}{3} + 1 + 8) + (72 - 36 - 48) - (\frac{64}{3} - 16 - 32) = \frac{98}{3}$ m

61. a) $v'(t) = a(t) = t + 4 \;\Rightarrow\; v(t) = \frac{1}{2}t^2 + 4t + C \;\Rightarrow\; v(0) = C = 5 \;\Rightarrow\; v(t) = \frac{1}{2}t^2 + 4t + 5$ m/s

 © Groupe Modulo inc., 2013

b) Distance parcourue $= \int_0^{10} |v(t)|\, dt = \int_0^{10} |\frac{1}{2}t^2 + 4t + 5|\, dt = \int_0^{10} (\frac{1}{2}t^2 + 4t + 5)\, dt = [\frac{1}{6}t^3 + 2t^2 + 5t]_0^{10}$
$= \frac{500}{3} + 200 + 50 = 416\frac{2}{3}$ m

62. a) $v'(t) = a(t) = 2t + 3 \;\Rightarrow\; v(t) = t^2 + 3t + C \;\Rightarrow\; v(0) = C = -4 \;\Rightarrow\; v(t) = t^2 + 3t - 4$

b) Distance parcourue $= \int_0^3 |t^2 + 3t - 4|\, dt = \int_0^3 |(t+4)(t-1)|\, dt = \int_0^1 (-t^2 - 3t + 4)\, dt + \int_1^3 (t^2 + 3t - 4)\, dt$
$= [-\frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 4t]_0^1 + [\frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 - 4t]_1^3$
$= (-\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 4) + (9 + \frac{27}{2} - 12) - (\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 4) = \frac{89}{6}$ m

63. Comme $m'(x) = \rho(x)$, $m = \int_0^4 \rho(x)\, dx = \int_0^4 \left(9 + 2\sqrt{x}\right) dx = [9x + \frac{4}{3}x^{3/2}]_0^4 = 36 + \frac{32}{3} - 0 = \frac{140}{3} = 46\frac{2}{3}$ kg.

64. Selon le théorème de la variation nette, la quantité d'eau qui s'écoule du réservoir au cours des 10 premières minutes s'élève à

$\int_0^{10} r(t)\, dt = \int_0^{10} (200 - 4t)\, dt = [200t - 2t^2]_0^{10} = (2000 - 200) - 0 = 1800$ litres.

65. Soit s, la position de l'automobile. Selon l'équation 2, $s(100) - s(0) = \int_0^{100} v(t)\, dt$. Utilisons la méthode du point-milieu pour $0 \le t \le 100$ avec $n = 5$. La longueur de chacun des cinq intervalles de temps est $20 \text{ secondes} = \dfrac{20}{3600}\text{heure} = \dfrac{1}{180}\text{heure}$. La distance parcourue est donc $\int_0^{100} v(t)\, dt \approx \frac{1}{180}[v(10) + v(30) + v(50) + v(70) + v(90)] = \frac{1}{180}(38 + 58 + 51 + 53 + 47) = \frac{247}{180} \approx 1{,}4$ kilomètre.

66. a) Selon le théorème de la variation nette, la quantité totale de matière expulsée dans l'atmosphère est $Q(6) - Q(0) = \int_0^6 r(t)\, dt = Q(6)$ puisque $Q(0) = 0$. Le taux $r(t)$ est positif, donc la fonction Q est croissante. Il s'ensuit qu'une approximation par excès de $Q(6)$ est D_6 et qu'une approximation par défaut de $Q(6)$ est G_6. $\Delta t = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{6-0}{6} = 1$.

$D_6 = \sum_{i=1}^{6} r(t_i)\Delta t = 10 + 24 + 36 + 46 + 54 + 60 = 230$ tonnes.

$G_6 = \sum_{i=1}^{6} r(t_{i-1})\Delta t = R_6 + r(0) - r(6) = 230 + 2 - 60 = 172$ tonnes.

b) $\Delta t = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{6-0}{3} = 2$. $Q(6) \approx M_3 = 2[r(1) + r(3) + r(5)] = 2(10 + 36 + 54) = 2(100) = 200$ tonnes.

67. Selon le théorème de la variation nette, l'augmentation du coût associée à un accroissement de la production de 2000 m à 4000 m est $C(4000) - C(2000) = \int_{2000}^{4000} C'(x)\, dx$.

$\int_{2000}^{4000} C'(x)\, dx = \int_{2000}^{4000} (3 - 0{,}01x + 0{,}000\,006x^2)\, dx = [3x - 0{,}005x^2 + 0{,}000\,002x^3]_{2000}^{4000} = 60\,000 - 2000 = 58\,000$ $

 © Groupe Modulo inc., 2013

68. Selon le théorème de la variation nette, la quantité d'eau après quatre jours est

$$\begin{aligned} 25\,000 + \int_0^4 r(t)\,dt &\approx 25\,000 + M_4 = 25\,000 + \tfrac{4-0}{4}[r(0,5) + r(1,5) + r(2,5) + r(3,5)] \\ &\approx 25\,000 + [1\,500 + 1\,770 + 740 + (-690)] = 28\,320 \text{ litres} \end{aligned}$$

69. Soit $P(t)$ la population de bactéries au temps t (en heures). Selon le théorème de la variation nette,

$P(1) - P(0) = \int_0^1 P'(t)dt = \int_0^1 (1000 \cdot 2^t)\,dt = \left[1000\dfrac{2^t}{\ln 2}\right]_0^1 = \dfrac{1000}{\ln 2}(2^1 - 2^0) = \dfrac{1000}{\ln 2} \approx 1443$. Il s'ensuit que la population après une heure est 4000 + 1443 = 5443 bactéries.

70. Soit $M(t)$ le nombre de millions de bits transmis au temps t (en heures) [$D(t)$ est mesuré en millions de bits par seconde]. Selon le théorème de la variation nette et la méthode des milieux des sous-intervalles,

$$\begin{aligned} M(8) - M(0) &= \int_0^8 3600D(t)dt \approx 3600 \cdot \tfrac{8-0}{4}[D(1) + D(3) + D(5) + D(7)] \\ &\approx 7200(0,32 + 0,50 + 0,56 + 0,83) = 7200(2,21) = 15\,912 \text{ mégabits} \end{aligned}$$

71. La puissance est le taux de variation de l'énergie par rapport au temps, c'est-à-dire $P(t) = E'(t)$. Selon le théorème de la variation nette et la méthode des milieux des sous-intervalles,

$$\begin{aligned} E(24) - E(0) &= \int_0^{24} P(t)dt \approx \frac{24-0}{12}[P(1) + P(3) + P(5) + \cdots + P(21) + P(23)] \\ &\approx 2(16\,900 + 16\,400 + 17\,000 + 19\,800 + 20\,700 + 21\,200 \\ &\qquad + 20\,500 + 20\,500 + 21\,700 + 22\,300 + 21\,700 + 18\,900) \\ &= 2(237\,600) = 475\,200 \end{aligned}$$

Il s'ensuit que la quantité d'énergie consommée au cours de cette journée était d'environ $4,75 \times 10^5$ mégawattheures.

72. a) $v(t) = 0,000\,44t^3 - 0,0349t^2 + 7,602\,45t - 6,589\,68$.

b) $h(125) - h(0) = \int_0^{125} v(t)dt = [0,000\,11t^4 - 0,011\,63t^3 + 3,801\,225t^2 - 6,589\,68t]_0^{125} \approx 62\,685$ m

 © Groupe Modulo inc., 2013

1.7 La règle du changement de variable

1. Soit $u = -x$. Alors, $du = -dx$, donc $dx = -du$. Il s'ensuit que $\int e^{-x}dx = \int e^{u}(-du) = -e^{u} + C = -e^{-x} + C$. Rappelez-vous qu'il est souvent très facile de vérifier une l'intégrale indéfinie en prenant la dérivée de votre réponse. Dans le cas présent, $\frac{d}{dx}(-e^{-x} + C) = -[e^{-x}(-1)] = e^{-x}$, ce qui correspond bien à l'intégrande.

2. Soit $u = 2 + x^4$. Alors, $du = 4x^3\,dx$ et $x^3dx = \frac{1}{4}du$, donc $\int x^3(2+x^4)^5dx = \int u^5(\frac{1}{4}du) = \frac{1}{4}\frac{u^6}{6} + C = \frac{1}{24}(2+x^4)^6 + C$.

3. Soit $u = x^3 + 1$. Alors, $du = 3x^2\,dx$ et $x^2dx = \frac{1}{3}du$, donc $\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx = \int \sqrt{u}(\frac{1}{3}du) = \frac{1}{3}\frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2} + C = \frac{2}{9}(x^3+1)^{3/2} + C$.

4. Soit $u = 1 - 6t$. Alors, $du = -6\,dt$ et $dt = -\frac{1}{6}du$, donc $\int \frac{dt}{(1-6t)^4} = \int \frac{-\frac{1}{6}du}{u^4} = -\frac{1}{6}\int u^{-4}du = -\frac{1}{6}\frac{u^{-3}}{-3} + C = \frac{1}{18u^3} + C = \frac{1}{18(1-6t)^3} + C$.

5. Soit $u = \cos\theta$. Alors, $du = -\sin\theta\,d\theta$ et $\sin\theta\,d\theta = -du$, donc $\int \cos^3\theta\sin\theta d\theta = \int u^3(-du) = -\frac{u^4}{4} + C = -\frac{1}{4}\cos^4\theta + C$.

6. Soit $u = 1/x$. Alors, $du = -1/x^2\,dx$ et $1/x^2\,dx = -du$, donc $\int \frac{\sec^2(1/x)}{x^2}dx = \int \sec^2 u(-du) = -\tan u + C = -\tan(1/x) + C$.

7. Soit $u = x^2$. Alors, $du = 2x\,dx$ et $x\,dx = \frac{1}{2}du$, donc $\int x\sin(x^2)dx = \int \sin u(\frac{1}{2}du) = -\frac{1}{2}\cos u + C = -\frac{1}{2}\cos(x^2) + C$.

8. Soit $u = x^3$. Alors, $du = 3x^2\,dx$ et $x^2dx = \frac{1}{3}du$, donc $\int x^2e^{x^3}dx = \int e^{u}(\frac{1}{3}du) = \frac{1}{3}e^{u} + C = \frac{1}{3}e^{x^3} + C$.

9. Soit $u = 1 - 2x$. Alors, $du = -2\,dx$ et $dx = -\frac{1}{2}du$, donc $\int (1-2x)^9dx = \int u^9(-\frac{1}{2}du) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}u^{10} + C = -\frac{1}{20}(1-2x)^{10} + C$.

10. Soit $u = 3t + 2$. Alors, $du = 3dt$ et $dt = \frac{1}{3}du$, donc $\int (3t+2)^{2,4}dt = \int u^{2,4}(\frac{1}{3}du) = \frac{1}{3}\frac{u^{3,4}}{3,4} + C = \frac{1}{10,2}(3t+2)^{3,4} + C$.

11. Soit $u = 2x + x^2$. Alors, $du = (2 + 2x)\,dx = 2(1 + x)\,dx$ et $(x+1)dx = \frac{1}{2}du$,

donc $\int (x+1)\sqrt{2x+x^2}dx = \int \sqrt{u}(\frac{1}{2}du) = \frac{1}{2}\frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{3}(2x+x^2)^{3/2} + C$.

Ou: Soit $u = \sqrt{2x+x^2}$. Alors, $u^2 = 2x + x^2 \;\Rightarrow\; 2u\,du = (2+2x)dx \;\Rightarrow\; u\,du = (1+x)dx$, donc

$\int (x+1)\sqrt{2x+x^2}dx = \int u\cdot u\,du = \int u^2du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}(2x+x^2)^{3/2} + C$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

12. Soit $u = 2\theta$. Alors, $du = 2d\theta$ et $d\theta = \frac{1}{2}du$, donc $\int \sec^2 2\theta d\theta = \int \sec^2 u(\frac{1}{2}du) = \frac{1}{2}\tan u + C = \frac{1}{2}\tan 2\theta + C$.

13. Soit $u = 5 - 3x$. Alors, $du = -3\ dx$ et $dx = -\frac{1}{3}du$, donc $\int \frac{dx}{5-3x} = \int \frac{1}{u}(-\frac{1}{3}du) = -\frac{1}{3}\ln|u| + C = -\frac{1}{3}\ln|5-3x| + C$.

14. Soit $x = 1 - u^2$. Alors, $dx = -2u\ du$ et $u\ du = -\frac{1}{2}dx$, donc $\int u\sqrt{1-u^2}du = \int \sqrt{x}(-\frac{1}{2}dx) = -\frac{1}{2}\int x^{1/2}dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}x^{3/2} + C = -\frac{1}{3}(1-u^2)^{3/2} + C$.

15. Soit $u = \pi t$. Alors, $du = \pi\ dt$ et $dt = \frac{1}{\pi}du$, donc $\int \sin\ \pi t\ dt = \int \sin\ u(\frac{1}{\pi}du) = \frac{1}{\pi}(-\cos u) + C = -\frac{1}{\pi}\cos \pi t + C$.

16. Soit $u = e^x$. Alors, $du = e^x\ dx$, donc $\int e^x \cos(e^x)dx = \int \cos\ u\ du = \sin u + C = \sin(e^x) + C$.

17. Soit $x = 1 - e^u$. Alors, $dx = -e^u\ du$ et $e^u\ du = -dx$, donc $\int \frac{e^u}{(1-e^u)^2}du = \int \frac{1}{x^2}(-dx) = -\int x^{-2}dx = -(-x^{-1}) + C = \frac{1}{x} + C = \frac{1}{1-e^u} + C$.

18. Soit $u = \sqrt{x}$. Alors, $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ et $2du = \frac{1}{\sqrt{x}}dx$, donc $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \int \sin u(2du) = -2\cos u + C = -2\cos\sqrt{x} + C$.

19. Soit $u = 3ax + bx^3$. Alors, $du = (3a + 3bx^2)\ dx = 3(a + bx^2)\ dx$,

donc $\int \frac{a+bx^2}{\sqrt{3ax+bx^3}}dx = \int \frac{\frac{1}{3}du}{u^{1/2}} = \frac{1}{3}\int u^{-1/2}du = \frac{1}{3}\cdot 2u^{1/2} + C = \frac{2}{3}\sqrt{3ax+bx^3} + C$.

20. Soit $u = z^3 + 1$. Alors, $du = 3z^2\ dz$ et $\frac{1}{3}du = z^2dz$, donc

$$\int \frac{z^2}{z^3+1}dz = \int \frac{1}{u}(\tfrac{1}{3}du) = \tfrac{1}{3}\ln|u| + C = \tfrac{1}{3}\ln|z^3+1| + C$$

21. Soit $u = \ln x$. Alors, $du = \frac{dx}{x}$, donc $\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx = \int u^2du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}(\ln x)^3 + C$.

22. Soit $u = \cos\theta$. Alors, $du = -\sin\theta\ d\theta$ et $\sin\theta\ d\theta = -du$, donc $\int \cos^4\theta \sin\theta d\theta = \int u^4(-du) = -\frac{1}{5}u^5 + C = -\frac{1}{5}\cos^5\theta + C$.

23. Soit $u = \tan\theta$. Alors, $du = \sec^2\theta\ d\theta$, donc $\int \sec^2\theta \tan^3\theta d\theta = \int u^3du = \frac{1}{4}u^4 + C = \frac{1}{4}\tan^4\theta + C$.

24. Soit $u = 1 + x^{3/2}$. Alors, $du = \frac{3}{2}x^{1/2}dx$ et $\sqrt{x}dx = \frac{2}{3}du$, donc $\int \sqrt{x}\sin(1+x^{3/2})dx = \int \sin u(\frac{2}{3}du) = \frac{2}{3}\cdot(-\cos u) + C = -\frac{2}{3}\cos(1+x^{3/2}) + C$.

25. Soit $u = 1 + e^x$. Alors, $du = e^x\ dx$, donc $\int e^x\sqrt{1+e^x}dx = \int \sqrt{u}du = \frac{2}{3}u^{3/2} + C = \frac{2}{3}(1+e^x)^{3/2} + C$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

Ou : Soit $u = \sqrt{1+e^x}$. Alors, $u^2 = 1 + e^x$ et $2u\,du = e^x\,dx$, donc $\int e^x\sqrt{1+e^x}\,dx = \int u \cdot 2u\,du = \frac{2}{3}u^3 + C = \frac{2}{3}(1+e^x)^{3/2} + C$.

26. Soit $u = ax + b$. Alors, $du = a\,dx$ et $dx = (1/a)\,du$, donc $\int \frac{dx}{ax+b} = \int \frac{(1/a)du}{u} = \frac{1}{a}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{a}\ln|u| + C = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C$.

27. Soit $u = x^3 + 3x$. Alors, $du = (3x^2 + 3)\,dx$ et $\frac{1}{3}du = (x^2+1)dx$, donc $\int (x^2+1)(x^3+3x)^4\,dx = \int u^4(\frac{1}{3}du) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}u^5 + C = \frac{1}{15}(x^3+3x)^5 + C$.

28. Soit $u = \cos t$. Alors, $du = -\sin t\,dt$ et $\sin t\,dt = -du$, donc $\int e^{\cos t}\sin t\,dt = \int e^u(-du) = -e^u + C = -e^{\cos t} + C$.

29. Soit $u = 5^t$. Alors, $du = 5^t \ln 5\,dt$ et $5^t dt = \frac{1}{\ln 5}du$, donc $\int 5^t \sin(5^t)dt = \int \sin u\left(\frac{1}{\ln 5}du\right) = -\frac{1}{\ln 5}\cos u + C = -\frac{1}{\ln 5}\cos(5^t) + C$.

30. Soit $u = \arctan x$. Alors, $du = \frac{dx}{1+x^2}$, donc $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{(\arctan x)^2}{2} + C$.

31. Soit $u = \tan x$. Alors, $du = \sec^2 x\,dx$, donc $\int e^{\tan x}\sec^2 x\,dx = \int e^u du = e^u + C = e^{\tan x} + C$.

32. Soit $u = \ln x$. Alors, $du = (1/x)\,dx$, donc $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx = \int \sin u\,du = -\cos u + C = -\cos(\ln x) + C$.

33. Soit $u = \sin x$. Alors, $du = \cos x\,dx$, donc $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{1}{u^2}du = \int u^{-2}du = \frac{u^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{\sin x} + C$

[ou $-\csc x + C$].

34. Soit $u = \frac{\pi}{x}$. Alors, $du = -\frac{\pi}{x^2}dx$ et $\frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{\pi}du$, donc $\int \frac{\cos(\pi/x)}{x^2}dx = \int \cos u\left(-\frac{1}{\pi}du\right) = -\frac{1}{\pi}\sin u + C = -\frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{x} + C$

35. Soit $u = \cot x$. Alors, $du = -\csc^2 x\,dx$ et $\csc^2 x\,dx = -du$, donc $\int \sqrt{\cot x}\csc^2 x\,dx = \int \sqrt{u}(-du) = -\frac{u^{3/2}}{3/2} + C = -\frac{2}{3}(\cot x)^{3/2} + C$.

36. Soit $u = 2^t + 3$. Alors, $du = 2^t \ln 2\,dt$ et $2^t dt = \frac{1}{\ln 2}du$, donc $\int \frac{2^t}{2^t+3}dt = \int \frac{1}{u}\left(\frac{1}{\ln 2}du\right) = \frac{1}{\ln 2}\ln|u| + C = \frac{1}{\ln 2}\ln(2^t+3) + C$.

37. Soit $u = \sin x$. Alors, $du = \cos x\,dx$, donc $\int \sin^2 x\cos x\,dx = \int u^2 du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}\sin^3 x + C$.

38. Soit $u = 1 + \tan t$. Alors, $du = \sec^2 t\,dt$, donc $\int \frac{dt}{\cos^2 t\sqrt{1+\tan t}} = \int \frac{\sec^2 t dt}{\sqrt{1+\tan t}} = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int u^{-1/2}du = \frac{u^{1/2}}{1/2} + C = 2\sqrt{1+\tan t} + C$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

39. $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\,dx = 2\int \frac{\sin x \cos x}{1+\cos^2 x}\,dx = 2I$. Soit $u = \cos x$. Alors, $du = -\sin x\,dx$,

donc $2I = -2\int \frac{u\,du}{1+u^2} = -2\cdot\frac{1}{2}\ln(1+u^2)+C = -\ln(1+u^2)+C = -\ln(1+\cos^2 x)+C$.

Ou : Soit $u = 1 + \cos^2 x$.

40. Soit $u = \cos x$. Alors, $du = -\sin x\,dx$ et $\sin x\,dx = -du$, donc $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \int \frac{-du}{1+u^2} = -\arctan u + C = -\arctan(\cos x) + C$.

41. $\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$. Soit $u = \sin x$. Alors, $du = \cos x\,dx$, donc $\int \cot x\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C = \ln|\sin x| + C$.

42. Soit $u = \cos t$. Alors, $du = -\sin t\,dt$ et $\sin t\,dt = -du$, donc $\int \sin t \sec^2(\cos t)\,dt = \int \sec^2 u \cdot (-du) = -\tan u + C = -\tan(\cos t) + C$.

43. Soit $u = \arcsin x$. Alors, $du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$, donc $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x} = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C = \ln|\arcsin x| + C$.

44. Soit $u = x^2$. Alors, $du = 2x\,dx$, donc $\int \frac{x}{1+x^4}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}du}{1+u^2} = \frac{1}{2}\arctan u + C = \frac{1}{2}\arctan(x^2) + C$.

45. Soit $u = 1 + x^2$. Alors, $du = 2x\,dx$, donc
$$\int \frac{1+x}{1+x^2}\,dx = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \arctan x + \int \frac{\frac{1}{2}du}{u} = \arctan x + \tfrac{1}{2}\ln|u| + C$$
$$= \arctan x + \tfrac{1}{2}\ln|1+x^2| + C = \arctan x + \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + C \quad [\text{puisque } 1+x^2 > 0].$$

46. Soit $u = 2 + x$. Alors, $du = dx$, $x = u - 2$, et $x^2 = (u-2)^2$, donc

$$\int x^2\sqrt{2+x}\,dx = \int (u-2)^2\sqrt{u}\,du = \int (u^2 - 4u + 4)u^{1/2}\,du = \int (u^{5/2} - 4u^{3/2} + 4u^{1/2})\,du$$
$$= \tfrac{2}{7}u^{7/2} - \tfrac{8}{5}u^{5/2} + \tfrac{8}{3}u^{3/2} + C = \tfrac{2}{7}(2+x)^{7/2} - \tfrac{8}{5}(2+x)^{5/2} + \tfrac{8}{3}(2+x)^{3/2} + C$$

47. Soit $u = 2x + 5$. Alors, $du = 2dx$ et $x = \frac{1}{2}(u-5)$, donc
$$\int x(2x+5)^8\,dx = \int \tfrac{1}{2}(u-5)u^8(\tfrac{1}{2}du) = \tfrac{1}{4}(u^9 - 5u^8)\,du$$
$$= \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{10}u^{10} - \tfrac{5}{9}u^9) + C = \tfrac{1}{40}(2x+5)^{10} - \tfrac{5}{36}(2x+5)^9 + C$$

48. Soit $u = x^2 + 1$ [donc, $x^2 = u - 1$]. Alors, $du = 2x\,dx$ et $x\,dx = \frac{1}{2}du$, donc

$$\int x^3\sqrt{x^2+1}\,dx = \int x^2\sqrt{x^2+1}\,x\,dx = \int (u-1)\sqrt{u}\,(\tfrac{1}{2}du) = \tfrac{1}{2}\int (u^{3/2} - u^{1/2})\,du$$
$$= \tfrac{1}{2}(\tfrac{2}{5}u^{5/2} - \tfrac{2}{3}u^{3/2}) + C = \tfrac{1}{5}(x^2+1)^{5/2} - \tfrac{1}{3}(x^2+1)^{3/2} + C.$$

Ou : Soit $u = \sqrt{x^2+1}$. Alors, $u^2 = x^2 + 1 \;\Rightarrow\; 2u\,du = 2x\,dx \;\Rightarrow\; u\,du = x\,dx$, donc

$$\int x^3\sqrt{x^2+1}\,dx = \int x^2\sqrt{x^2+1}\,x\,dx = \int (u^2-1)u\cdot u\,du = \int (u^4 - u^2)\,du$$
$$= \tfrac{1}{5}u^5 - \tfrac{1}{3}u^3 + C = \tfrac{1}{5}(x^2+1)^{5/2} - \tfrac{1}{3}(x^2+1)^{3/2} + C.$$

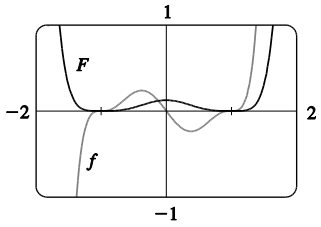
 © Groupe Modulo inc., 2013

Remarque : La réponse s'écrit également $\frac{1}{15}\sqrt{x^2+1}(3x^4+x^2-2)+C$.

49. $f(x) = x(x^2-1)^3$. $u = x^2-1 \Rightarrow du = 2x\,dx$, donc

$$\int x(x^2-1)^3\,dx = \int u^3(\tfrac{1}{2}du) = \tfrac{1}{8}u^4 + C = \tfrac{1}{8}(x^2-1)^4 + C$$

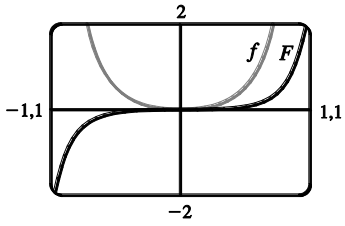
Lorsque la valeur de f est positive (négative), la fonction F est croissante (décroissante). Lorsque la valeur de f change de négative à positive (positive à négative), la fonction F atteint un minimum (maximum) local.



50. $f(\theta) = \tan^2\theta \sec^2\theta$. $u = \tan\theta \Rightarrow du = \sec^2\theta d\theta$, donc

$$\int \tan^2\theta\sec^2\theta d\theta = \int u^2 du = \tfrac{1}{3}u^3 + C = \tfrac{1}{3}\tan^3\theta + C$$

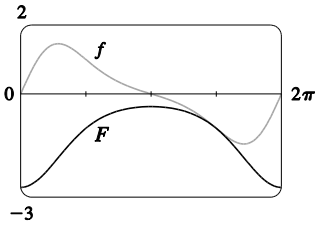
Il est à noter que la valeur de f est positive et que la fonction F est croissante. En $x = 0$, $f(x) = 0$, et la fonction F a une tangente horizontale.



51. $f(x) = e^{\cos x}\sin x$. $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x\,dx$, donc

$$\int e^u(-du) = -e^u + C = -e^{\cos x} + C$$

Il est à noter que lorsque $x = \pi$, la valeur de f change de positive à négative, et la fonction F atteint un maximum local. De plus, f et F sont toutes deux périodiques et leur période est 2π. Il s'ensuit qu'en $x = 0$ et en $x = 2\pi$, la valeur de f change de négative à positive, et la fonction F atteint un minimum local.

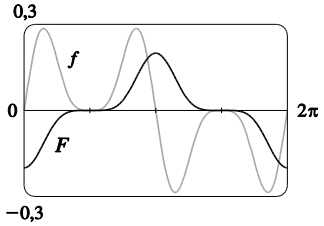


 © Groupe Modulo inc., 2013

52. $f(x) = \sin x \cos^4 x$. $u = \cos x \quad \Rightarrow \quad du = -\sin x\, dx$, donc

$$\int \sin x \cos^4 x\, dx = \int u^4(-du) = -\tfrac{1}{5}u^5 + C = -\tfrac{1}{5}\cos^5 x + C$$

Il est à noter qu'à $x = \pi$, la valeur de f change de positive à négative et la fonction F atteint un maximum local. De plus, f et F sont toutes deux périodiques et leur période est 2π. Il s'ensuit qu'en $x = 0$ et en $x = 2\pi$, la valeur de f change de négative à positive, et la fonction F atteint un minimum local.



53. Soit $u = \frac{\pi}{2}t$, donc $du = \frac{\pi}{2}dt$. Lorsque $t = 0$, $u = 0$; lorsque $t = 1$, $u = \frac{\pi}{2}$. Il s'ensuit que

$$\int_0^1 \cos(\pi t/2)dt = \int_0^{\pi/2} \cos u(\tfrac{2}{\pi}du) = \tfrac{2}{\pi}[\sin u]_0^{\pi/2} = \tfrac{2}{\pi}(\sin\tfrac{\pi}{2} - \sin 0) = \tfrac{2}{\pi}(1-0) = \tfrac{2}{\pi}$$

54. Soit $u = 3t - 1$, donc $du = 3dt$. Lorsque $t = 0$, $u = -1$; lorsque $t = 1$, $u = 2$. Il s'ensuit que

$$\int_0^1 (3t-1)^{50}dt = \int_{-1}^2 u^{50}(\tfrac{1}{3}du) = \tfrac{1}{3}[\tfrac{1}{51}u^{51}]_{-1}^2 = \tfrac{1}{153}[2^{51} - (-1)^{51}] = \tfrac{1}{153}(2^{51}+1)$$

55. Soit $u = 1 + 7x$, donc $du = 7dx$. Lorsque $x = 0$, $u = 1$; lorsque $x = 1$, $u = 8$. Il s'ensuit que

$$\int_0^1 \sqrt[3]{1+7x}dx = \int_1^8 u^{1/3}(\tfrac{1}{7}du) = \tfrac{1}{7}[\tfrac{3}{4}u^{4/3}]_1^8 = \tfrac{3}{28}(8^{4/3} - 1^{4/3}) = \tfrac{3}{28}(16-1) = \tfrac{45}{28}$$

56. Soit $u = 5x + 1$, donc $du = 5\,dx$. Lorsque $x = 0$, $u = 1$; lorsque $x = 3$, $u = 16$. Il s'ensuit que $\int_0^3 \frac{dx}{5x+1} = \int_1^{16} \frac{1}{u}\left(\frac{1}{5}du\right) = \frac{1}{5}[\ln|u|]_1^{16} = \frac{1}{5}(\ln 16 - \ln 1) = \frac{1}{5}\ln 16$.

57. Soit $u = t/4$, donc $du = \frac{1}{4}dt$. Lorsque $t = 0$, $u = 0$; lorsque $t = \pi$, $u = \pi/4$. Il s'ensuit que $\int_0^{\pi} \sec^2(t/4)dt = \int_0^{\pi/4} \sec^2 u(4du) = 4[\tan u]_0^{\pi/4} = 4(\tan\frac{\pi}{4} - \tan 0) = 4(1-0) = 4$.

58. Soit $u = \pi t$, donc $du = \pi\, dt$. Lorsque $t = \frac{1}{6}$, $u = \frac{\pi}{6}$; lorsque $t = \frac{1}{2}$, $u = \frac{\pi}{2}$. Il s'ensuit que $\int_{1/6}^{1/2} \csc\pi t \cot\pi t\; dt = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \csc u \cot u(\frac{1}{\pi}du) = \frac{1}{\pi}[-\csc u]_{\pi/6}^{\pi/2} = -\frac{1}{\pi}(1-2) = \frac{1}{\pi}$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

59. Soit $u = 1/x$, donc $du = -1/x^2\,dx$. Lorsque $x = 1$, $u = 1$; lorsque $x = 2$, $u = \frac{1}{2}$. Il s'ensuit que $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx = \int_1^{1/2} e^u(-du) = -[e^u]_1^{1/2} = -(e^{1/2} - e) = e - \sqrt{e}$.

60. Soit $u = -x^2$, donc $du = -2x\,dx$. Lorsque $x = 0$, $u = 0$; lorsque $x = 1$, $u = -1$. Il s'ensuit que $\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx = \int_0^{-1} e^u(-\frac{1}{2}du) = -\frac{1}{2}[e^u]_0^{-1} = -\frac{1}{2}(e^{-1} - e^0) = \frac{1}{2}(1 - 1/e)$.

61. Selon le théorème 7 b), $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}(x^3 + x^4\tan x)dx = 0$, puisque $f(x) = x^3 + x^4\tan x$ est une fonction impaire.

62. Soit $u = \sin x$, donc $du = \cos x\,dx$. Lorsque $x = 0$, $u = 0$; lorsque $x = \frac{\pi}{2}$, $u = 1$. Il s'ensuit que $\int_0^{\pi/2}\cos x\sin(\sin x)dx = \int_0^1 \sin u\,du = [-\cos u]_0^1 = -(\cos 1 - 1) = 1 - \cos 1$.

63. Soit $u = 1 + 2x$, donc $du = 2dx$. Lorsque $x = 0$, $u = 1$; lorsque $x = 13$, $u = 27$. Il s'ensuit que $\int_0^{13}\frac{dx}{\sqrt[3]{(1+2x)^2}} = \int_1^{27} u^{-2/3}(\frac{1}{2}du) = [\frac{1}{2}\cdot 3u^{1/3}]_1^{27} = \frac{3}{2}(3-1) = 3$.

64. Supposez que $a > 0$. Soit $u = a^2 - x^2$, donc $du = -2x\,dx$. Lorsque $x = 0$, $u = a^2$; lorsque $x = a$, $u = 0$. Il s'ensuit que $\int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int_{a^2}^0 u^{1/2}(-\frac{1}{2}du) = \frac{1}{2}\int_0^{a^2} u^{1/2}du = \frac{1}{2}\cdot[\frac{2}{3}u^{3/2}]_0^{a^2} = \frac{1}{3}a^3$.

65. Soit $u = x^2 + a^2$, donc $du = 2x\,dx$ et $x\,dx = \frac{1}{2}du$. Lorsque $x = 0$, $u = a^2$; lorsque $x = a$, $u = 2a^2$. Il s'ensuit que

$$\int_0^a x\sqrt{x^2 + a^2}\,dx = \int_{a^2}^{2a^2} u^{1/2}(\tfrac{1}{2}du) = \tfrac{1}{2}[\tfrac{2}{3}u^{3/2}]_{a^2}^{2a^2} = [\tfrac{1}{3}u^{3/2}]_{a^2}^{2a^2} = \tfrac{1}{3}[(2a^2)^{3/2} - a^2)^{3/2}] = \tfrac{1}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right)a^3$$

66. Selon le théorème 7 b), $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} x^4\sin x\,dx = 0$, puisque $f(x) = x^4\sin x$ est une fonction impaire.

67. Soit $u = x - 1$, donc $u + 1 = x$ et $du = dx$. Lorsque $x = 1$, $u = 0$; lorsque $x = 2$, $u = 1$. Il s'ensuit que $\int_1^2 x\sqrt{x-1}dx = \int_0^1 (u+1)\sqrt{u}du = \int_0^1 (u^{3/2} + u^{1/2})du = [\frac{2}{5}u^{5/2} + \frac{2}{3}u^{3/2}]_0^1 = \frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{16}{15}$.

68. Soit $u = 1 + 2x$, donc $x = \frac{1}{2}(u-1)$ et $du = 2dx$. Lorsque $x = 0$, $u = 1$; lorsque $x = 4$, $u = 9$. Il s'ensuit que

$$\int_0^4 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+2x}} = \int_1^9 \frac{\frac{1}{2}(u-1)}{\sqrt{u}}\frac{du}{2} = \tfrac{1}{4}\int_1^9 (u^{1/2} - u^{-1/2})du = \tfrac{1}{4}[\tfrac{2}{3}u^{3/2} - 2u^{1/2}]_1^9 = \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{2}{3}[u^{3/2} - 3u^{1/2}]_1^9$$
$$= \tfrac{1}{6}[(27-9) - (1-3)] = \tfrac{20}{6} = \tfrac{10}{3}$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

69. Soit $u = \ln x$, donc $du = \dfrac{dx}{x}$. Lorsque $x = e$, $u = 1$; lorsque $x = e^4$; $u = 4$. Il s'ensuit que $\int_e^{e^4} \dfrac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \int_1^4 u^{-1/2}\,du = 2[u^{1/2}]_1^4 = 2(2-1) = 2$.

70. Soit $u = \arcsin x$, donc $du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Lorsque $x = 0$, $u = 0$; lorsque $x = \frac{1}{2}$, $u = \frac{\pi}{6}$. Il s'ensuit que $\int_0^{1/2} \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\pi/6} u\;du = \left[\dfrac{u^2}{2}\right]_0^{\pi/6} = \dfrac{\pi^2}{72}$.

71. Soit $u = e^z + z$, donc $du = (e^z + 1)\,dz$. Lorsque $z = 0$, $u = 1$; lorsque $z = 1$, $u = e + 1$. Il s'ensuit que $\int_0^1 \dfrac{e^z+1}{e^z+z}\,dz = \int_1^{e+1} \dfrac{1}{u}\,du = [\ln|u|]_1^{e+1} = \ln|e+1| - \ln|1| = \ln(e+1)$.

72. Soit $u = \dfrac{2\pi t}{T} - \alpha$, donc $du = \dfrac{2\pi}{T}\,dt$. Lorsque $t = 0$, $u = -\alpha$; lorsque $t = \dfrac{T}{2}$, $u = \pi - \alpha$. Il s'ensuit que

$$\int_0^{T/2} \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \alpha\right)dt = \int_{-\alpha}^{\pi-\alpha} \sin u\left(\frac{T}{2\pi}\,du\right) = \frac{T}{2\pi}[-\cos u]_{-\alpha}^{\pi-\alpha} = -\frac{T}{2\pi}[\cos(\pi-\alpha) - \cos(-\alpha)]$$
$$= -\frac{T}{2\pi}(-\cos\alpha - \cos\alpha) = -\frac{T}{2\pi}(-2\cos\alpha) = \frac{T}{\pi}\cos\alpha$$

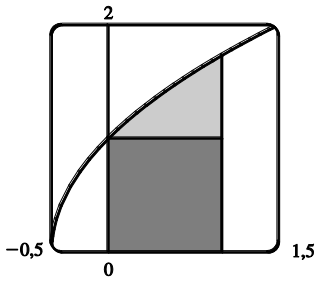
73. Soit $u = 1 + \sqrt{x}$, donc $du = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \;\Rightarrow\; 2\sqrt{x}\;du = dx \;\Rightarrow\; 2(u-1)du = dx$. Lorsque $x = 0$, $u = 1$; lorsque $x = 1$, $u = 2$. Il s'ensuit que

$$\int_0^1 \frac{dx}{\left(1+\sqrt{x}\right)^4} = \int_1^2 \frac{1}{u^4}\cdot[2(u-1)du] = 2\int_1^2\left(\frac{1}{u^3} - \frac{1}{u^4}\right)du = 2\left[-\frac{1}{2u^2} + \frac{1}{3u^3}\right]_1^2$$
$$= 2[(-\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{24} - (-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3})] = 2(\tfrac{1}{12}) = \tfrac{1}{6}$$

74. Si $f(x) = \sin\sqrt[3]{x}$, Alors, $f(-x) = \sin\sqrt[3]{-x} = \sin\left(-\sqrt[3]{x}\right) = -\sin\sqrt[3]{x} = -f(x)$, donc f est une fonction impaire. De plus, selon le théorème 7 b), $I = \int_{-2}^3 \sin\sqrt[3]{x}\;dx = \int_{-2}^2 \sin\sqrt[3]{x}\;dx + \int_2^3 \sin\sqrt[3]{x}\;dx = I_1 + I_2$. $I_1 = 0$. Afin d'évaluer I_2, il est à remarquer que $2 \le x \le 3 \;\Rightarrow\; \sqrt[3]{2} \le \sqrt[3]{x} \le \sqrt[3]{3}$ [$\approx 1{,}44$] $\Rightarrow\; 0 \le \sqrt[3]{x} \le \frac{\pi}{2}$ [$\approx 1{,}57$] $\Rightarrow\; \sin 0 \le \sin\sqrt[3]{x} \le \sin\frac{\pi}{2}$ [puisque la valeur du sinus augmente sur cet intervalle] $\Rightarrow\; 0 \le \sin\sqrt[3]{x} \le 1$. Selon les propriétés de l'intégrale, $8{,}0(3-2) \le I_2 \le 1(3-2) \;\Rightarrow\; 0 \le I_2 \le 1 \;\Rightarrow\; 0 \le I \le 1$.

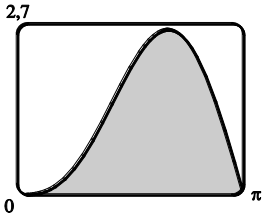
75. Le graphique semble indiquer que l'aire sous la courbe mesure environ $1 + (\text{légèrement supérieur à } \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 0{,}7)$, ou environ 1,4. L'aire exacte est donnée par $A = \int_0^1 \sqrt{2x+1}\;dx$. Soit $u = 2x + 1$, donc $du = 2\,dx$. Les bornes changent à $2 \cdot 0 + 1 = 1$ et $2 \cdot 1 + 1 = 3$, et $A = \int_1^3 \sqrt{u}\,(\frac{1}{2}\,du) = \frac{1}{2}[\frac{2}{3}u^{3/2}]_1^3 = \frac{1}{3}\left(3\sqrt{3} - 1\right) = \sqrt{3} - \frac{1}{3} \approx 1{,}399$.

 © Groupe Modulo inc., 2013



76. Le graphique semble indiquer que l'aire sous la courbe mesure près de $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2{,}6$, ou environ 4. L'aire exacte est donnée par

$$A = \int_0^{\pi} (2\sin x - \sin 2x)dx = -2[\cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin 2x \, dx$$
$$= -2(-1-1) - 0 = 4$$



Remarque: $\int_0^{\pi} \sin 2x \, dx = 0$ puisque le graphique de $y = \sin 2x$ indique clairement que $\int_{\pi/2}^{\pi} \sin 2x \, dx = -\int_0^{\pi/2} \sin 2x \, dx$.

77. Exprimez d'abord l'intégrale sous la forme d'une somme de deux intégrales:

Selon le théorème 7 b), $I = \int_{-2}^{2} (x+3)\sqrt{4-x^2}dx = I_1 + I_2 = \int_{-2}^{2} x\sqrt{4-x^2}dx + \int_{-2}^{2} 3\sqrt{4-x^2}dx$. $I_1 = 0$ puisque $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ est une fonction impaire et que nous intégrons de $x = -2$ à $x = 2$. Nous interprétons I_2 comme étant trois fois l'aire d'un demi-cercle de rayon 2, donc $I = 0 + 3 \cdot \frac{1}{2}(\pi \cdot 2^2) = 6\pi$.

78. Soit $u = x^2$. Alors, $du = 2x \, dx$ et les bornes demeurent les mêmes ($0^2 = 0$ et $1^2 = 1$), donc $I = \int_0^1 x\sqrt{1-x^4}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1-u^2}du$. Cette intégrale peut cependant être interprétée comme l'aire d'un quart de cercle de rayon 1. Donc, $I = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}(\pi \cdot 1^2) = \frac{1}{8}\pi$.

79. Première figure Soit $u = \sqrt{x}$, donc $x = u^2$ et $dx = 2u \, du$. Lorsque $x = 0$, $u = 0$; lorsque $x = 1$, $u = 1$. Il s'ensuit que $A_1 = \int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx = \int_0^1 e^u(2u \, du) = 2\int_0^1 ue^u du$.

Deuxième figure $A_2 = \int_0^1 2xe^x dx = 2\int_0^1 ue^u du$.

Troisième figure Soit $u = \sin x$, donc $du = \cos x \, dx$. Lorsque $x = 0$, $u = 0$; lorsque $x = \frac{\pi}{2}$, $u = 1$. Il s'ensuit que $A_3 = \int_0^{\pi/2} e^{\sin x} \sin 2x \, dx = \int_0^{\pi/2} e^{\sin x}(2\sin x \cos x)dx = \int_0^1 e^u(2u \, du) = 2\int_0^1 ue^u du$.

Comme $A_1 = A_2 = A_3$, les trois aires sont égales.

 © Groupe Modulo inc., 2013

80. Soit $u = \dfrac{\pi t}{12}$. Alors, $du = \dfrac{\pi}{12}dt$ et

$$\int_0^{24} R(t)dt = \int_0^{24}\left[85 - 0{,}18\cos\theta\left(\frac{\pi t}{12}\right)\right]dt = \int_0^{2\pi}(85 - 0{,}18\cos u)\left(\frac{12}{\pi}du\right) = \frac{12}{\pi}[85u - 0{,}18\sin u]_0^{2\pi}$$
$$= \frac{12}{\pi}[(85\cdot 2\pi - 0) - (0 - 0)] = 2040 \text{ kcal}$$

81. Le taux est mesuré en litres par minute. L'intégration de $t = 0$ minute à $t = 60$ minutes permettra de calculer la quantité totale de pétrole (en litres) qui s'écoule du réservoir au cours de la première heure.

$$\int_0^{60} r(t)dt = \int_0^{60} 100e^{-0{,}01t}dt \quad [u = -0{,}01t,\ du = -0{,}01dt]$$
$$= 100\int_0^{-0{,}6} e^u(-100du) = -10\,000[e^u]_0^{-0{,}6} = -10\,000(e^{-0{,}6} - 1) \approx 4\,511{,}9 \approx 4\,512 \text{ litres}$$

82. Soit $r(t) = ae^{bt}$ avec $a = 450\,268$, $b = 1{,}125\,67$ et $n(t)$ = la population après t heures. Comme $r(t) = n'(t)$, $\int_0^3 r(t)dt = n(3) - n(0)$ est la variation totale de la population après trois heures. Puisque la population initiale compte 400 bactéries, la population sera

$$n(3) = 400 + \int_0^3 r(t)dt = 400 + \int_0^3 ae^{bt}dt = 400 + \frac{a}{b}[e^{bt}]_0^3 = 400 + \frac{a}{b}(e^{3b} - 1)$$
$$\approx 400 + 11\,313 = 11\,713 \text{ bactéries}$$

83. Le volume d'air inhalé dans les poumons au temps t est

$$V(t) = \int_0^t f(u)du = \int_0^t \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{5}u\right)du = \int_0^{2\pi t/5}\frac{1}{2}\sin v\left(\frac{5}{2\pi}dv\right) \quad [\text{substituer } v = \tfrac{2\pi}{5}u, dv = \tfrac{2\pi}{5}du]$$
$$= \frac{5}{4\pi}[-\cos v]_0^{2\pi t/5} = \frac{5}{4\pi}\left[-\cos\left(\frac{2\pi}{5}t\right) + 1\right] = \frac{5}{4\pi}\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{5}t\right)\right] \text{ litres}$$

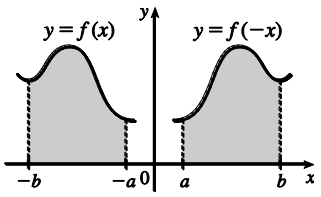
84. Nombre de calculatrices $= x(4) - x(2) = \int_2^4 5000[1 - 100(t+10)^{-2}]dt$
$$= 5\,000[t + 100(t+10)^{-1}]_2^4 = 5\,000[(4 + \tfrac{100}{14}) - (2 + \tfrac{100}{12})] \approx 4\,048$$

85. Soit $u = 2x$. Alors, $du = 2dx$, donc $\int_0^2 f(2x)dx = \int_0^4 f(u)(\frac{1}{2}du) = \frac{1}{2}\int_0^4 f(u)du = \frac{1}{2}(10) = 5$.

86. Soit $u = x^2$. Alors, $du = 2x\,dx$, donc $\int_0^3 xf(x^2)dx = \int_0^9 f(u)(\frac{1}{2}du) = \frac{1}{2}\int_0^9 f(u)du = \frac{1}{2}(4) = 2$.

87. Soit $u = -x$. Alors, $du = -dx$, donc $\int_a^b f(-x)dx = \int_{-a}^{-b} f(u)(-du) = \int_{-b}^{-a} f(u)du = \int_{-b}^{-a} f(x)dx$

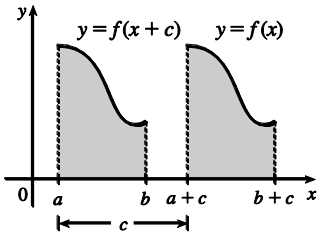
 © Groupe Modulo inc., 2013



Le tracé des graphiques montre que l'égalité découle du fait qu'il représente une réflexion de la courbe de la fonction *f*, et des bornes d'intégration, autour de l'axe des *y*.

88. Soit $u = x + c$. Alors, $du = dx$, donc

$$\int_a^b f(x+c)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(u)du = \int_{a+c}^{b+c} f(x)dx$$



Le tracé des graphiques montre que l'égalité découle du fait qu'il représente une translation, d'une distance *c*, de la courbe de la fonction *f*, et des bornes d'intégration.

89. Soit $u = 1 - x$. Alors, $x = 1 - u$ et $dx = -du$, donc $\int_0^1 x^a(1-x)^b dx = \int_1^0 (1-u)^a u^b(-du) = \int_0^1 u^b(1-u)^a du = \int_0^1 x^b(1-x)^a dx$.

90. Soit $u = \pi - x$. Alors, $du = -dx$. Lorsque $x = \pi$, $u = 0$ et lorsque $x = 0$, $u = \pi$. Donc,

$$\begin{aligned}\int_0^\pi xf(\sin x)dx &= -\int_\pi^0 (\pi-u)f(\sin(\pi-u))du = \int_0^\pi (\pi-u)f(\sin u)du \\ &= \pi\int_0^\pi f(\sin u)du - \int_0^\pi u\,f(\sin u)du = \pi\int_0^\pi f(\sin x)dx - \int_0^\pi x\,f(\sin x)dx \quad \Rightarrow\end{aligned}$$

$$2\int_0^\pi x\,f(\sin x)dx = \pi\int_0^\pi f(\sin x)dx \quad \Rightarrow \quad \int_0^\pi x\,f(\sin x)dx = \tfrac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx\,.$$

91. $\dfrac{x\sin x}{1+\cos^2 x} = x\cdot\dfrac{\sin x}{2-\sin^2 x} = x\,f(\sin x)$, où $f(t) = \dfrac{t}{2-t^2}$. Selon la question 90,

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \int_0^\pi x\,f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

Soit $u = \cos x$. Alors, $du = -\sin x\,dx$. Lorsque $x = \pi$, $u = -1$ et lorsque $x = 0$, $u = 1$. Donc,

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx &= -\frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^1 \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2}[\arctan u]_{-1}^1 \\ &= \frac{\pi}{2}\,[\arctan 1 - \arctan(-1)] = \frac{\pi}{2}\left[\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \frac{\pi^2}{4}\end{aligned}$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

92. a) $\int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx = \int_0^{\pi/2} f[\sin(\frac{\pi}{2} - x)]dx \quad [u = \frac{\pi}{2} - x, du = -dx]$

$= \int_{\pi/2}^{0} f(\sin u)(-du) = \int_0^{\pi/2} f(\sin u)du = \int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx$

Pour utiliser la règle du changement de variable dans le cas d'intégrales définies, il faut que la fonction f soit continue.

b) À la sous-question a), prenons $f(x) = x^2$, donc $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx$.

Or, $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx + \int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx = \int_0^{\pi/2} (\cos^2 x + \sin^2 x)dx = \int_0^{\pi/2} 1\, dx = [x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$, donc

$2\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx = \frac{\pi}{4} \quad \left[= \int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx\right]$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

1. Révision

Compréhension des concepts

1. a) $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$ est une expression qui définit une somme de Riemann pour une fonction f. x_i^* est un point dans le i[ème] sous-intervalle $[x_{i-1}, x_i]$, et Δx est la longueur des sous-intervalles.

b) Se référer à la figure 1 de la section 1.4.

c) À la section 1.4, se référer à la figure 3 et au paragraphe y afférent.

2. a) Se référer à la définition 1.4.2.

b) Se référer à la figure 2 de la section 1.4.

c) À la section 1.4, se référer à la figure 4 et au paragraphe y afférent (contient les termes « **aire nette** »).

3. Voir le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral à la page 50.

4. a) Voir le théorème de la variation nette à la page 57.

b) $\int_{t_1}^{t_2} r(t)dt$ représente la variation de la quantité d'eau dans le réservoir entre le temps t_1 et le temps t_2.

5. a) $\int_{60}^{120} v(t)dt$ représente le déplacement de la particule de $t = 60$ à $t = 120$ secondes.

b) $\int_{60}^{120} |v(t)|dt$ représente la distance parcourue par la particule de $t = 60$ à $t = 120$ secondes.

c) $\int_{60}^{120} a(t)dt$ représente la variation de la vitesse de la particule de $t = 60$ à $t = 120$ secondes.

6. a) $\int f(x)dx$ représente la famille de fonctions $\{F \mid F' = f\}$. La différence entre deux fonctions de cette famille est une constante.

b) La relation est donnée par le théorème de la variation nette : $\int_a^b f(x)dx = \left[\int f(x)dx\right]_a^b$ si la fonction f est continue sur [a, b].

7. Le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral produit l'énoncé exact de cette affirmation. Se référer à l'énoncé de ce théorème et au paragraphe subséquent à la fin de la section 1.5.

8. Se référer à la règle du changement de variable (1.7.4), qui affirme qu'il est permis de manipuler dx suivant un signe d'intégration comme s'il s'agissait d'une dérivée.

 © Groupe Modulo inc., 2013

Vrai ou faux

1. Vrai selon la propriété 2 de l'intégrale présentée à la section 1.4.

2. Faux. Comme contre-exemple, essayez $a = 0$, $b = 2$, $f(x) = g(x) = 1$.

3. Vrai selon la propriété 3 de l'intégrale présentée à la section 1.4.

4. Faux. On ne peut déplacer une variable de l'intérieur à l'extérieur du signe d'intégration. Par exemple, si on utilise $f(x) = 1$ sur l'intervalle [0, 1], $\int_0^1 x\, f(x)dx = \int_0^1 x\, dx = [\frac{1}{2}x^2]_0^1 = \frac{1}{2}$ (une constante), alors que $x\ \int_0^1 1\, dx = x[x]_0^1 = x \cdot 1 = x$ (une variable).

5. Faux. Par exemple, soit $f(x) = x^2$. Alors, $\int_{-1}^0 \sqrt{x^2}dx = \int_{-1}^0 x\, dx = \frac{1}{2}$, mais $\sqrt{\int_{-1}^0 x^2 dx} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

6. Vrai selon le théorème de la variation nette.

7. Vrai selon la propriété 7 de l'intégrale présentée à la section 1.4.

8. Faux. Par exemple, soit $a = 0$, $b = 1$, $f(x) = 3$, $g(x) = x$. $f(x) > g(x)$ pour tout x sur l'intervalle [0, 1], mais $f'(x) = 0 < 1 = g'(x)$ pour $x \in [0, 1]$.

9. Vrai. L'intégrande est une fonction impaire qui est continue sur l'intervalle [–1, 1]; le résultat découle donc du théorème 1.7.7 b).

10. Vrai.
$$\begin{aligned}\int_{-5}^5 (ax^2 + bx + c)dx &= \int_{-5}^5 (ax^2 + c)dx + \int_{-5}^5 bx\, dx \\ &= 2\int_0^5 (ax^2 + c)dx \text{ [selon le théorème 1.7.7a)]} + 0 \text{ [selon le théorème 1.7.7b)]}\end{aligned}$$

11. Faux. Par exemple, la fonction $y = |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$, mais n'a pas de dérivée en $x = 0$.

12. Vrai selon le TFC1.

13. Vrai selon la propriété 5 des intégrales.

14. Faux. Par exemple, $\int_0^1 (x - \frac{1}{2})dx = [\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x]_0^1 = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) - (0 - 0) = 0$, mais $f(x) = x - \frac{1}{2} \neq 0$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

15. Faux. $\int_a^b f(x)dx$ est une constante, donc $\frac{d}{dx}\left(\int_a^b f(x)dx\right) = 0$, et non $f(x)$ [à moins que $f(x) = 0$].

Effectuez une comparaison minutieuse de l'énoncé de la question avec le TFC1, qui suppose que la borne supérieure de l'intégrale est x.

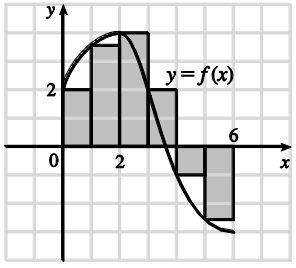
16. Faux. Si vous vous référez au paragraphe qui précède la remarque 4 et à la figure 4 de la section 1.4, vous remarquerez que $y = x - x^3 < 0$ pour $1 < x \leq 2$.

17. Faux. La fonction $f(x) = 1/x^4$ n'est pas bornée l'intervalle $[-2, 1]$. Elle a une discontinuité asymptotique en $x = 0$. On ne peut pas appliquer le TFC2. (De plus, si l'intégrale existait, on s'attendrait à une valeur positive, selon la propriété 6 des intégrales.)

18. Faux. Par exemple, si $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad -1 \leq x < 0 \end{cases}$, alors la fonction f possède une discontinuité de première espèce (saut) à 0, mais $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ existe et est égale à 1.

Exercices récapitulatifs

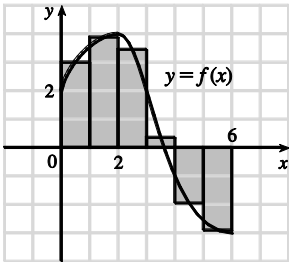
1. a)



$$G_6 = \sum_{i=1}^{6} f(x_{i-1})\,\Delta x \quad [\Delta x = \tfrac{6-0}{6} = 1]$$
$$= f(x_0)\cdot 1 + f(x_1)\cdot 1 + f(x_2)\cdot 1 + f(x_3)\cdot 1 + f(x_4)\cdot 1 + f(x_5)\cdot 1$$
$$\approx 2 + 3{,}5 + 4 + 2 + (-1) + (-2{,}5) = 8$$

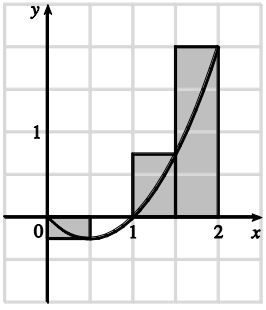
La somme de Riemann représente la somme des aires des quatre rectangles situés au-dessus de l'axe des x moins la somme des aires des deux rectangles situés sous l'axe des x.

 © Groupe Modulo inc., 2013

b) 

$$M_6 = \sum_{i=1}^{6} f(\bar{x}_i)\Delta x \quad [\Delta x = \tfrac{6-0}{6} = 1]$$
$$= f(\bar{x}_1)\cdot 1 + f(\bar{x}_2)\cdot 1 + f(\bar{x}_3)\cdot 1 + f(\bar{x}_4)\cdot 1 + f(\bar{x}_5)\cdot 1 + f(\bar{x}_6)\cdot 1$$
$$= f(0{,}5) + f(1{,}5) + f(2{,}5) + f(3{,}5) + f(4{,}5) + f(5{,}5)$$
$$\approx 3 + 3{,}9 + 3{,}4 + 0{,}3 + (-2) + (-2{,}9) = 5{,}7$$

La somme de Riemann représente la somme des aires des quatre rectangles situés au-dessus de l'axe des *x* moins la somme des aires des deux rectangles situés sous l'axe des *x*.

2. a) 

$f(x) = x^2 - x$ et $\Delta x = \tfrac{2-0}{4} = 0{,}5 \quad \Rightarrow$

$$D_4 = 0{,}5f(0{,}5) + 0{,}5f(1) + 0{,}5f(1{,}5) + 0{,}5f(2)$$
$$= 0{,}5(-0{,}25 + 0 + 0{,}75 + 2) = 1{,}25$$

La somme de Riemann représente la somme des aires des deux rectangles situés au-dessus de l'axe des *x* moins l'aire du rectangle situé sous l'axe des *x*. (Le deuxième rectangle sous l'axe des *x* a une aire nulle.)

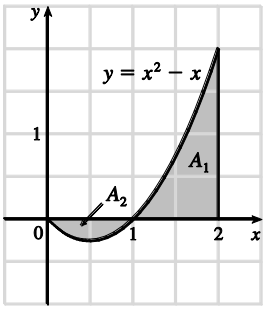
b) $\displaystyle\int_0^2 (x^2 - x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \quad [\Delta x = 2/n \text{ and } x_i = 2i/n]$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{4i^2}{n^2} - \frac{2i}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\left[\frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} i\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{8}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{4}{3}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{2n+1}{n} - 2\cdot\frac{n+1}{n}\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) - 2\left(1+\frac{1}{n}\right) = \tfrac{4}{3}\cdot 1\cdot 2 - 2\cdot 1 = \tfrac{2}{3}$$

c) $\displaystyle\int_0^2 (x^2 - x)dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2\right]_0^2 = \left(\tfrac{8}{3} - 2\right) = \tfrac{2}{3}$

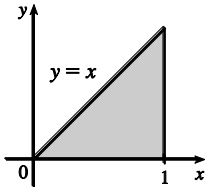
 © Groupe Modulo inc., 2013

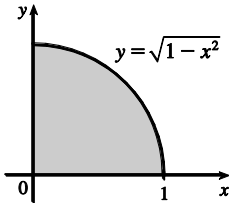
d)



$\int_0^2 (x^2 - x)dx = A_1 - A_2$, où A_1 et A_2 sont les aires des surfaces ombragées dans le graphique.

3. $\int_0^1 \left(x + \sqrt{1-x^2}\right)dx = \int_0^1 x\,dx + \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = I_1 + I_2$. I_1 peut être interprété comme l'aire du triangle qui apparaît dans le graphique et I_2 peut être interprété comme l'aire du quart de cercle. Aire $= \frac{1}{2}(1)(1) + \frac{1}{4}(\pi)(1)^2 = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$.





4. Sur l'intervalle $[0, \pi]$, $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sin x_i \Delta x = \int_0^{\pi} \sin x\,dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -(-1) - (-1) = 2$.

5. $\int_0^6 f(x)dx = \int_0^4 f(x)dx + \int_4^6 f(x)dx \quad \Rightarrow \quad 10 = 7 + \int_4^6 f(x)dx \quad \Rightarrow \quad \int_4^6 f(x)dx = 10 - 7 = 3$

6. a) $\int_1^5 (x + 2x^5)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \quad \left[\Delta x = \frac{5-1}{n} = \frac{4}{n}, x_i = 1 + \frac{4i}{n}\right]$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(1 + \frac{4i}{n}\right) + 2\left(1 + \frac{4i}{n}\right)^5\right] \cdot \frac{4}{n} \overset{\text{CAS}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1\,305n^4 + 3\,126n^3 + 2\,080n^2 - 256}{n^3} \cdot \frac{4}{n}$$

$$= 5220$$

b) $\int_1^5 (x + 2x^5)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{6}x^6\right]_1^5 = \left(\frac{25}{2} + \frac{15\,625}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 12 + 5\,208 = 5220$

7. Constatez tout d'abord que soit *a*, soit *b*, doit être la courbe de $\int_0^x f(t)dt$, puisque $\int_0^0 f(t)dt = 0$ et $c(0) \neq 0$. Remarquez ensuite que $b > 0$ lorsque *c* est croissante, et que $c > 0$ lorsque *a* est croissante. Il s'ensuit que *c* est la courbe de $f(x)$, *b* est la courbe de $f'(x)$ et *a* est la courbe de $\int_0^x f(t)dt$.

8. a) Selon le théorème de la variation nette (TFC2), $\int_0^1 \frac{d}{dx}(e^{\arctan x})dx = [e^{\arctan x}]_0^1 = e^{\pi/4} - 1$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

b) $\frac{d}{dx}\int_0^1 e^{\arctan x}dx = 0$ puisque c'est la dérivée d'une constante.

c) Selon le TFC1, $\frac{d}{dx}\int_0^x e^{\arctan t}dt = e^{\arctan x}$.

9. $\int_1^2 (8x^3+3x^2)dx = [8\cdot\frac{1}{4}x^4 + 3\cdot\frac{1}{3}x^3]_1^2 = [2x^4+x^3]_1^2 = (2\cdot 2^4+2^3)-(2+1) = 40-3 = 37$

10. $\int_0^T (x^4-8x+7)dx = [\frac{1}{5}x^5 - 4x^2 + 7x]_0^T = (\frac{1}{5}T^5 - 4T^2 + 7T) - 0 = \frac{1}{5}T^5 - 4T^2 + 7T$

11. $\int_0^1 (1-x^9)dx = [x - \frac{1}{10}x^{10}]_0^1 = (1-\frac{1}{10}) - 0 = \frac{9}{10}$

12. Soit $u = 1-x$, donc $du = -dx$ et $dx = -du$. Lorsque $x = 0$, $u = 1$; lorsque $x = 1$, $u = 0$. Il s'ensuit que $\int_0^1 (1-x)^9 dx = \int_1^0 u^9(-du) = \int_0^1 u^9 du = \frac{1}{10}[u^{10}]_0^1 = \frac{1}{10}(1-0) = \frac{1}{10}$.

13. $\int_1^9 \frac{\sqrt{u}-2u^2}{u}du = \int_1^9 (u^{-1/2}-2u)du = [2u^{1/2}-u^2]_1^9 = (6-81)-(2-1) = -76$

14. $\int_0^1 \left(\sqrt[4]{u}+1\right)^2 du = \int_0^1 (u^{1/2}+2u^{1/4}+1)du = [\frac{2}{3}u^{3/2} + \frac{8}{5}u^{5/4} + u]_0^1 = (\frac{2}{3}+\frac{8}{5}+1) - 0 = \frac{49}{15}$

15. Soit $u = y^2 + 1$, donc $du = 2y\,dy$ et $y\,dy = \frac{1}{2}du$. Lorsque $y = 0$, $u = 1$; lorsque $y = 1$, $u = 2$. Il s'ensuit que $\int_0^1 y(y^2+1)^5 dy = \int_1^2 u^5(\frac{1}{2}du) = \frac{1}{2}[\frac{1}{6}u^6]_1^2 = \frac{1}{12}(64-1) = \frac{63}{12} = \frac{21}{4}$.

16. Soit $u = 1 + y^3$, donc $du = 3y^2\,dy$ et $y^2dy = \frac{1}{3}du$. Lorsque $y = 0$, $u = 1$; lorsque $y = 2$, $u = 9$. Il s'ensuit que $\int_0^2 y^2\sqrt{1+y^3}dy = \int_0^9 u^{1/2}(\frac{1}{3}du) = \frac{1}{3}[\frac{2}{3}u^{3/2}]_1^9 = \frac{2}{9}(27-1) = \frac{52}{9}$.

17. $\int_1^5 \frac{dt}{(t-4)^2}$ n'existe pas parce que la fonction $f(t) = \frac{1}{(t-4)^2}$ a une discontinuité asymptotique en $t = 4$, c'est-à-dire que la fonction f est discontinue sur l'intervalle [1, 5].

18. Soit $u = 3\pi t$, donc $du = 3\pi\,dt$. Lorsque $t = 0$, $u = 1$; lorsque $t = 1$, $u = 3\pi$. Il s'ensuit que $\int_0^1 \sin(3\pi t)dt = \int_0^{3\pi} \sin u\left(\frac{1}{3\pi}du\right) = \frac{1}{3\pi}[-\cos u]_0^{3\pi} = -\frac{1}{3\pi}(-1-1) = \frac{2}{3\pi}$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

19. Soit $u = v^3$, donc $du = 3v^2\,dv$. Lorsque $v = 0$, $u = 0$; lorsque $v = 1$, $u = 1$. Il s'ensuit que $\int_0^1 v^2\cos(v^3)dv = \int_0^1 \cos u(\frac{1}{3}du) = \frac{1}{3}[\sin u]_0^1 = \frac{1}{3}(\sin 1 - 0) = \frac{1}{3}\sin 1$.

20. Selon le théorème 1.7.7 b), $\int_{-1}^{1}\frac{\sin x}{1+x^2}dx = 0$, puisque $f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$ est une fonction impaire.

21. Selon le théorème 1.7.7 b), $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{t^4\tan t}{2+\cos t}dt = 0$, puisque $f(t) = \frac{t^4\tan t}{2+\cos t}$ est une fonction impaire.

22. Soit $u = e^x$, donc $du = e^x\,dx$. Lorsque $x = 0$, $u = 1$; lorsque $x = 1$, $u = e$. Il s'ensuit que $\int_0^1\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \int_1^e\frac{1}{1+u^2}du = [\arctan u]_1^e = \arctan e - \arctan 1 = \arctan e - \frac{\pi}{4}$.

23. $\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx = \int\left(\frac{1}{x}-1\right)^2 dx = \int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+1\right)dx = -\frac{1}{x} - 2\ln|x| + x + C$

24. $\int_1^{10}\frac{x}{x^2-4}dx$ n'existe pas parce que la fonction $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$ a une discontinuité asymptotique en $x = 2$, c'est-à-dire que la fonction f est discontinue sur l'intervalle [1, 10].

25. Soit $u = x^2 + 4x$. Alors, $du = (2x + 4)\,dx = 2(x + 2)\,dx$, donc $\int\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}dx = \int u^{-1/2}(\frac{1}{2}du) = \frac{1}{2}\cdot 2u^{1/2} + C = \sqrt{u} + C = \sqrt{x^2+4x} + C$.

26. Soit $u = 1 + \cot x$. Alors, $du = -\csc^2 x\,dx$, donc $\int\frac{\csc^2 x}{1+\cot x}dx = \int\frac{1}{u}(-du) = -\ln|u| + C = -\ln|1+\cot x| + C$.

27. Soit $u = \sin \pi t$. Alors, $du = \pi\cos \pi t\,dt$, donc $\int\sin \pi t\cos \pi t\;dt = \int u(\frac{1}{\pi}du) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2\pi}(\sin \pi t)^2 + C$.

28. Soit $u = \cos x$. Alors, $du = -\sin x\,dx$, donc $\int\sin x\cos(\cos x)dx = -\int\cos u\;du = -\sin u + C = -\sin(\cos x) + C$.

29. Soit $u = \sqrt{x}$. Alors, $du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$, donc $\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = 2\int e^u du = 2e^u + C = 2e^{\sqrt{x}} + C$.

30. Soit $u = \ln x$. Alors, $du = \frac{dx}{x}$, donc $\int\frac{\cos(\ln x)}{x}dx = \int\cos u\;du = \sin u + C = \sin(\ln x) + C$.

31. Soit $u = \ln(\cos x)$. Alors, $du = \frac{-\sin x}{\cos x}dx = -\tan x\;dx$, donc $\int\tan x\ln(\cos x)dx = -\int u\;du = -\frac{1}{2}u^2 + C = -\frac{1}{2}[\ln(\cos x)]^2 + C$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

32. Soit $u = x^2$. Alors, $du = 2x\,dx$, donc $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2}\arcsin u + C = \frac{1}{2}\arcsin(x^2) + C$.

33. Soit $u = 1 + x^4$. Alors, $du = 4x^3\,dx$, donc $\int \frac{x^3}{1+x^4}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{4}\ln|u| + C = \frac{1}{4}\ln(1+x^4) + C$.

34. Soit $u = 1 + 4x$. Alors, $du = 4\,dx$, donc $\int \sin(1+4x)dx = \frac{1}{4}\int \sin u\ du = \frac{1}{4}\cos u + C = \frac{1}{4}\cos(1+4x) + C$.

35. Soit $u = 1 + \sec\theta$. Alors, $du = \sec\theta \tan\theta\,d\theta$, donc $\int \frac{\sec\theta\tan\theta}{1+\sec\theta}d\theta = \int \frac{1}{1+\sec\theta}(\sec\theta\tan\theta d\theta) = \int \frac{1}{u}du = \ln|u| + C = \ln|1+\sec\theta| + C$.

36. Soit $u = 1 + \tan t$, donc $du = \sec^2 t\,dt$. Lorsque $t = 0$, $u = 1$; lorsque $t = \frac{\pi}{4}$, $u = 2$. Il s'ensuit que $\int_0^{\pi/4}(1+\tan t)^3\sec^2 t dt = \int_1^2 u^3 du = [\frac{1}{4}u^4]_1^2 = \frac{1}{4}(2^4 - 1^4) = \frac{1}{4}(16-1) = \frac{15}{4}$.

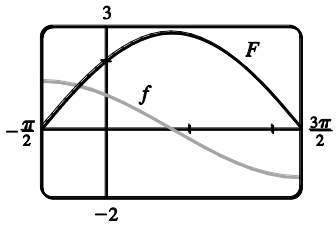
37. Puisque $x^2 - 4 < 0$ pour $0 \le x < 2$ et $x^2 - 4 > 0$ pour $2 < x \le 3$, nous obtenons $|x^2 - 4| = -(x^2 - 4) = 4 - x^2$ pour $0 \le x < 2$ et $|x^2 - 4| = x^2 - 4$ pour $2 < x \le 3$. Il s'ensuit que

$$\int_0^3 |x^2 - 4|\,dx = \int_0^2 (4 - x^2)dx + \int_2^3 (x^2 - 4)dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_2^3$$
$$= (8 - \tfrac{8}{3}) - 0 + (9 - 12) - (\tfrac{8}{3} - 8) = \tfrac{16}{3} - 3 + \tfrac{16}{3} = \tfrac{32}{3} - \tfrac{9}{3} = \tfrac{23}{3}$$

38. Puisque $\sqrt{x} - 1 < 0$ pour $0 \le x < 1$ et $\sqrt{x} - 1 > 0$ pour $1 < x \le 4$, nous obtenons $\left|\sqrt{x} - 1\right| = -\left(\sqrt{x} - 1\right) = 1 - \sqrt{x}$ pour $0 \le x < 1$ et $\left|\sqrt{x} - 1\right| = \sqrt{x} - 1$ pour $1 < x \le 4$. Il s'ensuit que

$$\int_0^4 \left|\sqrt{x} - 1\right| dx = \int_0^1 \left(1 - \sqrt{x}\right) dx + \int_1^4 \left(\sqrt{x} - 1\right)dx = \left[x - \tfrac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1 + \left[\tfrac{2}{3}x^{3/2} - x\right]_1^4$$
$$= (1 - \tfrac{2}{3}) - 0 + (\tfrac{16}{3} - 4) - (\tfrac{2}{3} - 1) = \tfrac{1}{3} + \tfrac{16}{3} - 4 + \tfrac{1}{3} = 6 - 4 = 2$$

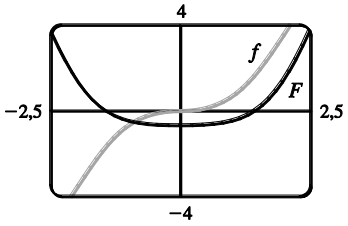
39. Soit $u = 1 + \sin x$. Alors, $du = \cos x\,dx$, donc $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\sin x}} = \int u^{-1/2}du = 2u^{1/2} + C = 2\sqrt{1+\sin x} + C$.



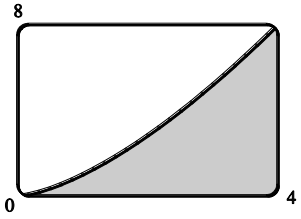
40. Soit $u = x^2 + 1$. Alors, $x^2 = u - 1$ et $x\,dx = \frac{1}{2}du$, donc

 © Groupe Modulo inc., 2013

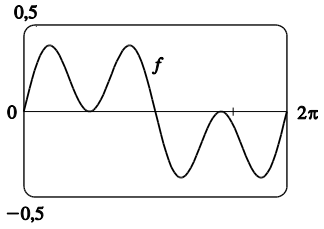
$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx = \int \frac{(u-1)}{\sqrt{u}}(\tfrac{1}{2}du) = \frac{1}{2}\int (u^{1/2} - u^{-1/2})du$$
$$= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2}{3}u^{3/2} - 2u^{1/2}\right) + C = \tfrac{1}{3}(x^2+1)^{3/2} - (x^2+1)^{1/2} + C$$
$$= \tfrac{1}{3}(x^2+1)^{1/2}[(x^2+1) - 3] + C = \tfrac{1}{3}\sqrt{x^2+1}(x^2-2) + C$$



41. Le graphique semble indiquer que l'aire sous la courbe $y = x\sqrt{x}$ entre $x = 0$ et $x = 4$ est quelque peu inférieure à la moitié de l'aire d'un rectangle de dimensions 8 par 4, et qu'elle est donc probablement égale à environ 13 ou 14. Pour trouver la valeur exacte, nous évaluons $\int_0^4 x\sqrt{x}\ dx = \int_0^4 x^{3/2}dx = \left[\tfrac{2}{5}x^{5/2}\right]_0^4 = \tfrac{2}{5}(4)^{5/2} = \tfrac{64}{5} = 12{,}8$.



42. Le graphique semble indiquer que $\int_0^{2\pi} \cos^2 x \sin x\ dx$ est égal à 0. Pour évaluer l'intégrale, posons $u = \cos x \quad \Rightarrow \quad du = -\sin x\ dx$. Il s'ensuit que $I = \int_1^1 u^2(-du) = 0$.



43. $F(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1+t^3}dt \quad \Rightarrow \quad F'(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x \frac{t^2}{1+t^3}dt = \frac{x^2}{1+x^3}$

44. $F(x) = \int_x^1 \sqrt{t+\sin t}\,dt = -\int_1^x \sqrt{t+\sin t}\,dt \quad \Rightarrow \quad F'(x) = -\frac{d}{dx}\int_1^x \sqrt{t+\sin t}\,dt = -\sqrt{x+\sin x}$

45. Soit $u = x^4$. Alors, $\frac{du}{dx} = 4x^3$. De plus, $\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{du}\frac{du}{dx}$, donc $g'(x) = \frac{d}{dx}\int_0^{x^4} \cos(t^2)dt = \frac{d}{du}\int_0^u \cos(t^2)dt \cdot \frac{du}{dx} = \cos(u^2)\frac{du}{dx} = 4x^3\cos(x^8)$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

46. Soit $u = \sin x$. Alors, $\frac{du}{dx} = \cos x$. De plus, $\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{du}\frac{du}{dx}$, donc

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\int_1^{\sin x} \frac{1-t^2}{1+t^4}dt = \frac{d}{du}\int_1^u \frac{1-t^2}{1+t^4}dt \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1-u^2}{1+u^4}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{1-\sin^2 x}{1+\sin^4 x}\cdot\cos x = \frac{\cos^3 x}{1+\sin^4 x}$$

47. $y = \int_{\sqrt{x}}^x \frac{e^t}{t}dt = \int_{\sqrt{x}}^1 \frac{e^t}{t}dt + \int_1^x \frac{e^t}{t}dt = -\int_1^{\sqrt{x}} \frac{e^t}{t}dt + \int_1^x \frac{e^t}{t}dt \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\int_1^{\sqrt{x}} \frac{e^t}{t}dt\right) + \frac{d}{dx}\left(\int_1^x \frac{e^t}{t}dt\right)$. Soit $u = \sqrt{x}$.

Alors, $\frac{d}{dx}\int_1^{\sqrt{x}} \frac{e^t}{t}dt = \frac{d}{dx}\int_1^u \frac{e^t}{t}dt = \frac{d}{du}\left(\int_1^u \frac{e^t}{t}dt\right)\frac{du}{dx} = \frac{e^u}{u}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2x}$, donc $\frac{dy}{dx} = -\frac{e^{\sqrt{x}}}{2x} + \frac{e^x}{x} = \frac{2e^x - e\sqrt{x}}{2x}$.

48. $y = \int_{2x}^{3x+1} \sin(t^4)dt = \int_{2x}^0 \sin(t^4)dt + \int_0^{3x+1} \sin(t^4)dt = \int_0^{3x+1} \sin(t^4)dt - \int_0^{2x} \sin(t^4)dt \quad \Rightarrow$

$$y' = \sin[(3x+1)^4]\cdot\frac{d}{dx}(3x+1) - \sin[(2x)^4]\cdot\frac{d}{dx}(2x) = 3\sin[(3x+1)^4] - 2\sin[(2x)^4]$$

49. Si $1 \le x \le 3$, alors $\sqrt{1^2+3} \le \sqrt{x^2+3} \le \sqrt{3^2+3} \quad \Rightarrow \quad 2 \le \sqrt{x^2+3} \le 2\sqrt{3}$, donc $2(3-1) \le \int_1^3 \sqrt{x^2+3}dx \le 2\sqrt{3}(3-1)$, c'est-à-dire $4 \le \int_1^3 \sqrt{x^2+3}dx \le 4\sqrt{3}$.

50. Si $3 \le x \le 5$, alors $4 \le x+1 \le 6$ et $\frac{1}{6} \le \frac{1}{x+1} \le \frac{1}{4}$, donc $\frac{1}{6}(5-3) \le \int_3^5 \frac{1}{x+1}dx \le \frac{1}{4}(5-3)$, c'est-à-dire $\frac{1}{3} \le \int_3^5 \frac{1}{x+1}dx \le \frac{1}{2}$.

51. $0 \le x \le 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \le \cos x \le 1 \quad \Rightarrow \quad x^2\cos x \le x^2 \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 x^2\cos x\,dx \le \int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}[x^3]_0^1 = \frac{1}{3}$ [propriété 7].

52. Sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, x est croissante et $\sin x$ est décroissante, donc $\frac{\sin x}{x}$ est décroissante. Il s'ensuit que la valeur maximale de $\frac{\sin x}{x}$ sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ est $\frac{\sin(\pi/4)}{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}/2}{\pi/4} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$. Selon la propriété 8, avec $M = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$, nous obtenons $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}dx \le \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

53. $\cos x \le 1 \quad \Rightarrow \quad e^x\cos x \le e^x \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 e^x\cos x\,dx \le \int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e - 1$

54. Pour $0 \le x \le 1$, $0 \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}$, donc $\int_0^1 x\arcsin x\,dx \le \int_0^1 x(\frac{\pi}{2})dx = [\frac{\pi}{4}x^2]_0^1 = \frac{\pi}{4}$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

55. $\Delta x = (3-0)/6 = \frac{1}{2}$; les extrémités des sous-intervalles sont donc 0, $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, 2, $\frac{5}{2}$ et 3, et les milieux des sous-intervalles sont $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{9}{4}$ et $\frac{11}{4}$. La méthode des milieux des sous-intervalles produit $\int_0^3 \sin(x^3)dx \approx \sum_{i=1}^{6} f(\bar{x}_i)\,\Delta x = \frac{1}{2}[\sin(\frac{1}{4})^3 + \sin(\frac{3}{4})^3 + \sin(\frac{5}{4})^3 + \sin(\frac{7}{4})^3 + \sin(\frac{9}{4})^3 + \sin(\frac{11}{4})^3] \approx 0,280\,981$.

56. a) Déplacement $= \int_0^5 (t^2 - t)dt = [\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2]_0^5 = \frac{125}{3} - \frac{25}{2} = \frac{175}{6} = 29,1\overline{6}$ mètres

b) Distance parcourue $= \int_0^5 |t^2 - t|\,dt = \int_0^5 |t(t-1)|\,dt = \int_0^1 (t - t^2)\,dt + \int_1^5 (t^2 - t)dt$

$= [\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3]_0^1 + [\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2]_1^5 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 0 + (\frac{125}{3} - \frac{25}{2}) - (\frac{1}{3} - \frac{1}{2}) = \frac{177}{6} = 29,5$ mètres

57. Il est à noter que $r(t) = b'(t)$, où $b(t)$ = le nombre de barils de pétrole consommés jusqu'au temps t. Donc, selon le théorème de la variation nette, $\int_0^8 r(t)dt = b(8) - b(0)$ représente le nombre de barils de pétrole consommés du 1er janvier 2000 au 1er janvier 2008.

58. Distance parcourue $= \int_0^{5,0} v(t)dt \approx M_5 = \frac{5,0-0}{5}[v(0,5) + v(1,5) + v(2,5) + v(3,5) + v(4,5)]$ (car v(t) > 0 sur [0, 5])

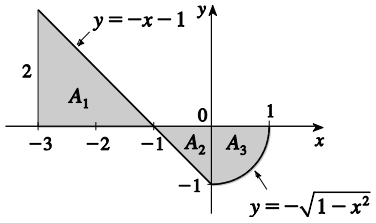
$= 1(4,67 + 8,86 + 10,22 + 10,67 + 10,81) = 45,23$ m

59. Nous employons la méthode des milieux des sous-intervalles avec $n = 6$ et $\Delta t = \frac{24-0}{6} = 4$. L'accroissement de la population d'abeilles est

$$\int_0^{24} r(t)dt \approx M_6 = 4[r(2) + r(6) + r(10) + r(14) + r(18) + r(22)]$$
$$\approx 4[50 + 1\,000 + 7\,000 + 8\,550 + 1\,350 + 150] = 4(18\,100) = 72\,400 \text{ abeilles}$$

60. $A_1 = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(2)(2) = 2$, $A_2 = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(1)(1) = \frac{1}{2}$, et puisque $y = -\sqrt{1-x^2}$ pour $0 \le x \le 1$ représente un quart de cercle de rayon 1, $A_3 = \frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{1}{4}\pi(1)^2 = \frac{\pi}{4}$. Donc,

$$\int_{-3}^{1} f(x)dx = A_1 - A_2 - A_3 = 2 - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{4}(6 - \pi)$$



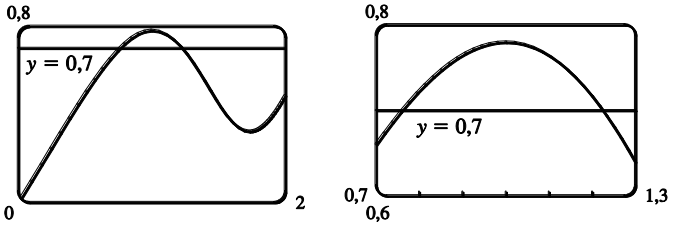
61. Soit $u = 2\sin\theta$. Alors, $du = 2\cos\theta\,d\theta$ et lorsque $\theta = 0$, $u = 0$; lorsque $\theta = \frac{\pi}{2}$, $u = 2$. Il s'ensuit que $\int_0^{\pi/2} f(2\sin\theta)\cos\theta d\theta = \int_0^2 f(u)(\frac{1}{2}du) = \frac{1}{2}\int_0^2 f(u)du = \frac{1}{2}\int_0^2 f(x)dx = \frac{1}{2}(6) = 3$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

62. a) La fonction C est croissante sur les intervalles où C' est positive. Selon le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, $C'(x) = \dfrac{d}{dx}\left[\int_0^x \cos(\frac{\pi}{2}t^2)dt\right] = \cos(\frac{\pi}{2}x^2)$. Cette valeur est positive lorsque $\frac{\pi}{2}x^2$ est compris dans l'intervalle $](2n-\frac{1}{2}\pi), (2n+\frac{1}{2})\pi[$, n étant tout nombre entier. Ceci laisse supposer que $(2n-\frac{1}{2})\pi < \frac{\pi}{2}x^2 < (2n+\frac{1}{2})\pi \iff 0 \le |x| < 1$ or $\sqrt{4n-1} < |x| < \sqrt{4n+1}$, n étant tout entier naturel. La fonction C est donc croissante sur les intervalles $]-1, 1[$, $\left]\sqrt{3}, \sqrt{5}\right[$, $\left]-\sqrt{5}, -\sqrt{3}\right[$, $\left]\sqrt{7}, 3\right[$, $]-3, -\sqrt{7}[$,….

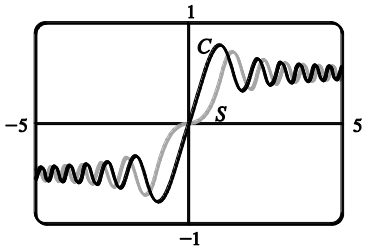
b) La fonction C est concave vers le haut sur les intervalles où $C'' > 0$. Prenons la dérivée de C' afin de calculer C'': $C'(x) = \cos(\frac{\pi}{2}x^2) \implies C''(x) = -\sin(\frac{\pi}{2}x^2)(\frac{\pi}{2}\cdot 2x) = -\pi x \sin(\frac{\pi}{2}x^2)$. Pour $x > 0$, cette valeur est positive lorsque $(2n-1)\pi < \frac{\pi}{2}x^2 < 2n\pi$, n étant tout entier naturel $\iff \sqrt{2(2n-1)} < x < 2\sqrt{n}$, n étant tout entier naturel. Comme il y a un facteur de $-x$ dans C'', les intervalles de concavité vers le haut pour $x < 0$ sont $\left]-\sqrt{2(2n+1)}, -2\sqrt{n}\right[$, n étant tout entier naturel, c'est-à dire que C est concave vers le haut sur les intervalles $\left]-\sqrt{2}, 0\right[$, $\left]\sqrt{2}, 2\right[$, $\left]-\sqrt{6}, -2\right[$, $\left]\sqrt{6}, 2\sqrt{2}\right[$,….

c)



À partir des graphiques, nous pouvons déterminer que $\int_0^x \cos(\frac{\pi}{2}t^2)dt = 0,7$ à $x \approx 0,76$ et $x \approx 1,22$.

d)



Les courbes des fonctions $S(x)$ et $C(x)$ ont des formes semblables, sauf que la courbe de S s'aplatit près de l'origine, ce que celle de C ne fait pas. Remarquez que pour $x > 0$, la fonction C est croissante lorsque S est concave vers le haut, et la fonction C est décroissante lorsque S est concave vers le bas. D'une façon similaire, la fonction S est croissante lorsque C est concave vers le bas, et la fonction S est décroissante lorsque C est concave vers le haut. Pour $x < 0$, ces relations sont inversées, c'est-à-dire que la fonction C est croissante lorsque S est concave vers le bas, et la fonction S est croissante lorsque C est concave vers le haut. L'exemple 1.5.3 et l'exercice 1.5.65 font l'examen de la fonction $S(x)$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

63. À l'aide du TFC1, nous prenons la dérivée des deux côtés de l'équation donnée, $\int_1^x f(t)dt = (x-1)e^{2x} + \int_1^x e^{-t} f(t)dt$, et obtenons

$f(x) = e^{2x} + 2(x-1)e^{2x} + e^{-x} f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x)(1-e^{-x}) = e^{2x} + 2(x-1)e^{2x} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \dfrac{e^{2x}(2x-1)}{1-e^{-x}}$.

64. Comme la deuxième dérivée est la dérivée de la première dérivée, nous appliquerons le théorème de la variation nette avec $F = h'$.

$\int_1^2 h''(u)du = \int_1^2 (h')'(u)du = h'(2) - h'(1) = 5 - 2 = 3$. Les autres informations données sont inutiles.

65. Soit $u = f(x)$ et $du = f'(x)\,dx$. Donc, $2\int_a^b f(x)f'(x)dx = 2\int_{f(a)}^{f(b)} u\ du = [u^2]_{f(a)}^{f(b)} = [f(b)]^2 - [f(a)]^2$.

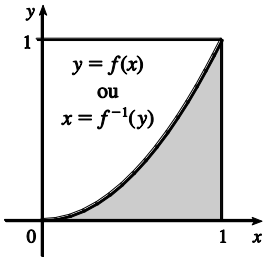
66. Soit $F(x) = \int_2^x \sqrt{1+t^3}\,dt$. Alors, $F'(2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(2+h) - F(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h} \int_2^{2+h} \sqrt{1+t^3}\,dt$ et $F'(x) = \sqrt{1+x^3}$, donc

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h} \int_2^{2+h} \sqrt{1+t^3}\,dt = F'(2) = \sqrt{1+2^3} = \sqrt{9} = 3$.

67. Soit $u = 1 - x$. Alors, $du = -dx$, donc $\int_0^1 f(1-x)dx = \int_1^0 f(u)(-du) = \int_0^1 f(u)du = \int_0^1 f(x)dx$.

68. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\left[\left(\dfrac{1}{n}\right)^9 + \left(\dfrac{2}{n}\right)^9 + \left(\dfrac{3}{n}\right)^9 + \cdots + \left(\dfrac{n}{n}\right)^9\right] = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-0}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\dfrac{i}{n}\right)^9 = \int_0^1 x^9 dx = \left[\dfrac{x^{10}}{10}\right]_0^1 = \dfrac{1}{10}$. La limite est developpée avec une somme de Riemann utilisant les extrémités droites des sous-intervalles de même longueur.

69. L'aire de la région ombrée est $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{3}$. L'intégrale $\int_0^1 f^{-1}(y)\,dy$ donne l'aire de la région non ombrée. Nous savons que cette aire est $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, donc $\int_0^1 f^{-1}(y)dy = \frac{2}{3}$.



 © Groupe Modulo inc., 2013

Problèmes supplémentaires

1. Calculons la dérivée des deux membres de l'égalité $x \sin \pi x = \int_0^{x^2} f(t)dt$ (à l'aide du TFC1 et de la règle de la chaîne pour le membre de droite), nous obtenons $\sin \pi x + \pi x \cos \pi x = 2x f(x^2)$. Posons $x = 2$, de sorte que $f(x^2) = f(4)$; nous obtenons $\sin 2\pi + 2\pi \cos 2\pi = 4f(4)$, donc $f(4) = \frac{1}{4}(0 + 2\pi \cdot 1) = \frac{\pi}{2}$.

2. L'aire A sous la courbe $y = x + 1/x$ de $x = a$ à $x = a + 1{,}5$ est donnée par $A(a) = \int_a^{a+1,5} \left(x + \frac{1}{x} \right) dx$. Pour trouver la valeur minimale de A, nous calculons la dérivée de A à l'aide du TFC1 et posons ensuite cette dérivée égale à 0.

$$\begin{aligned} A'(a) &= \frac{d}{da}\int_a^{a+1,5}\left(x+\frac{1}{x}\right)dx \\ &= \frac{d}{da}\int_a^{1}\left(x+\frac{1}{x}\right)dx + \frac{d}{da}\int_1^{a+1,5}\left(x+\frac{1}{x}\right)dx \\ &= -\frac{d}{da}\int_1^{a}\left(x+\frac{1}{x}\right)dx + \frac{d}{da}\int_1^{a+1,5}\left(x+\frac{1}{x}\right)dx \\ &= -\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(a+1,5+\frac{1}{a+1,5}\right) = 1,5+\frac{1}{a+1,5}-\frac{1}{a} \end{aligned}$$

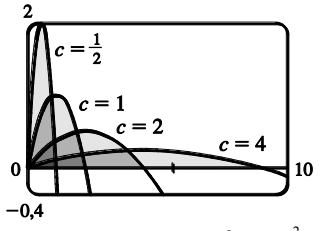
$A'(a) = 0 \iff 1{,}5 + \frac{1}{a+1,5} - \frac{1}{a} = 0 \iff 1{,}5a(a+1{,}5) + a - (a+1{,}5) = 0 \iff$

$1{,}5a^2 + 2{,}25a - 1{,}5 = 0$ [en multipliant par $\frac{4}{3}$] $\iff 2a^2 + 3a - 2 = 0 \iff (2a-1)(a+2) = 0 \iff a = \frac{1}{2}$ ou $a = -2$. Puisque $a > 0$, $a = \frac{1}{2}$. $A''(a) = -\frac{1}{(a+1,5)^2} + \frac{1}{a^2} > 0$, donc $A(\frac{1}{2}) = \int_{1/2}^{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)dx = [\frac{1}{2}x^2 + \ln|x|]_{1/2}^{2} = (2 + \ln 2) - (\frac{1}{8} - \ln 2) = \frac{15}{8} + 2\ln 2$ est la valeur minimale de A.

3. Pour $I = \int_0^4 xe^{(x-2)^4}dx$, posons $u = x - 2$, de sorte que $x = u + 2$ et $dx = du$.

Alors, $I = \int_{-2}^{2}(u+2)e^{u^4}du = \int_{-2}^{2}ue^{u^4}du + \int_{-2}^{2}2e^{u^4}du = 0$ [selon le théorème 1.7.7b] $+ 2\int_0^4 e^{(x-2)^4}dx = 2k$.

4. a)

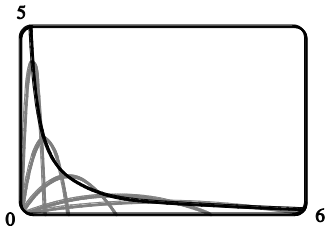


Le graphique de $f(x) = \frac{2cx - x^2}{c^3}$ semble montrer que les aires sont égales, c'est-à-dire que l'aire délimitée par chaque courbe est indépendante de c.

 © Groupe Modulo inc., 2013

b) Trouvons d'abord sur la courbe les points d'intersection avec l'axe des x, afin de déterminer les bornes d'intégration : $y = 0 \Leftrightarrow 2cx - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2c$. Nous pouvons maintenant calculer la dérivée de la fonction entre ces bornes afin de trouver l'aire délimitée par les courbes : $A = \int_0^{2c} \frac{2cx - x^2}{c^3}\,dx = \frac{1}{c^3}[cx^2 - \frac{1}{3}x^3]_0^{2c} = \frac{1}{c^3}[c(2c)^2 - \frac{1}{3}(2c)^3] = \frac{1}{c^3}[4c^3 - \frac{8}{3}c^3] = \frac{4}{3}$, une constante.

c)



Les sommets des membres de la famille de paraboles semblent former une branche d'une hyperbole.

d) Pour une valeur c déterminée, le sommet est le point où la fonction atteint un maximum. Nous avons trouvé que les points d'intersection avec l'axe des x sont (0, 0) et ($2c$, 0); donc, en vertu de propriété de la symétrie, chaque fonction atteint un maximum en $x = c$ et sa valeur est $\frac{2c(c) - c^2}{c^3} = \frac{1}{c}$. Nous sommes donc intéressés par la courbe formée par tous les points de la forme $\left(c, \frac{1}{c}\right)$, $c > 0$. Cette courbe est la partie de l'hyperbole $y = 1/x$ qui est située dans le premier quadrant.

5. $f(x) = \int_0^{g(x)} \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}\,dt$, où $g(x) = \int_0^{\cos x} [1 + \sin(t^2)]\,dt$. À l'aide du TFC1 et de la Règle de la chaîne (deux fois) nous obtenons $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+[g(x)]^3}}$ et $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+[g(x)]^3}}[1 + \sin(\cos^2 x)](-\sin x)$. Or, $g(\frac{\pi}{2}) = \int_0^0 [1 + \sin(t^2)]\,dt = 0$, donc $f'(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\sqrt{1+0}}(1 + \sin 0)(-1) = 1 \cdot 1 \cdot (-1) = -1$.

6. Si $f(x) = \int_0^x x^2 \sin(t^2)\,dt = x^2 \int_0^x \sin(t^2)\,dt$, alors $f'(x) = x^2 \sin(x^2) + 2x \int_0^x \sin(t^2)dt$, selon la règle du produit et le TFC1.

7. Selon la règle de L'Hospital et le théorème fondamental, et en utilisant la notation $\exp(y) = e^y$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x (1 - \tan 2t)^{1/t}\,dt}{x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(1 - \tan 2x)^{1/x}}{1} = \exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 - \tan 2x)}{x}\right)$$
$$\overset{\text{H}}{=} \exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{-2\sec^2 2x}{1 - \tan 2x}\right) = \exp\left(\frac{-2 \cdot 1^2}{1 - 0}\right) = e^{-2}$$

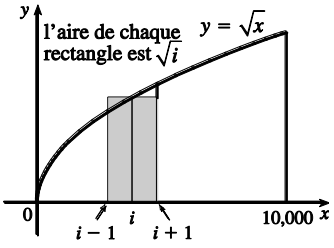
8. $f(x) = 2 + x - x^2 = (-x + 2)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -1$. $f(x) \geq 0$ pour $x \in [-1, 2]$ et $f(x) < 0$ à tout autre endroit.

 © Groupe Modulo inc., 2013

L'intégrale $\int_a^b (2 + x - x^2)dx$ atteint un maximum sur l'intervalle où la valeur de l'intégrande est positive, soit [1, 2]. Donc, $a = -1$, $b = 2$. (Tout intervalle plus grand résulte en une intégrale plus petite puisque $f(x) < 0$ à l'extérieur de l'intervalle [–1, 2]. Tout intervalle plus petit résulte également en une intégrale plus petite puisque $f(x) \geq 0$ sur l'intervalle [–1, 2].)

9. On peut interpréter cette somme comme une somme de Riemann, dont les extrémités droites des sous-intervalles sont utilisées comme points d'échantillonnage où $a = 0$, $b = 10\,000$ et $f(x) = \sqrt{x}$. Nous évaluons donc approximativement $\sum_{i=1}^{10\,000} \sqrt{i} \approx \lim_{n\to\infty} \frac{10\,000}{n} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{10\,000i}{n}} = \int_0^{10\,000} \sqrt{x}\ dx = [\frac{2}{3}x^{3/2}]_0^{10\,000} = \frac{2}{3}(1\,000\,000) \approx 666\,667$.

Autre méthode : Nous pouvons utiliser une méthode graphique comme suit : le graphique montre que $\int_{i-1}^{i} \sqrt{x}\ dx < \sqrt{i} < \int_{i}^{i+1} \sqrt{x}\ dx$, donc $\int_0^{10\,000} \sqrt{x}\ dx < \sum_{i=1}^{10\,000} \sqrt{i} < \int_1^{10\,001} \sqrt{x}\ dx$. Puisque $\int \sqrt{x}\ dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + C$, nous obtenons $\int_0^{10\,000} \sqrt{x}\ dx = 666\,666,\overline{6}$ et $\int_1^{10\,001} \sqrt{x}\ dx = \frac{2}{3}[(10\,001)^{3/2} - 1] \approx 666\,766$. Il s'ensuit que $666\,666,\overline{6} < \sum_{i=1}^{10\,000} \sqrt{i} < 666\,766$. Nous pouvons évaluer approximativement la somme en faisant la moyenne de ces bornes : $\sum_{i=1}^{10\,000} \approx \frac{666\,666,\overline{6} + 666\,766}{2} \approx 666\,716$. La valeur exacet est environ 666 716,46.



10. a) Nous pouvons diviser l'intégrale $\int_0^n x\ dx$ en la somme $\sum_{i=1}^{n}\left[\int_{i-1}^{i} x\ dx\right]$. Cependant, sur chacun des intervalles d'intégration $[i - 1, i]$, x est une fonction constante, soit $i - 1$. La i[ème] intégrale de la somme est donc égale à $(i - 1)[i - (i - 1)] = (i - 1)$.

L'intégrale demandée est donc égale à $\sum_{i=1}^{n}(i-1) = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{(n-1)n}{2}$.

b) Nous pouvons écrire $\int_a^b x\ dx = \int_0^b x\ dx - \int_0^a x\ dx$. Or, $\int_0^b x\ dx = \int_0^b x\ dx + \int_b^b x\ dx$. Selon la sous-question a), la première de ces intégrales est égale à $\frac{1}{2}(b - 1)\ b$. Puisque $x = b$ sur l'intervalle $[b, b]$, la deuxième intégrale est

 © Groupe Modulo inc., 2013

simplement $b\left(b-b\right)$. Donc, $\int_0^b x\,dx=\frac{1}{2}\left(b-1\right)b+\left(b-b\right)=\frac{1}{2}b\left(2b-b-1\right)$ et, d'une façon similaire, $\int_0^a x\,dx=\frac{1}{2}a\left(2a-a-1\right)$. Il s'ensuit que $\int_a^b x\,dx=\frac{1}{2}b\left(2b-b-1\right)-\frac{1}{2}a\left(2a-a-1\right)$.

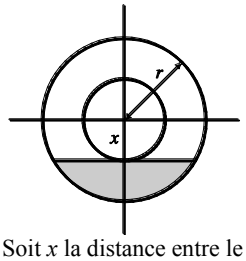
11. Selon le TFC1, $\frac{d}{dx}\int_0^x\left(\int_1^{\sin t}\sqrt{1+u^4}\,du\right)dt=\int_1^{\sin x}\sqrt{1+u^4}\,du$. Si nous utilisons le TFC1 à nouveau,

$$\frac{d^2}{dx^2}\int_0^x\left(\int_1^{\sin t}\sqrt{1+u^4}\,du\right)dt=\frac{d}{dx}\int_1^{\sin x}\sqrt{1+u^4}\,du=\sqrt{1+\sin^4 x}\cos x\,.$$

12. Soit $Q(x)=\int_0^x P(t)dt=\left[at+\frac{b}{2}t^2+\frac{c}{3}t^3+\frac{d}{4}t^4\right]_0^x=ax+\frac{b}{2}x^2+\frac{c}{3}x^3+\frac{d}{4}x^4$. Alors, $Q(0)=0$ et $Q(1)=0$ selon la condition donnée, soit $a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}+\frac{d}{4}=0$. De plus, selon le TFC1, $Q'(x)=P(x)=a+bx+cx^2+dx^3$. Selon le théorème de Rolle, appliqué à Q sur l'intervalle [0, 1], il existe un nombre r dans l'intervalle [0, 1] tel que $Q'(r)=0$, c'est-à-dire tel que $P(r)=0$. Il s'ensuit que l'équation $P(x)=0$ a une racine entre 0 et 1.

De façon plus générale, si $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ et si $a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0$, alors l'équation $P(x)=0$ a une racine entre 0 et 1. La preuve est la même que précédemment : Soit $Q(x)=\int_0^x P(t)dt=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a^2}{3}x^3+\cdots+\frac{a^n}{n+1}x^n$. Alors, $Q(0)=Q(1)=0$ et $Q'(x)=P(x)$. Selon le théorème de Rolle, appliqué à Q sur l'intervalle [0, 1], il existe un nombre r dans l'intervalle [0, 1] tel que $Q'(r)=0$, c'est-à-dire tel que $P(r)=0$.

13.



Soit x la distance entre le centre du disque et la surface du liquide. L'aire de la surface circulaire humide est $\pi r^2-\pi x^2$ alors que l'aire de la surface humide non exposée (ombrée dans le graphique) est $2\int_x^r\sqrt{r^2-t^2}\,dt$. L'aire de la surface humide exposée est donc $A(x)=\pi r^2-\pi x^2-2\int_x^r\sqrt{r^2-t^2}\,dt$, $0\le x\le r$. Selon le TFC1, nous obtenons $A'(x)=-2\pi x+2\sqrt{r^2-x^2}$.

Or, $A'(x)>0 \;\Rightarrow\; -2\pi x+2\sqrt{r^2-x^2}>0 \;\Rightarrow\; \sqrt{r^2-x^2}>\pi x \;\Rightarrow\; r^2-x^2>\pi^2x^2 \;\Rightarrow$

$r^2>\pi^2x^2+x^2 \;\Rightarrow\; r^2>x^2(\pi^2+1) \;\Rightarrow\; x^2<\frac{r^2}{\pi^2+1} \;\Rightarrow\; x<\frac{r}{\sqrt{\pi^2+1}}$. Appelons cette valeur x^*. Puisque $A'(x)>0$ pour $0<x<x^*$ et $A'(x)<0$ pour $x^*<x<r$, la fonction atteint un maximum absolu lorsque $x=x^*$.

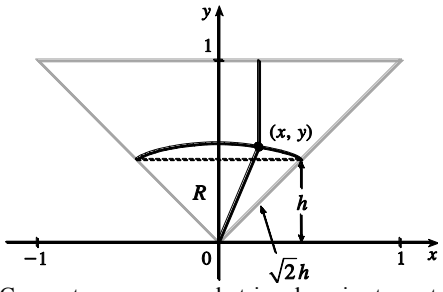
 © Groupe Modulo inc., 2013

14. Remarquez que $\frac{d}{dx}\left(\int_0^x\left[\int_0^u f(t)dt\right]du\right)=\int_0^x f(t)dt$ selon leTFC1, alors que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[\int_0^x f(u)(x-u)du\right]&=\frac{d}{dx}\left[x\int_0^x f(u)du\right]-\frac{d}{dx}\left[\int_0^x f(u)u\ du\right]\\&=\int_0^x f(u)du+xf(x)-f(x)x=\int_0^x f(u)du\end{aligned}$$

Il s'ensuit que $\int_0^x f(u)(x-u)du=\int_0^x\left[\int_0^u f(t)dt\right]du+C$. Si nous posons $x=0$, nous obtenons $C=0$.

15.



Concentrons-nous sur le triangle qui est montré. Un point de ce triangle est plus proche du côté qui est montré que de tout autre côté. Donc, si nous calculons l'aire de la région *R* constituée de tous les points du triangle qui sont plus proches du centre que de ce côté, nous pouvons multiplier cette aire par 4 pour trouver l'aire totale. Nous trouvons l'équation qui représente l'ensemble de points qui sont équidistants du centre et du côté : la distance entre le point (x, y) et le côté est $1-y$, et la distance entre le point et le centre est $\sqrt{x^2+y^2}$. Les distances sont donc égales si $\sqrt{x^2+y^2}=1-y \quad\Leftrightarrow\quad x^2+y^2=1-2y+y^2 \quad\Leftrightarrow\quad y=\frac{1}{2}(1-x^2)$. Remarquez que l'aire qui nous intéresse est égale à l'aire d'un triangle plus l'aire d'une section en forme de croissant. Pour calculer ces aires, nous devons trouver la coordonnée *h* sur l'axe des *y* de la ligne horizontale qui les sépare. À partir du graphique, nous trouvons que $1-h=\sqrt{2}h \quad\Leftrightarrow\quad h=\frac{1}{1+\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$. Nous calculons les aires en fonction de *h*, et effectuons ensuite les substitutions.

L'aire du triangle est $\frac{1}{2}(2h)(h)=h^2$, et l'aire de la section en forme de croissant est

$$\int_{-h}^{h}[\tfrac{1}{2}(1-x^2)-h]dx=2\int_0^h(\tfrac{1}{2}-h-\tfrac{1}{2}x^2)dx=2[(\tfrac{1}{2}-h)x-\tfrac{1}{6}x^3]_0^h=h-2h^2-\tfrac{1}{3}h^3.$$

L'aire de la région totale est donc

$$\begin{aligned}4[(h-2h^2-\tfrac{1}{3}h^3)+h^2]&=4h(1-h-\tfrac{1}{3}h^2)=4\left(\sqrt{2}-1\right)\left[1-\left(\sqrt{2}-1\right)-\tfrac{1}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)^2\right]\\&=4\left(\sqrt{2}-1\right)\left(1-\tfrac{1}{3}\sqrt{2}\right)=\tfrac{4}{3}\left(4\sqrt{2}-5\right)\end{aligned}$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

16. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}+\sqrt{\frac{n}{n+2}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n+n}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1+1/n}}+\frac{1}{\sqrt{1+2/n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+1}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\quad\left[\text{où } f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right]$$
$$=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x}}dx=\left[2\sqrt{1+x}\right]_0^1=2\left(\sqrt{2}-1\right)$$

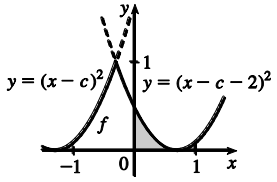
17. Remarquez que les courbes de $(x-c)^2$ et de $[(x-c)-2]^2$ se croisent lorsque $|x-c|=|x-c-2| \iff c-x=x-c-2 \iff x=c+1$.

L'intégration se fera différemment selon la valeur de c.

Cas 1: $-2\le c<-1$

Dans ce cas, $f_c(x)=(x-c-2)^2$ pour $x\in[0,1]$, donc

$$g(c)=\int_0^1(x-c-2)^2dx=\tfrac{1}{3}[(x-c-2)^3]_0^1=\tfrac{1}{3}[(-c-1)^3-(-c-2)^3]$$
$$=\tfrac{1}{3}(3c^2+9c+7)=c^2+3c+\tfrac{7}{3}=(c+\tfrac{3}{2})^2+\tfrac{1}{12}$$



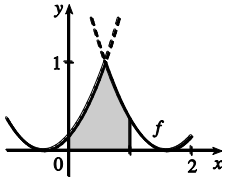
En tant que formule d'une parabole, sa valeur maximale pour $-2\le c<-1$ est $g(-2)=\frac{1}{3}$ et sa valeur minimale est $g(\frac{-3}{2})=\frac{1}{12}$.

Cas 2 : $-1\le c<0$

Dans ce cas, $f_c(x)=\begin{cases}(x-c)^2 & \text{si } 0\le x\le c+1\\ (x-c-2)^2 & \text{si } c+1<x\le 1\end{cases}$

Il s'ensuit que

$$g(c)=\int_0^1 f_c(x)dx=\int_0^{c+1}(x-c)^2dx+\int_{c+1}^1(x-c-2)^2dx$$
$$=\tfrac{1}{3}[(x-c)^3]_0^{c+1}+\tfrac{1}{3}[(x-c-2)^3]_{c+1}^1=\tfrac{1}{3}[1+c^3+(-c-1)^3-(-1)]$$
$$=-c^2-c+\tfrac{1}{3}=-(c+\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{7}{12}$$



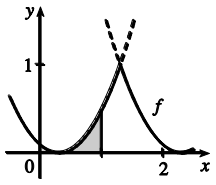
Il s'agit encore d'une formule d'une parabole, dont la valeur maximale pour $-1\le c<0$ est $g(-\frac{1}{2})=\frac{7}{12}$ et dont la valeur minimale pour le même intervalle est $g(-1)=\frac{1}{3}$.

Cas 3 : $0\le c\le 2$

 © Groupe Modulo inc., 2013

Dans ce cas, $f_c(x) = (x - c)^2$ pour $x \in [0,1]$, donc

$$g(c) = \int_0^1 (x-c)^2\,dx = \tfrac{1}{3}[(x-c)^3]_0^1 = \tfrac{1}{3}[(1-c)^3 - (-c)^3]$$
$$= c^2 - c + \tfrac{1}{3} = (c - \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{12}$$



Cette formule de parabole a une valeur maximale égale à $g(2) = \frac{7}{3}$ et une valeur minimale égale à $g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{12}$.

Nous concluons que *g(c)* a une valeur maximale absolue de $g(2) = \frac{7}{3}$, et des valeurs minimales absolues de $g(-\frac{3}{2}) = g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{12}$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

2. LES APPLICATIONS DE L'INTÉGRALE

2.1 L'aire de la région entre deux courbes

1. $A=\int_{x=0}^{x=4}(y_S-y_I)dx=\int_0^4[(5x-x^2)-x]dx=\int_0^4(4x-x^2)dx=[2x^2-\frac{1}{3}x^3]_0^4=(32-\frac{64}{3})-(0)=\frac{32}{3}$

2. $A=\int_0^2\left(\sqrt{x+2}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\left[\frac{2}{3}(x+2)^{3/2}-\ln(x+1)\right]_0^2=\left[\frac{2}{3}(4)^{3/2}-\ln 3\right]-\left[\frac{2}{3}(2)^{3/2}-\ln 1\right]$

$=\frac{16}{3}-\ln 3-\frac{4}{3}\sqrt{2}$

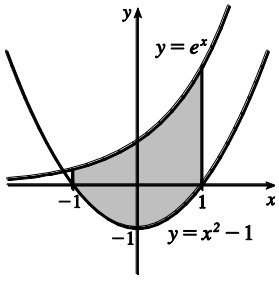
3. $A=\int_{y=-1}^{y=1}(x_D-x_G)dy=\int_{-1}^1[e^y-(y^2-2)]dy=\int_{-1}^1(e^y-y^2+2)dy$

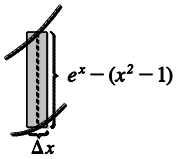
$=[e^y-\frac{1}{3}y^3+2y]_{-1}^1=(e^1-\frac{1}{3}+2)-(e^{-1}+\frac{1}{3}-2)=e-\frac{1}{e}+\frac{10}{3}$

4. $A=\int_0^3[(2y-y^2)-(y^2-4y)]dy=\int_0^3(-2y^2+6y)dy=[-\frac{2}{3}y^3+3y^2]_0^3=(-18+27)-0=9$

5. $A=\int_{-1}^1[e^x-(x^2-1)]dx=[e^x-\frac{1}{3}x^3+x]_{-1}^1$

$=(e-\frac{1}{3}+1)-(e^{-1}+\frac{1}{3}-1)=e-\frac{1}{e}+\frac{4}{3}$

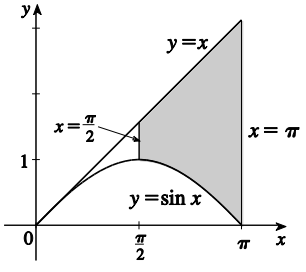


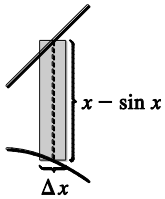


6. $A=\int_{\pi/2}^{\pi}(x-\sin x)dx=\left[\frac{x^2}{2}+\cos x\right]_{\pi/2}^{\pi}$

$=\left(\frac{\pi^2}{2}-1\right)-\left(\frac{\pi^2}{8}+0\right)$

$=\frac{3\pi^2}{8}-1$

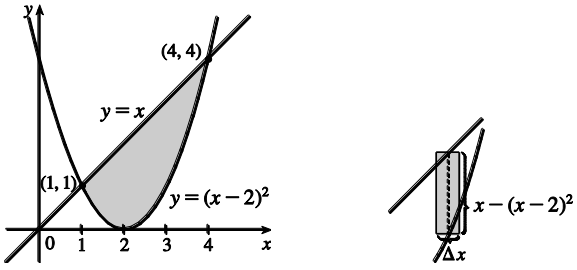




7. Les courbes se croisent lorsque $(x-2)^2=x \Leftrightarrow x^2-4x+4=x \Leftrightarrow x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-4)=0 \Leftrightarrow x=1$ ou 4.

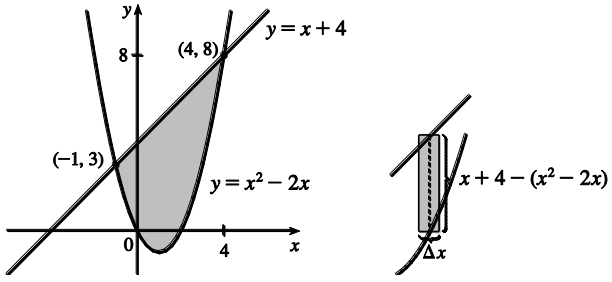
 © Groupe Modulo inc., 2013

$$A = \int_1^4 [x - (x-2)^2]dx = \int_1^4 (-x^2 + 5x - 4)dx$$
$$= [-\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{5}{2}x^2 - 4x]_1^4$$
$$= (-\tfrac{64}{3} + 40 - 16) - (-\tfrac{1}{3} + \tfrac{5}{2} - 4)$$
$$= \tfrac{9}{2}$$

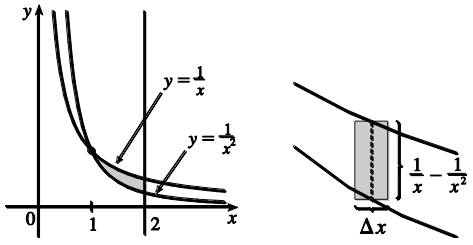


8. Les courbes se croisent lorsque $x^2 - 2x = x + 4 \iff x^2 - 3x - 4 = 0 \iff (x+1)(x-4) = 0 \iff x = -1$ ou 4.

$$A = \int_{-1}^4 [x + 4 - (x^2 - 2x)]dx$$
$$= \int_{-1}^4 (-x^2 + 3x + 4)dx$$
$$= [-\tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 + 4x]_{-1}^4$$
$$= (-\tfrac{64}{3} + 24 + 16) - (\tfrac{1}{3} + \tfrac{3}{2} - 4) = \tfrac{125}{6}$$



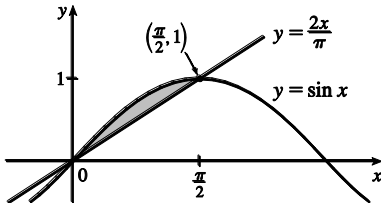
9. $A = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx = \left[\ln|x| + \frac{1}{x}\right]_1^2$
$= (\ln|2| + \tfrac{1}{2}) - (\ln|1| + 1)$
$= \ln 2 - \tfrac{1}{2}$

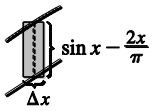


10. On peut observer que les courbes de $y = \sin x$ et $y = 2x/\pi$ se croisent aux points (0, 0) et (π/2, 1) pour $x \geq 0$.

$$A = \int_0^{\pi/2} \left(\sin x - \frac{2x}{\pi}\right)dx = \left[-\cos x - \frac{1}{\pi}x^2\right]_0^{\pi/2} = \left(0 - \frac{\pi}{4}\right) - (-1) = 1 - \frac{\pi}{4}$$

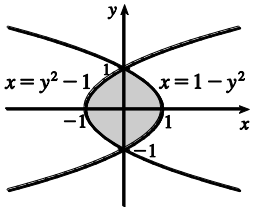
 © Groupe Modulo inc., 2013

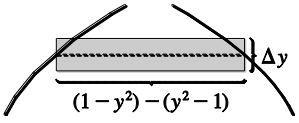




11. Les courbes se croisent lorsque $1 - y^2 = y^2 - 1 \iff 2 = 2y^2 \iff y^2 = 1 \iff y = \pm 1$.

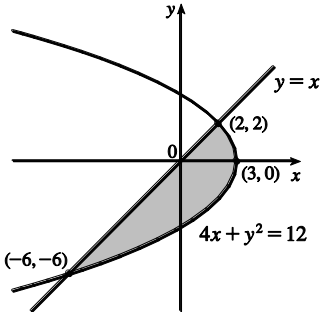
$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{1} [(1 - y^2) - (y^2 - 1)]\,dy \\ &= \int_{-1}^{1} 2(1 - y^2)\,dy \\ &= 2 \cdot 2\int_{0}^{1} (1 - y^2)\,dy \\ &= 4[y - \tfrac{1}{3}y^3]_0^1 = 4(1 - \tfrac{1}{3}) = \tfrac{8}{3} \end{aligned}$$

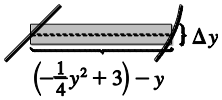




12. $4x + x^2 = 12 \iff (x + 6)(x - 2) = 0 \iff x = -6$ ou $x = 2$, donc $y = -6$ ou $y = 2$ et

$$\begin{aligned} A &= \int_{-6}^{2} [(-\tfrac{1}{4}y^2 + 3) - y]\,dy \\ &= [-\tfrac{1}{12}y^3 - \tfrac{1}{2}y^2 + 3y]_{-6}^{2} \\ &= (-\tfrac{2}{3} - 2 + 6) - (18 - 18 - 18) \\ &= 22 - \tfrac{2}{3} = \tfrac{64}{3} \end{aligned}$$

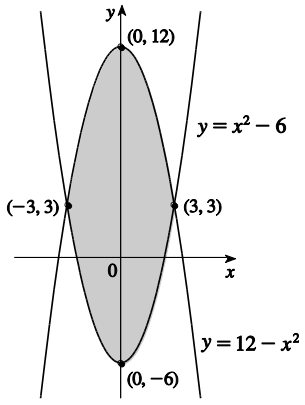




13. $12 - x^2 = x^2 - 6 \iff 2x^2 = 18 \iff x^2 = 9 \iff x = \pm 3$, donc

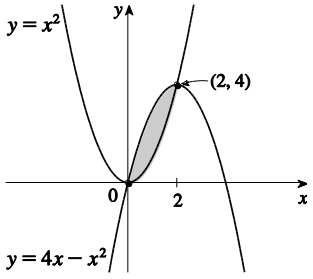
$$\begin{aligned} A &= \int_{-3}^{3} [(12 - x^2) - (x^2 - 6)]\,dx \\ &= 2\int_{0}^{3} (18 - 2x^2)\,dx \quad \text{[par symétrie]} \\ &= 2[18x - \tfrac{2}{3}x^3]_0^3 = 2[(54 - 18) - 0] \\ &= 2(36) = 72 \end{aligned}$$

 © Groupe Modulo inc., 2013



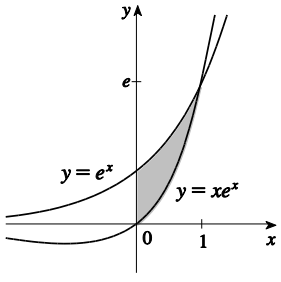
14. $x^2 = 4x - x^2 \iff 2x^2 - 4x = 0 \iff 2x(x-2) = 0 \iff x = 0$ ou 2, donc

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 [(4x - x^2) - x^2]\,dx \\ &= \int_0^2 (4x - 2x^2)\,dx \\ &= [2x^2 - \tfrac{2}{3}x^3]_0^2 \\ &= 8 - \tfrac{16}{3} = \tfrac{8}{3} \end{aligned}$$



15. $e^x = xe^x \iff e^x - xe^x = 0 \iff e^x(1-x) = 0 \iff x = 1$.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (e^x - xe^x)\,dx \\ &= [e^x - (xe^x - e^x)]_0^1 \quad \text{[utilisez les parties où } u = x \text{ et } dv = e^x dx\text{]} \\ &= [2e^x - xe^x]_0^1 = (2e - e) - (2 - 0) = e - 2 \end{aligned}$$



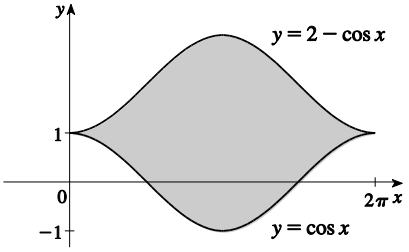
 © Groupe Modulo inc., 2013

16. $A = \int_0^{2\pi} [(2 - \cos x) - \cos x]dx$

$= \int_0^{2\pi} (2 - 2\cos x)dx$

$= [2x - 2\sin x]_0^{2\pi}$

$= (4\pi - 0) - 0 = 4\pi$

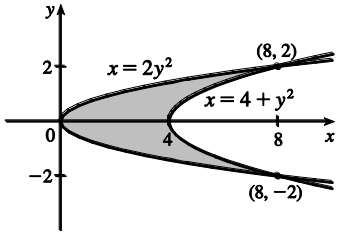


17. $2y^2 = 4 + y^2 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm 2$, donc

$A = \int_{-2}^{2} [(4 + y^2) - 2y^2]dy$

$= 2\int_0^2 (4 - y^2)dy$ [par symétrie]

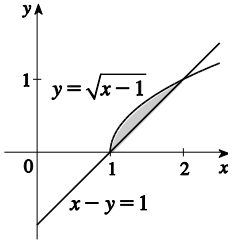
$= 2[4y - \frac{1}{3}y^3]_0^2 = 2(8 - \frac{8}{3}) = \frac{32}{3}$



18. Les courbes se croisent lorsque $\sqrt{x-1} = x - 1 \quad \Rightarrow \quad x - 1 = x^2 - 2x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = x^2 - 3x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = (x-1)(x-2) \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$ ou 2.

$A = \int_1^2 \left[\sqrt{x-1} - (x-1)\right]dx$

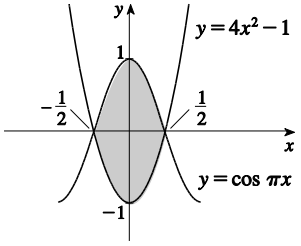
$= [\frac{2}{3}(x-1)^{3/2} - \frac{1}{2}(x-1)^2]_1^2 = (\frac{2}{3} - \frac{1}{2}) - (0 - 0) = \frac{1}{6}$



19. On peut observer que les courbes se croisent en $x = \pm\frac{1}{2}$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

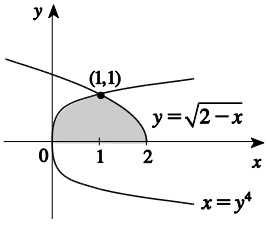
$$A = \int_{-1/2}^{1/2} [\cos \pi x - (4x^2 - 1)]dx$$
$$= 2\int_0^{1/2} (\cos \pi x - 4x^2 + 1)dx \quad \text{[par symétrie]}$$
$$= 2[\tfrac{1}{\pi}\sin \pi x - \tfrac{4}{3}x^3 + x]_0^{1/2} = 2[(\tfrac{1}{\pi} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{2}) - 0]$$
$$= 2(\tfrac{1}{\pi} + \tfrac{1}{3}) = \tfrac{2}{\pi} + \tfrac{2}{3}$$



20. $y = \sqrt{2-x} \;\Rightarrow\; y^2 = 2 - x \;\Leftrightarrow\; x = 2 - y^2$, donc les courbes se croisent lorsque

$y^4 = 2 - y^2 \;\Leftrightarrow\; y^4 + y^2 - 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; (y^2 + 2)(y^2 - 1) = 0 \;\Leftrightarrow\; y = 1$ [puisque $y \geq 0$].

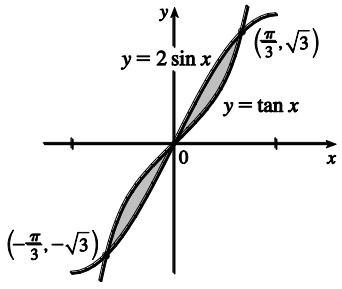
$$A = \int_0^1 [(2 - y^2) - y^4)]dy = [2y - \tfrac{1}{3}y^3 - \tfrac{1}{5}y^5]_0^1$$
$$= (2 - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5}) - 0 = \tfrac{22}{15}$$



21. Les courbes se croisent lorsque $\tan x = 2 \sin x$ (sur l'intervalle $[-\pi/3, \pi/3]$)

$\Leftrightarrow \quad \sin x = 2\sin x \cos x \;\Leftrightarrow\; 2\sin x \cos x - \sin x = 0 \;\Leftrightarrow\; \sin x(2\cos x - 1) = 0 \;\Leftrightarrow$
$\sin x = 0$ ou $\cos x = \tfrac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; x = 0$ ou $x = \pm\tfrac{\pi}{3}$

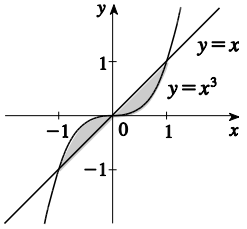
$$A = 2\int_0^{\pi/3} (2\sin x - \tan x)dx \quad \text{[par symétrie]}$$
$$= 2[-2\cos x - \ln|\sec x|]_0^{\pi/3}$$
$$= 2[(-1 - \ln 2) - (-2 - 0)]$$
$$= 2(1 - \ln 2) = 2 - 2\ln 2$$



 © Groupe Modulo inc., 2013

22. Les courbes se croisent lorsque $x^3 = x \iff x^3 - x = 0 \iff x(x^2-1) = 0 \iff x(x+1)(x-1) = 0 \iff x = 0$ ou $x = \pm 1$.

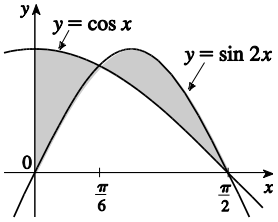
$$A = 2\int_0^1 (x - x^3)dx \quad \text{[par symétrie]}$$
$$= 2[\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{4}x^4]_0^1 = 2(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}) = \tfrac{1}{2}$$



23. Remarquez que

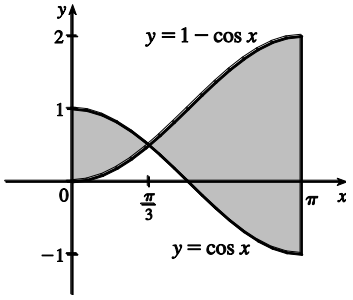
$$\cos x = \sin 2x = 2\sin x\cos x \iff 2\sin x\cos x - \cos x = 0 \iff \cos x(2\sin x - 1) = 0 \iff$$
$$2\sin x = 1 \text{ ou } \cos x = 0 \iff x = \tfrac{\pi}{6} \text{ ou } \tfrac{\pi}{2}.$$

$$A = \int_0^{\pi/6} (\cos x - \sin 2x)dx + \int_{\pi/6}^{\pi/2} (\sin 2x - \cos x)dx$$
$$= [\sin x + \tfrac{1}{2}\cos 2x]_0^{\pi/6} + [-\tfrac{1}{2}\cos 2x - \sin x]_{\pi/6}^{\pi/2}$$
$$= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} - (0 + \tfrac{1}{2}\cdot 1) + (\tfrac{1}{2} - 1) - (-\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}$$



24. Les courbes se croisent lorsque $\cos x = 1 - \cos x$ (sur $[0, \pi]$) $\iff 2\cos x = 1 \iff \cos x = \tfrac{1}{2} \iff x = \tfrac{\pi}{3}$.

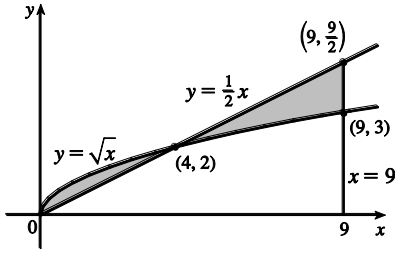
$$A = \int_0^{\pi/3} [\cos x - (1 - \cos x)]dx + \int_{\pi/3}^{\pi} [(1 - \cos x) - \cos x]dx$$
$$= \int_0^{\pi/3} (2\cos x - 1)dx + \int_{\pi/3}^{\pi} (1 - 2\cos x)dx$$
$$= [2\sin x - x]_0^{\pi/3} + [x - 2\sin x]_{\pi/3}^{\pi}$$
$$= \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) - 0 + (\pi - 0) - \left(\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\right)$$
$$= 2\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$$



 © Groupe Modulo inc., 2013

25. $\frac{1}{2}x = \sqrt{x} \;\Rightarrow\; \frac{1}{4}x^2 = x \;\Leftrightarrow\; x^2 - 4x = 0 \;\Leftrightarrow\; x(x-4) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$ ou 4, donc

$$\begin{aligned} A &= \int_0^4 \left(\sqrt{x} - \tfrac{1}{2}x\right) dx + \int_4^9 \left(\tfrac{1}{2}x - \sqrt{x}\right) dx \\ &= [\tfrac{2}{3}x^{3/2} - \tfrac{1}{4}x^2]_0^4 + [\tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{2}{3}x^{3/2}]_4^9 \\ &= [(\tfrac{16}{3} - 4) - 0] + [(\tfrac{81}{4} - 18) - (4 - \tfrac{16}{3})] \\ &= \tfrac{81}{4} + \tfrac{32}{3} - 26 = \tfrac{59}{12} \end{aligned}$$



26. $|x| = x^2 - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x^2 - 2 & \text{si } x \geq 0 \\ -x = x^2 - 2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

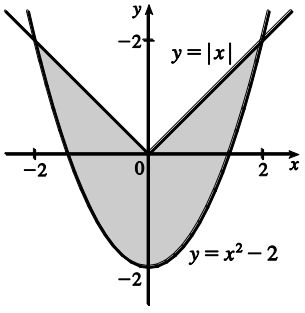
En résolvant pour $x \geq 0$

$x = x^2 - 2 \;\Leftrightarrow\; 0 = x^2 - x - 2 \;\Leftrightarrow\; 0 = (x-2)(x+1) \;\Rightarrow\; x = 2$

En résolvant pour $x < 0$

$-x = x^2 - 2 \;\Leftrightarrow\; 0 = x^2 + x - 2 \;\Leftrightarrow\; 0 = (x+2)(x-1) \;\Rightarrow\; x = -2$

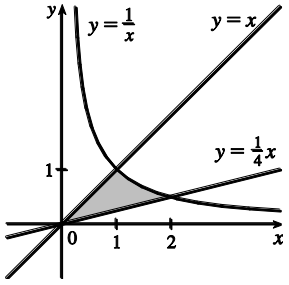
$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{2} [|x| - (x^2 - 2)] dx \\ &= 2\int_0^2 [x - (x^2 - 2)] dx = 2\int_0^2 (x - x^2 + 2) dx \\ &= 2[\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 + 2x]_0^2 = 2(2 - \tfrac{8}{3} + 4) = \tfrac{20}{3} \end{aligned}$$



27. $1/x = x \;\Leftrightarrow\; 1 = x^2 \;\Leftrightarrow\; x = \pm 1$ et $1/x = \frac{1}{4}x \;\Leftrightarrow\; 4 = x^2 \;\Leftrightarrow\; x = \pm 2$, donc pour $x > 0$,

 © Groupe Modulo inc., 2013

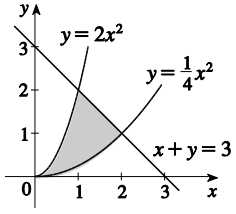
$$A = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{4}x \right) dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{4}x \right) dx$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{3}{4}x \right) dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{4}x \right) dx$$
$$= [\tfrac{3}{8}x^2]_0^1 + [\ln|x| - \tfrac{1}{8}x^2]_1^2$$
$$= \tfrac{3}{8} + (\ln 2 - \tfrac{1}{2}) - (0 - \tfrac{1}{8}) = \ln 2$$



28. $\frac{1}{4}x^2 = -x + 3 \iff x^2 + 4x - 12 = 0 \iff (x+6)(x-2) = 0 \iff x = -6$ ou 2 et

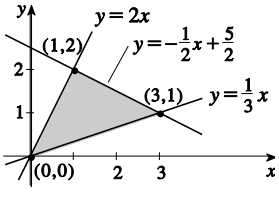
$2x^2 = -x + 3 \iff 2x^2 + x - 3 = 0 \iff (2x+3)(x-1) = 0 \iff x = -\frac{3}{2}$ ou 1, donc pour $x \geq 0$,

$$A = \int_0^1 (2x^2 - \tfrac{1}{4}x^2) dx + \int_1^2 [(-x+3) - \tfrac{1}{4}x^2] dx$$
$$= \int_0^1 \tfrac{7}{4}x^2 dx + \int_1^2 (-\tfrac{1}{4}x^2 - x + 3) dx$$
$$= [\tfrac{7}{12}x^3]_0^1 + [-\tfrac{1}{12}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + 3x]_1^2$$
$$= \tfrac{7}{12} + (-\tfrac{2}{3} - 2 + 6) - (-\tfrac{1}{12} - \tfrac{1}{2} + 3) = \tfrac{3}{2}$$



29. L'équation de la droite passant par les points (0, 0) et (3, 1) est $y = \frac{1}{3}x$; celle de la droite passant par les points (0, 0) et (1, 2) est $y = 2x$; celle de la droite passant par les points (3, 1) et (1, 2) est $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

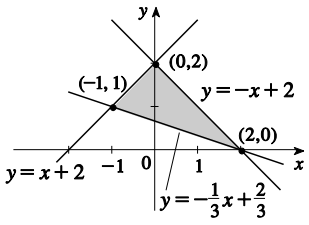
$$A = \int_0^1 (2x - \tfrac{1}{3}x) dx + \int_1^3 [(-\tfrac{1}{2}x + \tfrac{5}{2}) - \tfrac{1}{3}x] dx$$
$$= \int_0^1 \tfrac{5}{3}x \, dx + \int_1^3 (-\tfrac{5}{6}x + \tfrac{5}{2}) dx$$
$$= [\tfrac{5}{6}x^2]_0^1 + [-\tfrac{5}{12}x^2 + \tfrac{5}{2}x]_1^3$$
$$= \tfrac{5}{6} + (-\tfrac{15}{4} + \tfrac{15}{2}) - (-\tfrac{5}{12} + \tfrac{5}{2}) = \tfrac{5}{2}$$



 © Groupe Modulo inc., 2013

30. L'équation de la droite passant par les points (2, 0) et (0, 2) est $y = -x + 2$; celle de la droite passant par les points (2, 0) et (–1, 1) est $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$; celle de la droite passant par les points (0, 2) et (–1, 1) est $y = x + 2$.

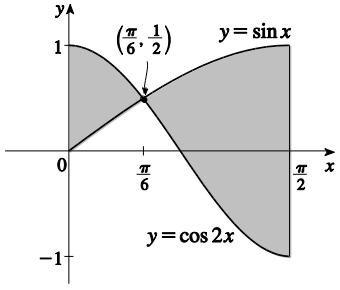
$$\begin{aligned}
A &= \int_1^0 [(x+2) - (-\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3})]dx + \int_0^2 [(-x+2) - (-\tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3})]dx \\
&= \int_{-1}^0 (\tfrac{4}{3}x + \tfrac{4}{3})dx + \int_0^2 (-\tfrac{2}{3}x + \tfrac{4}{3})dx \\
&= [\tfrac{2}{3}x^2 + \tfrac{4}{3}x]_{-1}^0 + [-\tfrac{1}{3}x^2 + \tfrac{4}{3}x]_0^2 \\
&= 0 - (\tfrac{2}{3} - \tfrac{4}{3}) + (-\tfrac{4}{3} + \tfrac{8}{3}) - 0 = 2
\end{aligned}$$



31. Les courbes se croisent lorsque

$$\sin x = \cos 2x \text{ (sur } [0, \pi/2]) \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = 1 - 2\sin^2 x \quad \Leftrightarrow \quad 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$(2\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin x = \tfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \tfrac{\pi}{6}.$$

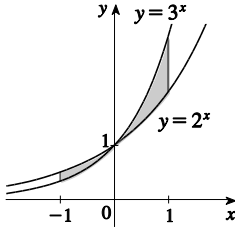
$$\begin{aligned}
A &= \int_0^{\pi/2} |\sin x - \cos 2x| dx \\
&= \int_0^{\pi/6} (\cos 2x - \sin x)dx + \int_{\pi/6}^{\pi/2} (\sin x - \cos 2x)dx \\
&= [\tfrac{1}{2}\sin 2x + \cos x]_0^{\pi/6} + [-\cos x - \tfrac{1}{2}\sin 2x]_{\pi/6}^{\pi/2} \\
&= \left(\tfrac{1}{4}\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right) - (0+1) + (0-0) - \left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{4}\sqrt{3}\right) \\
&= \tfrac{3}{2}\sqrt{3} - 1
\end{aligned}$$



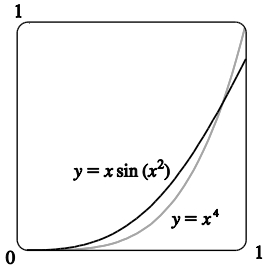
32.

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^1 |3^x - 2^x| dx = \int_{-1}^0 (2^x - 3^x)dx + \int_0^1 (3^x - 2^x)dx \\
&= \left[\frac{2^x}{\ln^2} - \frac{3^x}{\ln^3}\right]_{-1}^0 + \left[\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{2^x}{\ln 2}\right]_0^1 \\
&= \left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3}\right) - \left(\frac{1}{2\ln 2} - \frac{1}{3\ln 3}\right) + \left(\frac{3}{\ln 3} - \frac{2}{\ln 2}\right) - \left(\frac{1}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 2}\right) \\
&= \frac{2-1-4+2}{2\ln 2} + \frac{-3+1+9-3}{3\ln 3} = \frac{4}{3\ln 3} - \frac{1}{2\ln 2}
\end{aligned}$$

 © Groupe Modulo inc., 2013



33.

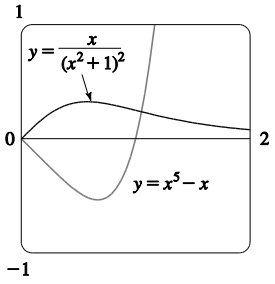


Le graphique montre que les courbes se croisent en $x = 0$ et en $x = a \approx 0{,}896$, avec $x \sin(x^2) > x^4$ sur l'intervalle $[0, a]$. L'aire A de la région délimitée par les courbes est donc

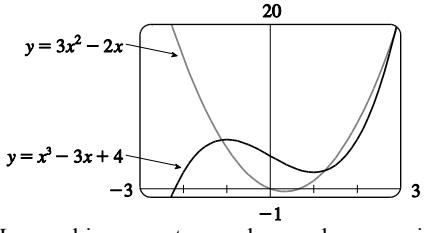
$$A = \int_0^a [x\sin(x^2) - x^4]dx = [-\tfrac{1}{2}\cos(x^2) - \tfrac{1}{5}x^5]_0^a$$
$$= -\tfrac{1}{2}\cos(a^2) - \tfrac{1}{5}a^5 + \tfrac{1}{2} \approx 0{,}037$$

34. Le graphique montre que les courbes se croisent (pour $x \geq 0$) en $x = 0$ et en $x = a$, où $a \approx 1{,}052$, avec $x/(x^2 + 1)^2 > x^5 - x$ sur l'intervalle $[0, a]$. L'aire A de la région délimitée par les courbes est

$$A = \int_0^a \left[\frac{x}{(x^2+1)^2} - (x^5 - x)\right]dx = \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^a$$
$$\approx 0{,}59$$



35.

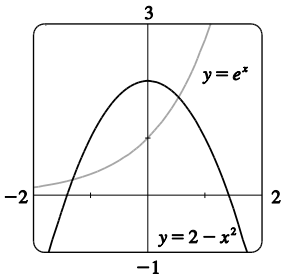


Le graphique montre que les courbes se croisent en $x = a \approx -1{,}11$, en $x = b \approx 1{,}25$ et en $x = b \approx 2{,}86$, avec $x^3 - 3x + 4 > 3x^2$ sur l'intervalle $[a, b]$ et $3x^2 - 2x > x^3 - 3x + 4$ sur l'intervalle $[b, c]$. L'aire de la région délimitée par les courbes est donc

 © Groupe Modulo inc., 2013

$$A = \int_a^b [(x^3 - 3x + 4) - (3x^2 - 2x)]dx + \int_b^c [(3x^2 - 2x) - (x^3 - 3x + 4)]dx$$
$$= \int_a^b (x^3 - 3x^2 - x + 4)dx + \int_b^c (-x^3 + 3x^2 + x - 4)dx$$
$$= [\tfrac{1}{4}x^4 - x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + 4x]_a^b + [-\tfrac{1}{4}x^4 + x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 - 4x]_b^c \approx 8{,}38$$

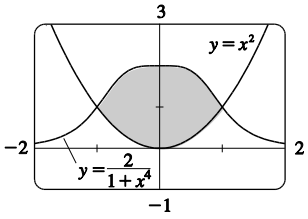
36.



Le graphique montre que les courbes se croisent en $x = a \approx -1{,}32$ et en $x = b \approx 0{,}54$, pour $2 - x^2 > e^x$ sur l'intervalle $[a, b]$. L'aire A de la région délimitée par les courbes est donc

$$A = \int_a^b [(2 - x^2) - e^x]dx = [2x - \tfrac{1}{3}x^3 - e^x]_a^b \approx 1{,}45$$

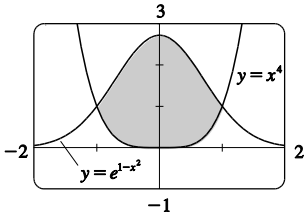
37.



Tracez les courbes $Y_1 = 2/(1+x\hat{}4)$ et $Y_2 = x\hat{}2$. Vous constaterez que $Y_1 > Y_2$ sur l'intervalle $[-1, 1]$; l'aire est donc exprimée par $\int_{-1}^{1}\left(\frac{2}{1+x^4} - x^2\right)dx$. Évaluez l'intégrale à l'aide d'une commande telle que fnInt($Y_1 - Y_2$, x, –1, 1), qui donnera comme résultat 2,801 23 (arrondis à cinq décimales).

Autre méthode : Tracez la courbe de $f(x) = Y_1 = 2/(1+x\hat{}4) - x\hat{}2$ et, à partir de cette courbe, évaluez $\int f(x)\,dx$ de –1 à 1.

38.

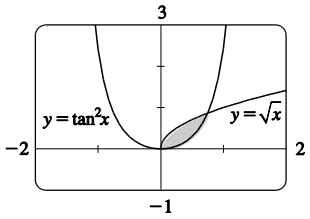


Les courbes se croisent en $x = \pm 1$.

$$A = \int_{-1}^{1} (e^{1-x^2} - x^4)dx \approx 3{,}660\,16$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

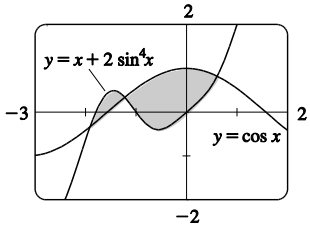
39.



Les courbes se croisent en $x = 0$ et en $x = a \approx 0{,}749\,363$.

$$A = \int_0^a \left(\sqrt{x} - \tan^2 x\right) dx \approx 0{,}251\,42$$

40.

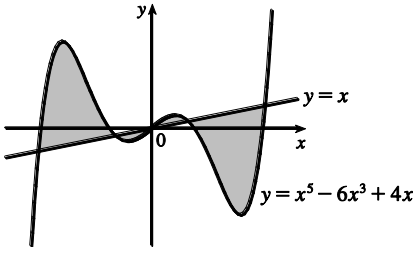


Les courbes se croisent en $x = a \approx -1{,}911\,917$, en $x = b \approx -1{,}223\,676$ et en $x = c \approx 0{,}607\,946$.

$$\begin{aligned} A &= \int_a^b [(x + 2\sin^4 x) - \cos x]dx + \int_b^c [\cos x - (x + 2\sin^4 x)]dx \\ &\approx 1{,}704\,13 \end{aligned}$$

41. Le graphique montre que les courbes $y = x$ et $y = x^5 - 6x^3 + 4x$ délimitent une région, constituée de quatre parties, qui est symétrique autour de l'origine (puisque $x^5 - 6x^3 + 4x$ et x sont des fonctions impaires de x). Les courbes se croisent aux valeurs de x où $x^5 - 6x^3 + 4x = x$, c'est-à-dire lorsque $x(x^4 - 6x^2 + 3) = 0$. Ceci se produit en $x = 0$ et lorsque $x^2 = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 12}}{2} = 3 \pm \sqrt{6}$, c'est-à-dire en $x = -\sqrt{3+\sqrt{6}}, -\sqrt{3-\sqrt{6}}, 0, \sqrt{3-\sqrt{6}}$ et $\sqrt{3+\sqrt{6}}$. L'aire exacte est

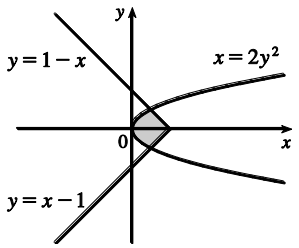
$$\begin{aligned} 2\int_0^{\sqrt{3+\sqrt{6}}} |(x^5 - 6x^3 + 4x) - x|dx &= 2\int_0^{\sqrt{3+\sqrt{6}}} |x^5 - 6x^3 + 3x|dx \\ &= 2\int_0^{\sqrt{3-\sqrt{6}}} (x^5 - 6x^3 + 3x)dx + 2\int_{\sqrt{3-\sqrt{6}}}^{\sqrt{3+\sqrt{6}}} (-x^5 + 6x^3 - 3x)dx \\ &\overset{\text{LCS}}{=} 12\sqrt{6} - 9 \end{aligned}$$



42. L'inéquation $x \geq 2y^2$ décrit la région qui se situe au-dessus de la parabole $x = 2y^2$ ou à sa droite. L'inéquation $x \leq 1 - |y|$ décrit la région qui se situe au-dessus de la courbe $x = 1 - |y| = \begin{cases} 1 - y & \text{si} \quad y \geq 0 \\ 1 + y & \text{si} \quad y < 0 \end{cases}$ ou à sa gauche. La région donnée est donc la région ombrée

 © Groupe Modulo inc., 2013

qui se situe entre les courbes. Les courbes d'équations $x = 1 - y$ et $x = 2y^2$ se croisent lorsque $1 - y = 2y^2 \iff 2y^2 + y - 1 = 0 \iff (2y-1)(y+1) = 0 \implies y = \frac{1}{2}$ [pour $y \geq 0$]. Par symétrie, $A = 2\int_0^{1/2} [(1-y) - 2y^2]dy = 2[-\frac{2}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^2 + y]_0^{1/2} = 2[(-\frac{1}{12} - \frac{1}{8} + \frac{1}{2}) - 0] = 2(\frac{7}{24}) = \frac{7}{12}$.



43. 1 seconde $= \frac{1}{3600}$ heure, donc 10 s $= \frac{1}{360}$ h. À partir des données du tableau, nous pouvons prendre $n = 5$ et utiliser la méthode du point-milieu. $\Delta t = \frac{1/360 - 0}{5} = \frac{1}{1800}$, donc

$$\begin{aligned}\text{distance}_{\text{Karine}} - \text{distance}_{\text{Chris}} &= \int_0^{1/360} v_K\,dt - \int_0^{1/360} v_C\,dt = \int_0^{1/360} (v_K - v_C)\,dt \\ &\approx M_5 = \tfrac{1}{1800}[(v_K - v_C)(1) + (v_K - v_C)(3) + (v_K - v_C)(5) + (v_K - v_C)(7) + (v_K - v_C)(9)] \\ &= \tfrac{1}{1800}[(35-32) + (84-74) + (114-100) + (138-121) + (158-138)] \\ &= \tfrac{1}{1800}(3 + 10 + 14 + 17 + 20) = \tfrac{1}{1800}(64) = \tfrac{8}{225} \text{ km, ou } 35\tfrac{5}{9} \text{ m}\end{aligned}.$$

44. Soit x = la distance depuis l'extrémité gauche de la piscine et $l = l(x)$ = la largeur au point x, alors la méthode du point-milieu avec $n = 4$ et $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{8 \cdot 2 - 0}{4} = 4$ produit Aire $= \int_0^{16} l\,dx \approx 4(6{,}2 + 6{,}8 + 5{,}0 + 4{,}8) = 4(22{,}8) = 91{,}2 \text{ m}^2$.

45. Soit $h(x)$ la hauteur de l'aile à x cm de l'extrémité gauche.

$$\begin{aligned}A \approx M_5 &= \frac{200 - 0}{5}[h(20) + h(60) + h(100) + h(140) + h(180)] \\ &= 40(20{,}3 + 29{,}0 + 27{,}3 + 20{,}5 + 8{,}7) = 40(105{,}8) = 4232 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

46. Pour $0 \leq t \leq 10$, $b(t) > d(t)$, donc l'aire entre les courbes est donnée par

$$\begin{aligned}\int_0^{10} [b(t) - d(t)]dt &= \int_0^{10} (2200e^{0{,}024t} - 1460e^{0{,}018t})dt = \left[\frac{2200}{0{,}024}e^{0{,}024t} - \frac{1460}{0{,}018}e^{0{,}018t}\right]_0^{10} \\ &= \left(\frac{275\,000}{3}e^{0{,}24} - \frac{730\,000}{9}e^{0{,}18}\right) - \left(\frac{275\,000}{3} - \frac{730\,000}{9}\right) \approx 8868 \text{ individus}\end{aligned}$$

Cette aire A représente l'augmentation de la population durant une période de dix ans.

47. Nous savons que l'aire sous la courbe A entre $t = 0$ et $t = x$ est $\int_0^x v_A(t)dt = s_A(x)$, où $v_A(t)$ est la vitesse de l'automobile A et s_A, son déplacement. D'une façon similaire, l'aire sous la courbe B entre $t = 0$ et $t = x$ est $\int_0^x v_B(t)dt = s_B(x)$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

a) Après une minute, l'aire sous la courbe *A* est supérieure à l'aire sous la courbe *B*. L'automobile A est donc en avance après une minute.

b) La valeur numérique de l'aire de la région ombrée, $s_A(1) - s_B(1)$, représente la distance de l'avance de l'automobile A sur l'automobile B après une minute.

c) Après deux minutes, l'automobile B se déplace plus rapidement que l'automobile A et l'écart entre les deux a diminué, mais l'aire sous la courbe *A* de $t = 0$ à $t = 2$ est toujours supérieure à l'aire correspondante sous la courbe *B*, et donc l'automobile A est toujours en avance.

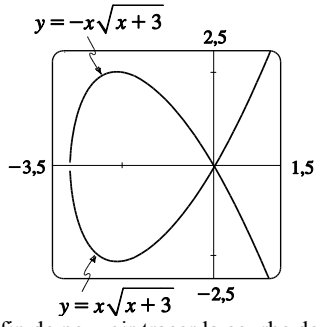
d) Le graphique semble indiquer que l'aire entre les courbes *A* et *B* pour $0 \le t \le 1$ (lorsque l'automobile A est la plus rapide), qui correspond à la distance de l'avance de l'automobile A, semble être environ 3 carrés. Par conséquent, les automobiles seront côte à côte au temps *x* où l'aire entre les courbes pour $1 \le t \le x$ (lorsque l'automobile B est la plus rapide) est égale à l'aire pour $0 \le t \le 1$. Le graphique semble montrer que ce temps est $x \approx 2{,}2$. Les deux automobiles seront donc côte à côte lorsque $t \approx 2{,}2$ minutes.

48. L'aire sous la courbe $R'(x)$ de $x = 50$ à $x = 100$ représente la variation du revenu, et l'aire sous la courbe $C'(x)$ de $x = 50$ à $x = 100$ représente la variation du coût. La région ombrée représente la différence entre ces deux valeurs, c'est-à-dire l'augmentation du profit lorsque le niveau de production passe de 50 unités à 100 unités. À l'aide de la règle des milieux des sous-intervalles, avec $n = 5$ et $\Delta x = 10$, nous obtenons

$$\begin{aligned} M_5 &= \Delta x\{[R'(55) - C'(55)] + [R'(65) - C'(65)] + [R'(75) - C'(75)] + [R'(85) - C'(85)] + [R'(95) - C'(95)]\} \\ &\approx 10(2{,}40 - 0{,}85 + 2{,}20 - 0{,}90 + 2{,}00 - 1{,}00 + 1{,}80 - 1{,}10 + 1{,}70 - 1{,}20) \\ &= 10(5{,}05) = 50{,}5 \text{ milliers de dollars} \end{aligned}$$

Si nous utilisons M_1, nous obtiendrons $50(2 - 1) = 50\,000$ \$.

49.

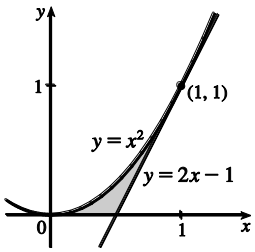


Afin de pouvoir tracer la courbe de cette fonction, nous devons d'abord l'exprimer en termes de fonctions explicites de *y*, c'est-à-dire $y = \pm x\sqrt{x+3}$. Le graphique montre que la boucle va de $x = -3$ à $x = 0$, et que, par symétrie, l'aire que nous désirons évaluer représente simplement deux fois l'aire située sous la moitié supérieure de la courbe sur cet intervalle, l'équation de la moitié supérieure étant $y = -x\sqrt{x+3}$. L'aire est donc $A = 2\int_{-3}^{0}\left(-x\sqrt{x+3}\right)dx$. Nous substituons $u = x + 3$, donc $du = dx$ et les bornes changent à 0 et 3; nous obtenons

 © Groupe Modulo inc., 2013

$$A = -2\int_0^3 \left[(u-3)\sqrt{u}\,\right]du = -2\int_0^3 (u^{3/2} - 3u^{1/2})du$$
$$= -2[\tfrac{2}{5}u^{5/2} - 2u^{3/2}]_0^3 = -2\left[\tfrac{2}{5}\left(3^2\sqrt{3}\right) - 2\left(3\sqrt{3}\right)\right] = \tfrac{24}{5}\sqrt{3}$$

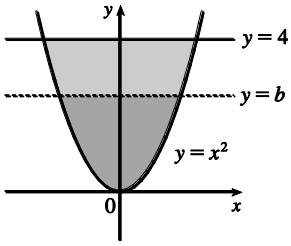
50.



Nous trouvons tout d'abord l'équation de la tangente à la parabole $y = x^2$ au point (1, 1): $y' = 2x$, donc la pente de la tangente est 2(1) = 2 et son équation est $y - 1 = 2(x - 1)$, ou $y = 2x - 1$. Nous aurions besoin de deux intégrales pour effectuer l'intégration par rapport à x, mais seulement une pour l'effectuer par rapport à y.

$$A = \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2}(y+1) - \sqrt{y}\,\right]dy = [\tfrac{1}{4}y^2 + \tfrac{1}{2}y - \tfrac{2}{3}y^{3/2}]_0^1$$
$$= \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{3} = \tfrac{1}{12}$$

51.



Par symétrie, nous ne considérons que le premier quadrant, où $y = x^2 \;\Rightarrow\; x = \sqrt{y}$. Nous cherchons un nombre b tel que

$$\int_0^b \sqrt{y}dy = \int_b^4 \sqrt{y}dy \;\Rightarrow\; \tfrac{2}{3}[y^{3/2}]_0^b = \tfrac{2}{3}[y^{3/2}]_b^4 \;\Rightarrow\; b^{3/2} = 4^{3/2} - b^{3/2} \;\Rightarrow\; 2b^{3/2} = 8 \;\Rightarrow\; b^{3/2} = 4 \;\Rightarrow\; b = 4^{2/3}.$$

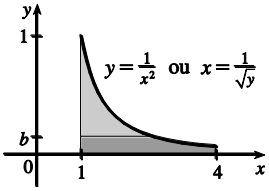
52. a) Nous cherchons un nombre a tel que $\int_1^a \frac{1}{x^2}dx = \int_a^4 \frac{1}{x^2}dx \;\Rightarrow\; \left[\frac{-1}{x}\right]_1^a = \left[\frac{-1}{x}\right]_a^4 \;\Rightarrow\; -\frac{1}{a} + 1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{a} \;\Rightarrow\; \frac{5}{4} = \frac{2}{a} \;\Rightarrow\; a = \frac{8}{5}$.

b) L'aire sous la courbe de la fonction $y = 1/x^2$ de $x = 1$ à $x = 4$ est $\frac{3}{4}$ [utilisez $a = 4$ dans la première intégrale de la sous-question a)]. La droite $y = b$ doit croiser la courbe $x = 1/\sqrt{y}$ et non la droite $x = 4$, puisque l'aire sous la droite $y = 1/4^2$ de $x = 1$ à $x = 4$ est seulement $\frac{3}{16}$, ce qui est moins de la moitié de $\frac{3}{4}$. Nous désirons choisir un nombre b de sorte que l'aire supérieure dans le graphique soit la moitié de l'aire totale sous la courbe $y = 1/x^2$ de $x = 1$ à $x = 4$. Nous déduisons que

$\int_b^1 \left(1/\sqrt{y} - 1\right)dy = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} \;\Rightarrow\; \left[2\sqrt{y} - y\right]_b^1 = \frac{3}{8} \;\Rightarrow\; 1 - 2\sqrt{b} + b = \frac{3}{8} \;\Rightarrow\; b - 2\sqrt{b} + \frac{5}{8} = 0$. Si nous posons $c = \sqrt{b}$, nous obtenons $c^2 - 2c + \frac{5}{8} = 0 \;\Rightarrow\; 8c^2 - 16c + 5 = 0$. Il s'ensuit que $c = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 160}}{16} = 1 \pm \frac{\sqrt{6}}{4}$.

Mais $c = \sqrt{b} < 1 \;\Rightarrow\; c = 1 - \frac{\sqrt{6}}{4} \;\Rightarrow\; b = c^2 = 1 + \frac{3}{8} - \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{1}{8}\left(11 - 4\sqrt{6}\right) \approx 0{,}1503$.

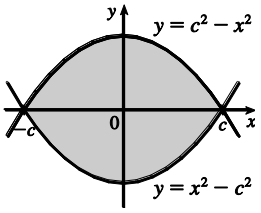
 © Groupe Modulo inc., 2013



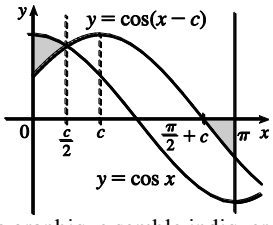
53. Supposons tout d'abord que $c > 0$, puisque b peut être remplacé par $-c$ dans les deux équations sans changer les courbes et parce que, si $c = 0$, les courbes ne délimitent pas une région. Le graphique montre que l'aire délimitée A se situe entre $x = -c$ et $x = c$ et, par symétrie, elle est égale à quatre fois l'aire située dans le premier quadrant. L'aire délimitée

est $A = 4\int_0^c (c^2 - x^2)dx = 4[c^2x - \frac{1}{3}x^3]_0^c = 4(c^3 - \frac{1}{3}c^3) = 4(\frac{2}{3}c^3) = \frac{8}{3}c^3$. Donc,

$A = 576 \Leftrightarrow \frac{8}{3}c^3 = 576 \Leftrightarrow c^3 = 216 \Leftrightarrow c = \sqrt[3]{216} = 6$. Il est à remarquer que $c = -6$ est une autre solution, puisque les courbes sont les mêmes.



54.



Le graphique semble indiquer que les courbes $y = \cos x$ et $y = \cos(x - c)$ se croisent à mi-chemin entre 0 et c, c'est-à-dire lorsque $x = c/2$. Nous pouvons vérifier que ceci est exact en constatant que $\cos(c/2 - c) = \cos(-c/2) = \cos(c/2)$. L'abscisse du point où la courbe $\cos(x - c)$ croise l'axe des x est de la forme $x = \frac{\pi}{2} + c$. Il faut donc que $\int_0^{c/2}[\cos x - \cos(x - c)]dx = -\int_{\pi/2+c}^{\pi}\cos(x - c)dx$ [un signe négatif apparaît au membre de droite de l'équation puisque la seconde aire est sous l'axe des x]

$\Leftrightarrow [\sin x - \sin(x - c)]_0^{c/2} = -[\sin(x - c)]_{\pi/2+c}^{\pi} \Rightarrow$
$[\sin(c/2) - \sin(-c/2)] - [-\sin(-c)] = -\sin(\pi - c) + \sin[(\frac{\pi}{2} + c) - c] \Leftrightarrow 2\sin(c/2) - \sin c = -\sin c + 1$. [Nous avons ici tiré parti du fait que la fonction sinusoïdale est impaire et du fait que $\sin(\pi - c) = \sin c$].

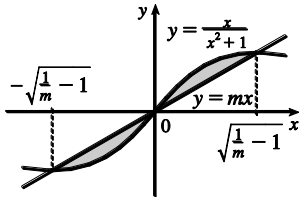
Donc, $2\sin(c/2) = 1 \Leftrightarrow \sin(c/2) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow c/2 = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow c = \frac{\pi}{3}$.

55. La courbe et la droite délimitent une région lorsqu'elles se croisent en au moins deux points. Nous devons donc résoudre l'équation

$x/(x^2 + 1) = mx \Rightarrow x = x(mx^2 + m) \Rightarrow x(mx^2 + m) - x = 0 \Rightarrow x(mx^2 + m - 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou

 © Groupe Modulo inc., 2013

$mx^2 + m - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$ ou $x^2 = \dfrac{1-m}{m} \;\Rightarrow\; x = 0$ ou $x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{m} - 1}$. Remarquez que si $m = 1$, la seule solution est $x = 0$ et il n'y a pas de région fermée. Mais si $1/m - 1 > 0 \;\Leftrightarrow\; 1/m > 1 \;\Leftrightarrow\; 0 < m < 1$, alors il y a deux solutions. [Une autre façon de visualiser ceci est d'observer que la pente de la tangente à la courbe $y = x/(x^2 + 1)$ à l'origine est $y'(0) = 1$ et que, par conséquent, nous devons avoir $0 < m < 1$.] Il est impossible d'effectuer simplement une intégration entre les racines positive et négative, puisque la courbe et la droite se croisent à l'origine. Puisque mx et $x/(x^2 + 1)$ sont toutes deux des fonctions impaires, l'aire totale est deux fois l'aire entre les courbes sur l'intervalle $\left[0, \sqrt{1/m - 1}\right]$. L'aire fermée totale est donc



$$2\int_0^{\sqrt{1/m-1}}\left[\frac{x}{x^2+1} - mx\right]dx = 2[\tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) - \tfrac{1}{2}mx^2]_0^{\sqrt{1/m-1}} = [\ln(1/m - 1 + 1) - m(1/m - 1)] - (\ln 1 - 0)$$
$$= \ln(1/m) - 1 + m = m - \ln m - 1$$

PROJET CONCRET

L'INDICE DE GINI

1. a) $G = \dfrac{\text{aire entre } L \text{ et } y = x}{\text{aire sous } y = x} = \dfrac{\int_0^1 [x - L(x)]dx}{\frac{1}{2}} = 2\int_0^1 [x - L(x)]dx$

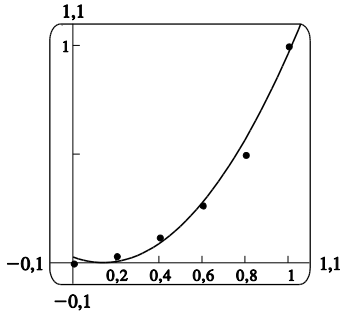
b) Pour une société parfaitement égalitaire, $L(x) = x$, donc $G = 2\int_0^1 [x - x]dx = 0$. Pour une société parfaitement totalitaire, $L(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = 1 \\ 0 & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \end{cases}$, donc $G = 2\int_0^1 (x - 0)dx = 2[\tfrac{1}{2}x^2]_0^1 = 2(\tfrac{1}{2}) = 1$.

2. a) En 2008, les 20 % les plus riches de la population américaine ont reçu $1 - L(0{,}8) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$ ou 50 % du revenu total des États-Unis.

b) Le modèle quadratique est de la forme $Q(x) = ax^2 + bx + b$. Si nous utilisons une précision de six décimales, nous obtenons $a = 1{,}302\,679$, $b = -0{,}367\,679$ et $c = 0{,}026\,357$. Bien que le modèle quadratique semble correspondre de façon satisfaisante aux données, il ne faut pas oublier que $Q(0) \neq 0$ et que la fonction Q est à la fois décroissante et croissante.

c) $G = 2\int_0^1 [x - Q(x)]dx \approx 0{,}4465$

 © Groupe Modulo inc., 2013

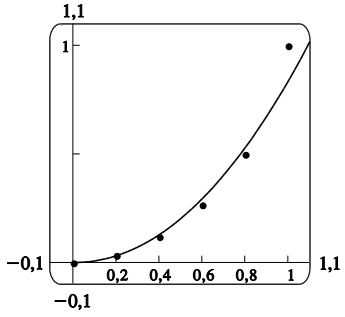


3.

Année	$Q(x) = ax^2 + bx + c$			Gini
	a	b	b	
1970	1,117 411	–0,152 411	0,013 321	0,3808
1980	1,149 554	–0,189 696	0,016 179	0,3910
1990	1,216 07	–0,268 214	0,020 714	0,4161
2000	1,280 804	–0,345 232	0,025 821	0,4397

L'indice de Gini a augmenté de façon constante de 1970 à 2008. La tendance s'oriente vers une société moins égalitaire.

4. Si nous utilisons la commande PowerFit du logiciel Maple ou la commande PwrReg de la calculatrice TI, et si nous omettons le point (0, 0), nous obtenons $P(x) = 0{,}847\,528x^{2{,}051\,771}$ et un indice de Gini de $2\int_0^1 [x - P(x)]dx \approx 0{,}444\,6$. Il est à noter que la fonction puissance est presque quadratique. La commande FindFit du logiciel Mathematica produit des résultats légèrement différents : $P(x) = 0{,}983\,856x^{2{,}668\,876}$ et un indice de Gini de 0,463 7.

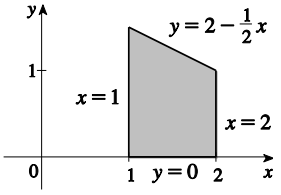


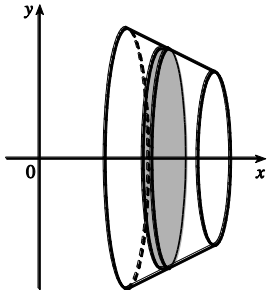
 © Groupe Modulo inc., 2013

2.2 Le volume

1. Selon un découpage vertical, la section transversale est un disque de rayon $2-\frac{1}{2}x$; son aire est donc $A(x)=\pi(2-\frac{1}{2}x)^2$.

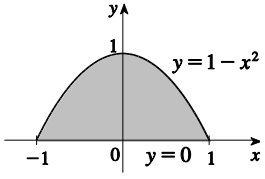
$$\begin{aligned}V&=\int_1^2 A(x)dx=\int_1^2 \pi(2-\tfrac{1}{2}x)^2dx\\&=\pi\int_1^2(4-2x+\tfrac{1}{4}x^2)dx\\&=\pi[4x-x^2+\tfrac{1}{12}x^3]_1^2\\&=\pi[(8-4+\tfrac{8}{12})-(4-1+\tfrac{1}{12})]\\&=\pi(1+\tfrac{7}{12})=\tfrac{19}{12}\pi\end{aligned}$$

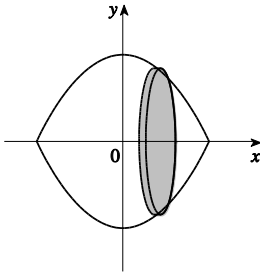




2. Selon un découpage vertical, la section transversale est un disque de rayon $1-x^2$; son aire est donc $A(x)=\pi(1-x^2)^2$.

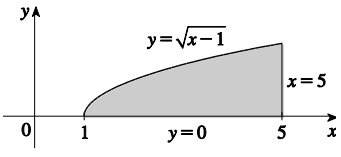
$$\begin{aligned}V&=\int_{-1}^1 A(x)dx=\int_{-1}^1 \pi(1-x^2)^2dx\\&=2\pi\int_0^1(1-2x^2+x^4)dx=2\pi[x-\tfrac{2}{3}x^3+\tfrac{1}{5}x^5]_0^1\\&=2\pi(1-\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{5})=2\pi(\tfrac{8}{15})=\tfrac{16}{15}\pi\end{aligned}$$

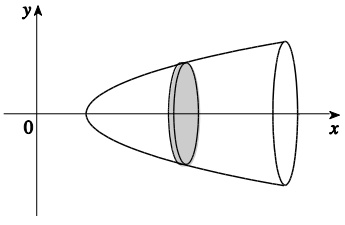




3. Selon un découpage vertical, la section transversale est un disque de rayon $\sqrt{x-1}$; son aire est donc $A(x)=\pi\left(\sqrt{x-1}\right)^2=\pi(x-1)$.

$$V=\int_1^5 A(x)dx=\int_1^5\pi(x-1)dx=\pi[\tfrac{1}{2}x^2-x]_1^5=\pi[(\tfrac{25}{2}-5)-(\tfrac{1}{2}-1)]=8\pi$$

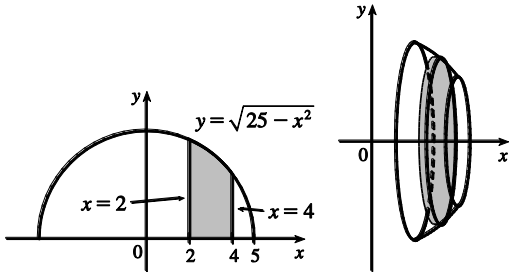




 © Groupe Modulo inc., 2013

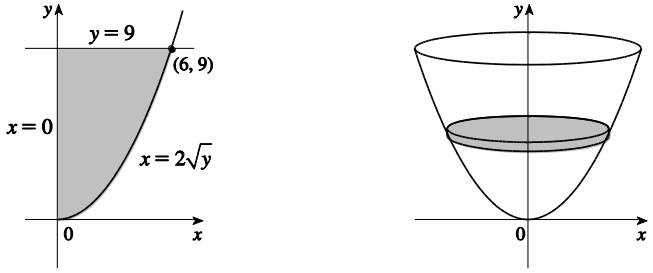
4. Selon un découpage vertical, la section transversale est un disque de rayon $\sqrt{25-x^2}$; son aire est donc $A(x)=\pi\left(\sqrt{25-x^2}\right)^2$.

$$V=\int_2^4 A(x)dx=\int_2^4 \pi\left(\sqrt{25-x^2}\right)^2 dx$$
$$=\pi\int_2^4 (25-x^2)dx=\pi[25x-\tfrac{1}{3}x^3]_2^4$$
$$=\pi[(100-\tfrac{64}{3})-(50-\tfrac{8}{3})]=\tfrac{94}{3}\pi$$



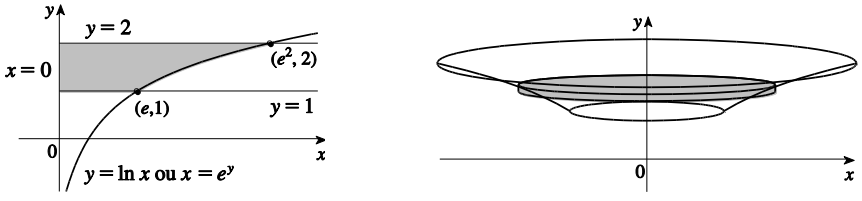
5. Selon un découpage horizontal, la section transversale est un disque de rayon $2\sqrt{y}$; son aire est donc $A(y)=\pi\left(2\sqrt{y}\right)^2$.

$$V=\int_0^9 A(y)dy=\int_0^9 \pi\left(2\sqrt{y}\right)^2 dy=4\pi\int_0^9 y\,dy$$
$$=4\pi[\tfrac{1}{2}y^2]_0^9=2\pi(81)=162\pi$$



6. Selon un découpage horizontal, la section transversale est un disque de rayon e^y [puisque $y=\ln x$]; son aire est donc $A(y)=\pi(e^y)^2$.

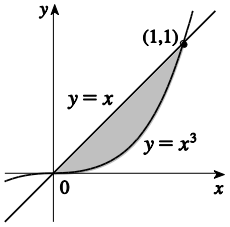
$$V=\int_1^2 \pi(e^y)^2 dy=\pi\int_1^2 e^{2y}dy=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2y}\right]_1^2=\frac{\pi}{2}(e^4-e^2)$$

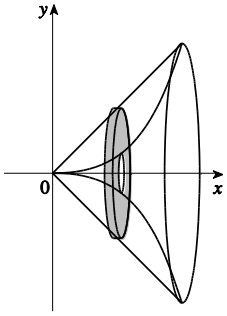


7. Selon un découpage vertical, la section transversale est un disque troué dont le rayon interne est x^3 et le rayon externe x; son aire est donc $A(x)=\pi(x)^2-\pi(x^3)^2=\pi(x^2-x^6)$.

$$V=\int_0^1 A(x)dx=\int_0^1 \pi(x^2-x^6)dx$$
$$=\pi[\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{7}x^7]_0^1=\pi(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{7})=\tfrac{4}{21}\pi$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

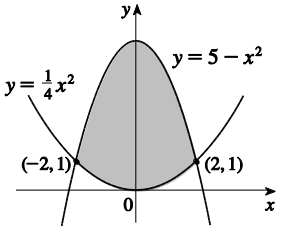


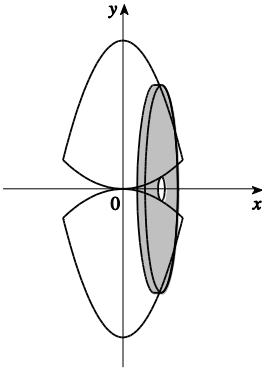


8. Selon un découpage vertical, la section transversale est un disque troué dont le rayon interne est $\frac{1}{4}x^2$ et le rayon externe $5 - x^2$; son aire est donc

$$\begin{aligned} A(x) &= \pi(5-x^2)^2 - \pi(\tfrac{1}{4}x^2)^2 \\ &= \pi(25 - 10x^2 + x^4 - \tfrac{1}{16}x^4). \end{aligned}$$

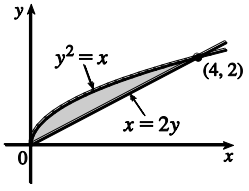
$$\begin{aligned} V &= \int_{-2}^{2} A(x)dx = \int_{-2}^{2} \pi(25 - 10x^2 + \tfrac{15}{16}x^4)dx \\ &= 2\pi\int_{0}^{2}(25 - 10x^2 + \tfrac{15}{16}x^4)dx \\ &= 2\pi[25x - \tfrac{10}{3}x^3 + \tfrac{3}{16}x^5]_0^2 = 2\pi(50 - \tfrac{80}{3} + 6) = \tfrac{176}{3}\pi \end{aligned}$$

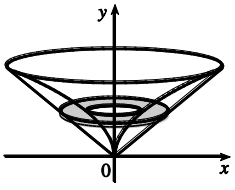




9. Selon un découpage horizontal, la section transversale est un disque troué dont le rayon interne est y^2 et le rayon externe $2y$; son aire est donc $A(y) = \pi(2y)^2 - \pi(y^2)^2 = \pi(4y^2 - y^4)$.

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 A(y)dy = \pi\int_0^2 (4y^2 - y^4)dy \\ &= \pi\left[\tfrac{4}{3}y^3 - \tfrac{1}{5}y^5\right]_0^2 = \pi\left(\tfrac{32}{3} - \tfrac{32}{5}\right) = \tfrac{64}{15}\pi \end{aligned}$$



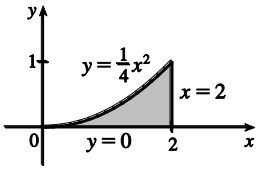


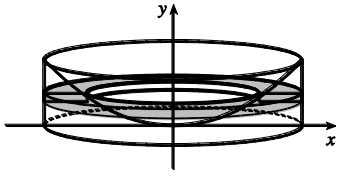
 © Groupe Modulo inc., 2013

10. Selon un découpage horizontal, la section transversale est un disque troué dont le rayon interne est $x = 2\sqrt{y}$ et le rayon externe 2; son aire est donc

$$\begin{aligned} A(y) &= \pi\left[(2)^2 - (2\sqrt{y})^2\right] \\ &= \pi(4 - 4y) = 4\pi(1 - y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(y)dy = \int_0^1 4\pi(1-y)dy \\ &= 4\pi\left[y - \tfrac{1}{2}y^2\right]_0^1 = 4\pi\left[\left(1 - \tfrac{1}{2}\right) - 0\right] = 2\pi \end{aligned}$$

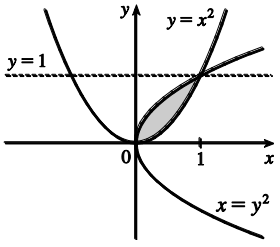


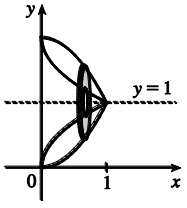


11. Selon un découpage vertical, la section transversale est un disque troué dont le rayon interne est $1 - \sqrt{x}$ et le rayon externe $1 - x^2$; son aire est donc

$$\begin{aligned} A(x) &= \pi\left[(1-x^2)^2 - (1-\sqrt{x})^2\right] \\ &= \pi\left[(1 - 2x^2 + x^4) - (1 - 2\sqrt{x} + x)\right] \\ &= \pi\left(x^4 - 2x^2 + 2\sqrt{x} - x\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(x)dx = \int_0^1 \pi(x^4 - 2x^2 + 2x^{1/2} - x)\, dx \\ &= \pi\left[\tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{4}{3}x^{3/2} - \tfrac{1}{2}x^2\right]_0^1 \\ &= \pi\left(\tfrac{1}{5} - \tfrac{2}{3} + \tfrac{4}{3} - \tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{11}{30}\pi \end{aligned}$$



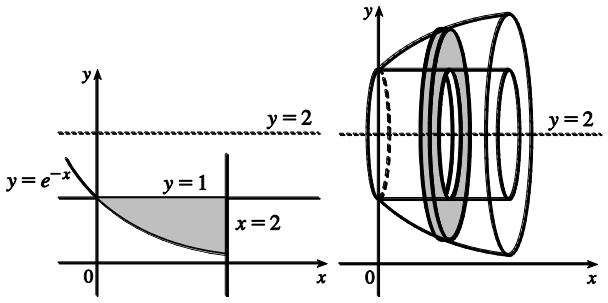


12. Selon un découpage vertical, la section transversale est un disque troué dont le rayon interne est 2 – 1 et le rayon externe $2 - e^{-x}$; son aire est donc

$$\begin{aligned} A(x) &= \pi\left[(2 - e^{-x})^2 - (2-1)^2\right] = \pi\left[(4 - 4e^{-x} + e^{-2x}) - 1\right] \\ &= \pi(3 - 4e^{-x} + e^{-2x}). \end{aligned}$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

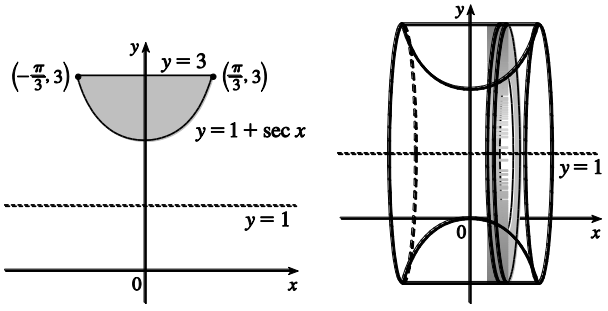
$$V = \int_0^2 A(x)dx = \int_0^2 \pi(3 - 4e^{-x} + e^{-2x})dx$$
$$= \pi\left[3x + 4e^{-x} - \tfrac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^2$$
$$= \pi\left[(6 + 4e^{-2} - \tfrac{1}{2}e^{-4}) - (0 + 4 - \tfrac{1}{2})\right]$$
$$= (\tfrac{5}{2} + 4e^{-2} - \tfrac{1}{2}e^{-4})\pi$$



13. Selon un découpage horizontal, la section transversale est un disque troué dont le rayon interne est

$(1 + \sec x) - 1 = \sec x$ et le rayon externe $3 - 1 = 2$; son aire est donc $A(x) = \pi\left[2^2 - (\sec x)^2\right] = \pi(4 - \sec^2 x)$.

$$V = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} A(x)dx = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \pi(4 - \sec^2 x)\, dx$$
$$= 2\pi\int_0^{\pi/3} (4 - \sec^2 x)\, dx \quad [\text{par symétrie}]$$
$$= 2\pi\left[4x - \tan x\right]_0^{\pi/3} = 2\pi\left[\left(\tfrac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right) - 0\right]$$
$$= 2\pi\left(\tfrac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right)$$

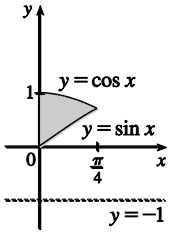


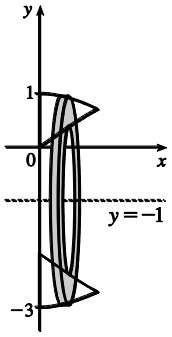
14. Selon un découpage vertical, la section transversale est un disque troué dont le rayon interne est $\sin x - (-1)$ et le rayon externe $\cos x - (-1)$; son aire est donc

$$A(x) = \pi\left[(\cos x + 1)^2 - (\sin x + 1)^2\right]$$
$$= \pi(\cos^2 x + 2\cos x - \sin^2 x - 2\sin x)$$
$$= \pi(\cos 2x + 2\cos x - 2\sin x).$$

$$V = \int_0^{\pi/4} A(x)dx = \int_0^{\pi/4} \pi(\cos 2x + 2\cos x - 2\sin x)dx$$
$$= \pi\left[\tfrac{1}{2}\sin 2x + 2\sin x + 2\cos x\right]_0^{\pi/4}$$
$$= \pi\left[\left(\tfrac{1}{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2}\right) - \left(0 + 0 + 2\right)\right] = \left(2\sqrt{2} - \tfrac{3}{2}\right)\pi$$

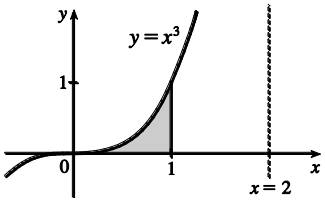
 © Groupe Modulo inc., 2013

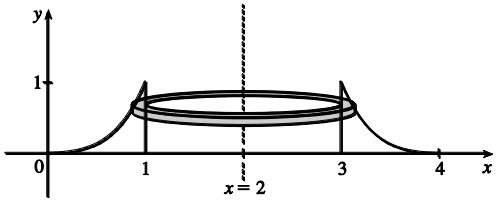




15. Selon un découpage horizontal, la section transversale est un disque troué dont le rayon interne est 2 – 1 et le rayon externe $2-\sqrt[3]{y}$; son aire est donc $A(y)=\pi\left[(2-\sqrt[3]{y})^2-(2-1)^2\right]=\pi\left[4-4\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y^2}-1\right]$.

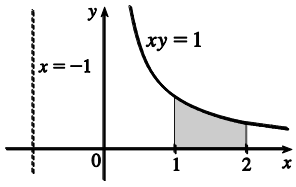
$V=\int_0^1 A(y)dy=\int_0^1\pi(3-4y^{1/3}+y^{2/3})dy=\pi\left[3y-3y^{4/3}+\frac{3}{5}y^{2/3}\right]_0^1=\pi\left(3-3+\frac{3}{5}\right)=\frac{3}{5}\pi$.

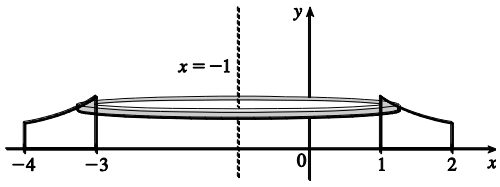




16. Pour $0\le y<\frac{1}{2}$, selon un découpage horizontal, la section transversale est un disque troué dont le rayon interne est 1 – (–1) et le rayon externe 2 – (–1); son aire est donc $A(y) = \pi(3^2 - 2^2) = 5\pi$. Pour $\frac{1}{2}\le y\le 1$, selon un découpage horizontal, la section transversale est un disque troué dont le rayon interne est 1 – (–1) et le rayon externe $1/y$ – (–1); son aire est donc $A(y)=\pi\left[(1/y+1)^2-(2)^2\right]=\pi(1/y^2+2/y+1-4)$.

$$V=\int_0^{1/2}5\pi dy+\int_{1/2}^1\pi\left(\frac{1}{y^2}+\frac{2}{y}-3\right)dy=5\pi\left[y\right]_0^{1/2}+\pi\left[-\frac{1}{y}+2\ln y-3y\right]_{1/2}^1$$
$$=5\pi\left(\tfrac{1}{2}-0\right)+\pi\left[\left(-1+0-3\right)-\left(-2+2\ln\tfrac{1}{2}-\tfrac{3}{2}\right)\right]=\tfrac{5}{2}\pi+\pi\left(-\tfrac{1}{2}+2\ln 2\right)$$
$$=(2+2\ln 2)\pi=2\pi(1+\ln 2)$$



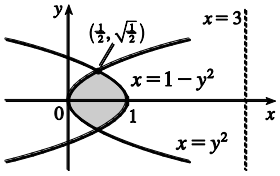


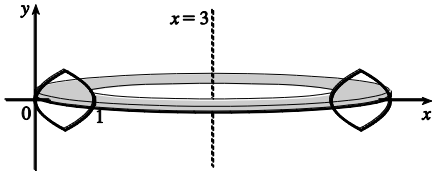
17. Comme les courbes sont symétriques, nous pouvons voir qu'elles se croisent en $x=\frac{1}{2}$; donc, $y^2=\frac{1}{2}\ \Leftrightarrow\ y=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$. Selon un découpage horizontal, la section transversale est un disque troué dont le rayon interne est $3-(1-y^2)$ et le rayon externe $3-y^2$; son aire est donc

 © Groupe Modulo inc., 2013

$$\begin{aligned}A(y) &= \pi\left[(3-y^2)^2-(2+y^2)^2\right]\\ &= \pi\left[(9-6y^2+y^4)-(4+4y^2+y^4)\right]\\ &= \pi(5-10y^2).\end{aligned}$$

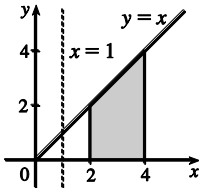
$$\begin{aligned}V &= \int_{-\sqrt{1/2}}^{\sqrt{1/2}} A(y)\,dy\\ &= 2\int_0^{\sqrt{1/2}} 5\pi(1-2y^2)\,dy \quad [\text{par symétrie}]\\ &= 10\pi\left[y-\tfrac{2}{3}y^3\right]_0^{\sqrt{2}/2} = 10\pi\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}-\tfrac{\sqrt{2}}{6}\right)\\ &= 10\pi\left(\tfrac{\sqrt{2}}{3}\right) = \tfrac{10}{3}\sqrt{2}\pi\end{aligned}$$

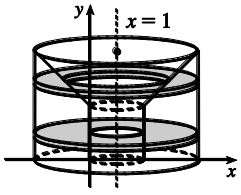




18. Pour $0 \le y < 2$, selon un découpage horizontal, la section transversale est un disque troué dont le rayon interne est 2 – 1 et le rayon externe 4 – 1; son aire est donc $A_1(y) = \pi(4-1)^2 - \pi(2-1)^2$. Pour $2 \le y \le 4$, selon un découpage horizontal, la section transversale est un disque troué dont le rayon interne est $y - 1$ et le rayon externe 4 – 1; son aire est donc $A_2(y) = \pi(4-1)^2 - \pi(y-1)^2$.

$$\begin{aligned}V &= \int_0^4 A(y)dy = \pi\int_0^2\left[(4-1)^2-(2-1)^2\right]dy + \pi\int_2^4\left[(4-1)^2-(y-1)^2\right]dy\\ &= \pi\left[8y\right]_0^2 + \pi\int_2^4(8+2y-y^2)dy\\ &= 16\pi + \pi\left[8y+y^2-\tfrac{1}{3}y^3\right]_2^4\\ &= 16\pi + \pi\left[\left(32+16-\tfrac{64}{3}\right)-\left(16+4-\tfrac{8}{3}\right)\right]\\ &= \tfrac{76}{3}\pi\end{aligned}$$





19. $\mathscr{R}_1$ autour de OA (la droite $y = 0$) :

$$V = \int_0^1 A(x)dx = \int_0^1 \pi(x)^2\,dx = \pi\left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \tfrac{1}{3}\pi$$

20. $\mathscr{R}_1$ autour de OC (la droite $x = 0$) :

$$V = \int_0^1 A(y)dy = \int_0^1 \pi(1^2-y^2)dy = \pi\left[y-\tfrac{1}{3}y^3\right]_0^1 = \pi\left(1-\tfrac{1}{3}\right) = \tfrac{2}{3}\pi$$

21. $\mathscr{R}_1$ autour de AB (la droite $x = 1$) :

 © Groupe Modulo inc., 2013

$$V = \int_0^1 A(y)\,dy = \int_0^1 \pi(1-y)^2\,dy = \pi\int_0^1 (1-2y+y^2)\,dy = \pi\left[y - y^2 + \tfrac{1}{3}y^3\right]_0^1 = \tfrac{1}{3}\pi$$

22. $\mathscr{R}_1$ autour de BC (la droite $y = 1$) :

$$V = \int_0^1 A(x)dx = \int_0^1 \pi[(1-0)^2 - (1-x)^2]dx = \pi\int_0^1 [1-(1-2x+x^2)]dx$$
$$= \pi\int_0^1 (-x^2+2x)dx = \pi\left[-\tfrac{1}{3}x^3 + x^2\right]_0^1 = \pi\left(-\tfrac{1}{3}+1\right) = \tfrac{2}{3}\pi$$

23. $\mathscr{R}_2$ autour de OA (la droite $y = 0$) :

$$V = \int_0^1 A(x)dx = \int_0^1 \pi\left[1^2 - \left(\sqrt[4]{x}\right)^2\right]dx = \pi\int_0^1 (1-x^{1/2})\,dx = \pi\left[x - \tfrac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1 = \pi\left(1-\tfrac{2}{3}\right) = \tfrac{1}{3}\pi$$

24. $\mathscr{R}_2$ autour de OC (la droite $x = 0$) :

$$V = \int_0^1 A(y)dy = \int_0^1 \pi[(y^4)^2]dy = \pi\int_0^1 y^8 dy = \pi\left[\tfrac{1}{9}y^9\right]_0^1 = \tfrac{1}{9}\pi$$

25. $\mathscr{R}_2$ autour de AB (la droite $x = 1$) :

$$V = \int_0^1 A(y)dy = \int_0^1 \pi[1^2 - (1-y^4)^2]dy = \pi\int_0^1 [1-(1-2y^4+y^8)]dy$$
$$= \pi\int_0^1 (2y^4 - y^8)dy = \pi\left[\tfrac{2}{5}y^5 - \tfrac{1}{9}y^9\right]_0^1 = \pi\left(\tfrac{2}{5}-\tfrac{1}{9}\right) = \tfrac{13}{45}\pi$$

26. $\mathscr{R}_2$ autour de BC (la droite $y = 1$) :

$$V = \int_0^1 A(x)\,dx = \int_0^1 \pi(1-\sqrt[4]{x})^2\,dx = \pi\int_0^1 (1-2x^{1/4}+x^{1/2})\,dx$$
$$= \pi\left[x - \tfrac{8}{5}x^{5/4} + \tfrac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1 = \pi\left(1-\tfrac{8}{5}+\tfrac{2}{3}\right) = \tfrac{1}{15}\pi$$

27. $\mathscr{R}_3$ autour de OA (la droite $y = 0$) :

$$V = \int_0^1 A(x)dx = \int_0^1 \pi\left[\left(\sqrt[4]{x}\right)^2 - x^2\right]dx = \pi\int_0^1 (x^{1/2}-x^2)dx = \pi\left[\tfrac{2}{3}x^{3/2} - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \pi\left(\tfrac{2}{3}-\tfrac{1}{3}\right) = \tfrac{1}{3}\pi$$

Remarque : Soit $\mathscr{R} = \mathscr{R}_1 \cup \mathscr{R}_2 \cup \mathscr{R}_3$. Si nous effectuons une rotation de $\mathscr{R}$ autour de n'importe lequel des segments OA, OC, AB ou BC, nous obtenons un cylindre droit à base circulaire de hauteur 1 et de rayon 1. Son volume est $\pi r^2 h = \pi(1)^2 \cdot 1 = \pi$. Nous pouvons effectuer une vérification des réponses aux exercices 19, 23 et 27 en additionnant ces réponses; la somme obtenue doit être égale à π. Ainsi, $\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{3}\pi + \frac{1}{3}\pi = \pi$.

28. $\mathscr{R}_3$ autour de OC (la droite $x = 0$) :

$$V = \int_0^1 A(y)\,dy = \int_0^1 \pi[y^2 - (y^4)^2]\,dy = \pi\int_0^1 (y^2 - y^8)dy = \pi\left[\tfrac{1}{3}y^3 - \tfrac{1}{9}y^9\right]_0^1 = \pi\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{9}\right) = \tfrac{2}{9}\pi$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

Remarque : Se référer à la remarque qui apparaît à l'exercice 27. La somme des réponses aux exercices 20, 24 et 28 est $\frac{2}{3}\pi + \frac{1}{9}\pi + \frac{2}{9}\pi = \pi$.

29. $\mathscr{R}_3$ autour de AB (la droite $x = 1$) :

$$V = \int_0^1 A(y)dy = \int_0^1 \pi[(1-y^4)^2 - (1-y)^2]dy = \pi\int_0^1 [(1-2y^4+y^8) - (1-2y+y^2)]dy$$
$$= \pi\int_0^1 (y^8 - 2y^4 - y^2 + 2y)dy = \pi\left[\tfrac{1}{9}y^9 - \tfrac{2}{5}y^5 - \tfrac{1}{3}y^3 + y^2\right]_0^1 = \pi\left(\tfrac{1}{9} - \tfrac{2}{5} - \tfrac{1}{3} + 1\right) = \tfrac{17}{45}\pi$$

Remarque : Se référer à la remarque qui apparaît à l'exercice 27. La somme des réponses aux exercices 21, 25 et 29 est $\frac{1}{3}\pi + \frac{13}{45}\pi + \frac{17}{45}\pi = \pi$.

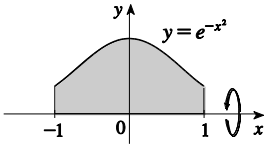
30. $\mathscr{R}_3$ autour de BC (la droite $y = 1$):

$$V = \int_0^1 A(x)\,dx = \int_0^1 \pi[(1-x)^2 - (1-\sqrt[4]{x})^2]\,dx = \pi\int_0^1 [(1-2x+x^2) - (1-2x^{1/4}+x^{1/2})]\,dx$$
$$= \pi\int_0^1 (x^2 - 2x - x^{1/2} + 2x^{1/4})\,dx = \pi\left[\tfrac{1}{3}x^3 - x^2 - \tfrac{2}{3}x^{3/2} + \tfrac{8}{5}x^{5/4}\right]_0^1 = \pi\left(\tfrac{1}{3} - 1 - \tfrac{2}{3} + \tfrac{8}{5}\right) = \tfrac{4}{15}\pi$$

Remarque : Se référer à la remarque qui apparaît à l'exercice 27. La somme des réponses aux exercices 22, 26 et 30 est $\frac{2}{3}\pi + \frac{1}{15}\pi + \frac{4}{15}\pi = \pi$.

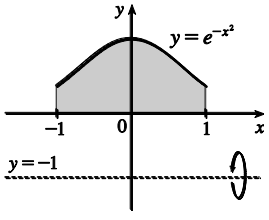
31. a) Autour de l'axe des x :

$$V = \int_{-1}^1 \pi(e^{-x^2})^2\,dx = 2\pi\int_0^1 e^{-2x^2}\,dx \quad [\text{par symétrie}]$$
$$\approx 3,758\,25$$



b) Autour de $y = -1$:

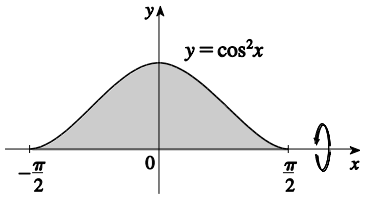
$$V = \int_{-1}^1 \pi\left\{[e^{-x^2} - (-1)]^2 - [0 - (-1)]^2\right\}dx$$
$$= 2\pi\int_0^1 [(e^{-x^2}+1)^2 - 1]\,dx = 2\pi\int_0^1 (e^{-2x^2} + 2e^{-x^2})\,dx$$
$$\approx 13,143\,12$$



 © Groupe Modulo inc., 2013

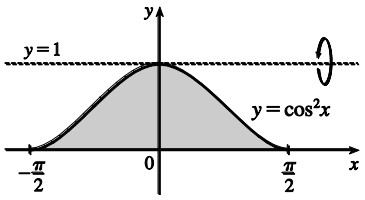
32. a) Autour de l'axe des x :

$$V = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \pi(\cos^2 x)^2 dx = 2\pi \int_0^{\pi/2} \cos^4 x dx \quad [\text{par symétrie}]$$
$$\approx 3,70110$$



b) Autour de $y = 1$:

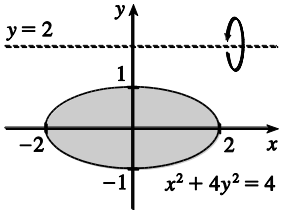
$$V = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \pi[(1-0)^2 - (1-\cos^2 x)^2]dx$$
$$= 2\pi \int_0^{\pi/2} [1-(1-2\cos^2 x + \cos^4 x)]dx$$
$$= 2\pi \int_0^{\pi/2} (2\cos^2 x - \cos^4 x)dx \approx 6,16850$$



33. a) Autour de $y = 2$:

$$x^2 + 4y^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad 4y^2 = 4 - x^2 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 1 - x^2/4 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{1-x^2/4}$$

$$V = \int_{-2}^{2} \pi\left\{\left[2-\left(-\sqrt{1-x^2/4}\right)\right]^2 - \left(2-\sqrt{1-x^2/4}\right)^2\right\}dx$$
$$= 2\pi \int_0^2 8\sqrt{1-x^2/4}dx \approx 78,95684$$

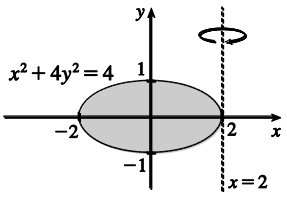


b) Autour de $x = 2$:

$$x^2 + 4y^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4 - 4y^2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{4-4y^2}$$

$$V = \int_{-1}^{1} \pi\left\{\left[2-\left(-\sqrt{4-4y^2}\right)\right]^2 - \left(2-\sqrt{4-4y^2}\right)^2\right\}dy$$
$$= 2\pi \int_0^1 8\sqrt{4-4y^2}dy \approx 78,95684$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

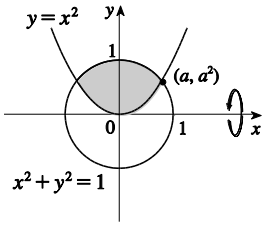


[On constate qu'il s'agit de la même approximation qu'à la sous-question a). Ceci peut être expliqué par le théorème de Pappus qui sera abordé à la section 4.3.]

34. a) Autour de l'axe des x :

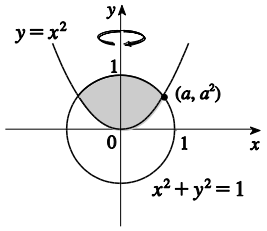
$$y = x^2 \text{ et } x^2 + y^2 = 1 \;\Rightarrow\; x^2 + x^4 = 1 \;\Rightarrow\; x^4 + x^2 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}618 \;\Rightarrow\; x = \pm a = \pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \approx \pm 0{,}786 .$$

$$V = \int_{-a}^{a} \pi\left[\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 - (x^2)^2\right] dx = 2\pi\int_0^a (1 - x^2 - x^4)\, dx$$
$$\approx 3{,}544\,59$$

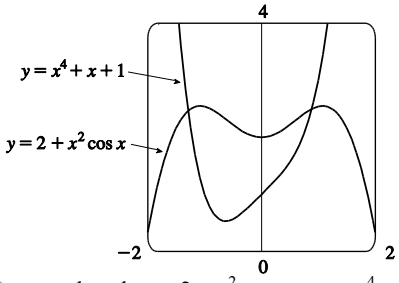


b) Autour de l'axe des y :

$$V = \int_0^{a^2} \pi(\sqrt{y})^2\, dy + \int_{a^2}^1 \pi\left(\sqrt{1-y^2}\right)^2 dy$$
$$= \pi\int_0^{a^2} y\,dy + \pi\int_{a^2}^1 (1-y^2)\,dy \approx 0{,}999\,98$$



35.

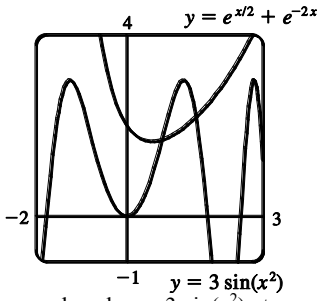


Les courbes de $y = 2 + x^2 \cos x$ et $y = x^4 + x + 1$ se croisent en $x = a \approx -1{,}288$ et en $x = b \approx 0{,}884$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

$V = \pi\int_a^b [(2 + x^2\cos x)^2 - (x^4 + x + 1)^2]dx \approx 23,780$

36.

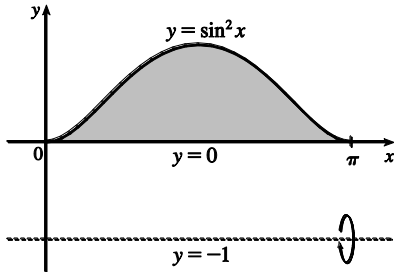


Les courbes de $y = 3\sin(x^2)$ et $y = e^{x/2} + e^{-2x}$ se croisent en $x = a \approx 0,772$ et en $x = b \approx 1,524$.

$V = \pi\int_a^b \left\{[3\sin(x^2)]^2 - (e^{x/2} + e^{-2x})^2\right\}dx \approx 7,519$

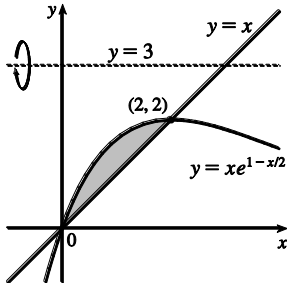
37. $V = \pi\int_0^{\pi} \left\{[\sin^2 x - (-1)]^2 - [0 - (-1)]^2\right\}dx$

$\overset{\text{LCS}}{=} \frac{11}{8}\pi^2$



38. $V = \pi\int_0^2 \left[(3 - x)^2 - (3 - xe^{1-x/2})^2\right]dx$

$\overset{\text{LCS}}{=} \pi\left(-2e^2 + 24e - \frac{142}{3}\right)$



39. L'intégrale $\pi\int_0^{\pi} \sin x dx = \pi\int_0^{\pi} \left(\sqrt{\sin x}\right)^2 dx$ décrit le volume du solide résultant de la rotation autour de l'axe des x de la région

$\mathscr{R} = \left\{(x, y) \mid 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \sqrt{\sin x}\right\}$ du plan xy.

 © Groupe Modulo inc., 2013

40. L'intégrale $\pi\int_{-1}^{1}(1-y^2)^2\,dy$ décrit le volume du solide résultant de la rotation autour de l'axe des *y* de la région $\mathscr{R}=\{(x,y)\,|\,-1\le y\le 1, 0\le x\le 1-y^2\}$ du plan *xy*.

41. L'intégrale $\pi\int_0^1(y^4-y^8)dy=\pi\int_0^1\left[(y^2)^2-(y^4)^2\right]\,dy$ décrit le volume du solide résultant de la rotation autour de l'axe des *y* de la région $\mathscr{R}=\{(x,y)\,|\,0\le y\le 1, y^4\le x\le y^2\}$ du plan *xy*.

42. L'intégrale $\pi\int_0^{\pi/2}[(1+\cos x)^2-1^2]\,dx$ décrit le volume du solide résultant de la rotation autour de l'axe des *x* de la région du plan *xy*.

Ou : Le solide pourrait être obtenu en effectuant la rotation de la région $\mathscr{R}'=\{(x,y)\,|\,0\le x\le \frac{\pi}{2}, 0\le y\le \cos x\}$ autour de la droite $y=-1$.

43. La longueur de 15 cm étant divisée en 10 sous-intervalles, nous utiliserons la méthode du milieu des sous-intervalles avec $n = 10/2 = 5$.

$$V=\int_0^{15}A(x)dx\approx M_5=\tfrac{15-0}{5}[A(1,5)+A(4,5)+A(7,5)+A(10,5)+A(13,5)]$$
$$=3(18+79+106+128+39)=3\cdot 370=1110\text{ cm}^3$$

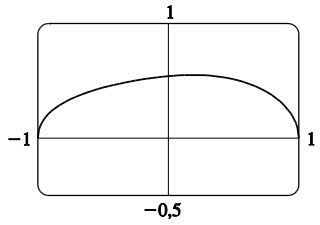
44.
$$V=\int_0^{10}A(x)dx\approx M_5=\tfrac{10-0}{5}[A(1)+A(3)+A(5)+A(7)+A(9)]$$
$$=2(0,65+0,61+0,59+0,55+0,50)=2(2,90)=5,80\text{ m}^3$$

45.
$$V=\int_2^{10}\pi[f(x)]^2dx\approx\pi\tfrac{10-2}{4}\{[f(3)]^2+[f(5)]^2+[f(7)]^2+[f(9)]^2\}$$
$$\approx 2\pi[(1,5)^2+(2,2)^2+(3,8)^2+(3,1)^2]\approx 196\text{ unités}^3$$

a)
$$V=\int_0^4\pi[(\text{rayon externe})^2-(\text{rayon interne})^2]\,dy$$
$$\approx\pi\tfrac{4-0}{4}\{[(9,9)^2-(2,2)^2]+[(9,7)^2-(3,0)^2]+[(9,3)^2-(5,6)^2]+[(8,7)^2-(6,5)^2]\}$$
$$\approx 838\text{ unités}^3$$

46. a) $V=\int_{-1}^{1}\pi\left[(ax^3+bx^2+cx+d)\sqrt{1-x^2}\right]^2dx \overset{\text{LCS}}{=} \dfrac{4\{5a^2+18ac+3[3b^2+14bd+7(c^2+5d^2)]\}\pi}{315}$

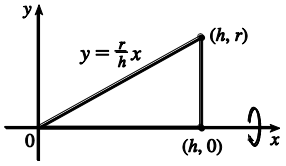
b) On peut voir la courbe de la fonction $y=(-0,06x^3+0,04x^2+0,1x+0,54)\sqrt{1-x^2}$ dans le graphique. En substituant $a=-0,06$, $b=0,04$, $c=0,1$ et $d=0,54$ dans la réponse à la sous-question a) et nous obtiendrons $V\overset{\text{LCS}}{=}\dfrac{3769\pi}{9375}\approx 1,263$.



 © Groupe Modulo inc., 2013

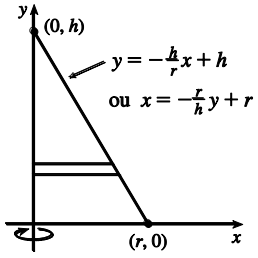
47. Formons un cône droit dont la hauteur est h et dont le rayon de la base est r en effectuant une rotation autour de l'axe des x de la droite $y = \frac{r}{h}x$.

$$V = \pi\int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \pi\int_0^h \frac{r^2}{h^2}x^2 dx = \pi\frac{r^2}{h^2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^h$$
$$= \pi\frac{r^2}{h^2}\left(\frac{1}{3}h^3\right) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$



Autre solution : Effectuez une rotation de $x = -\frac{r}{h}y + r$ autour de l'axe des y.

$$V = \pi\int_0^h \left(-\frac{r}{h}y + r\right)^2 dy \overset{*}{=} \pi\int_0^h \left[\frac{r^2}{h^2}y^2 - \frac{2r^2}{h}y + r^2\right] dy$$
$$= \pi\left[\frac{r^2}{3h^2}y^3 - \frac{r^2}{h}y^2 + r^2 y\right]_0^h = \pi\left(\tfrac{1}{3}r^2h - r^2h + r^2h\right) = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h$$

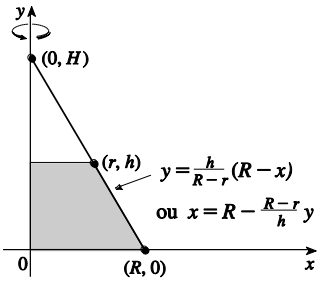


*Ou encore substituez $u = r - \frac{r}{h}y$ et $du = -\frac{r}{h}dy$; vous obtiendrez

$$\pi\int_r^0 u^2\left(-\frac{h}{r}du\right) = -\pi\frac{h}{r}\left[\frac{1}{3}u^3\right]_r^0 = -\pi\frac{h}{r}\left(-\frac{1}{3}r^3\right) = \frac{1}{3}\pi r^2 h\,.$$

48.
$$V = \pi\int_0^h \left(R - \frac{R-r}{h}y\right)^2 dy$$
$$= \pi\int_0^h \left[R^2 - \frac{2R(R-r)}{h}y + \left(\frac{R-r}{h}\right)^2 y^2\right] dy$$
$$= \pi\left[R^2 y - \frac{R(R-r)}{h}y^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{R-r}{h}\right)^2 y^3\right]_0^h$$
$$= \pi[R^2h - R(R-r)h + \tfrac{1}{3}(R-r)^2 h]$$
$$= \tfrac{1}{3}\pi h[3Rr + (R^2 - 2Rr + r^2)] = \tfrac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

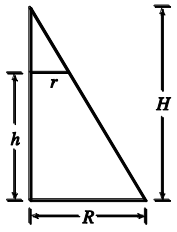


Autre solution : $\frac{H}{R} = \frac{H-h}{r}$ selon la similitude des triangles. Par conséquent, $Hr = HR - hR \;\Rightarrow\; hR = H(R-r) \;\Rightarrow\; H = \frac{hR}{R-r}$.

Or,

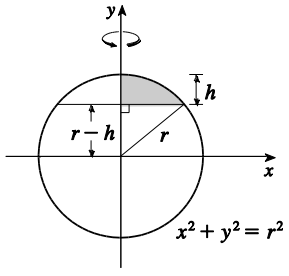
$$V = \tfrac{1}{3}\pi R^2 H - \tfrac{1}{3}\pi r^2 (H-h) \quad [\text{selon l'exercise 47}]$$
$$= \tfrac{1}{3}\pi R^2 \frac{hR}{R-r} - \tfrac{1}{3}\pi r^2 \frac{rh}{R-r} \quad \left[H - h = \frac{rH}{R} = \frac{rhR}{R(R-r)}\right]$$
$$= \frac{1}{3}\pi h \frac{R^3 - r^3}{R-r} = \tfrac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)$$
$$= \tfrac{1}{3}\left[\pi R^2 + \pi r^2 + \sqrt{(\pi R^2)\,(\pi r^2)}\right]h = \tfrac{1}{3}(A_1 + A_2 + \sqrt{A_1 A_2})h$$

où A_1 et A_2 sont les aires des bases du cône droit tronqué. (Se référer à l'exercice 50 qui présente une solution reliée à celle-ci.)



49. $x^2 + y^2 = r^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = r^2 - y^2$

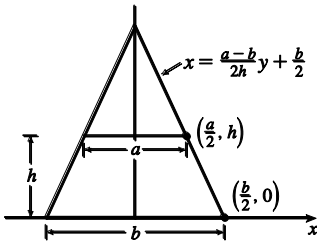
$$V = \pi\int_{r-h}^{r}(r^2 - y^2)dy = \pi\left[r^2 y - \frac{y^3}{3}\right]_{r-h}^{r} = \pi\left\{\left[r^3 - \frac{r^3}{3}\right] - \left[r^2(r-h) - \frac{(r-h)^3}{3}\right]\right\}$$
$$= \pi\left\{\tfrac{2}{3}r^3 - \tfrac{1}{3}(r-h)\left[3r^2 - (r-h)^2\right]\right\}$$
$$= \tfrac{1}{3}\pi\{2r^3 - (r-h)[3r^2 - (r^2 - 2rh + h^2)]\}$$
$$= \tfrac{1}{3}\pi\{2r^3 - (r-h)[2r^2 + 2rh - h^2]\}$$
$$= \tfrac{1}{3}\pi(2r^3 - 2r^3 - 2r^2 h + rh^2 + 2r^2 h + 2rh^2 - h^3)$$
$$= \tfrac{1}{3}\pi(3rh^2 - h^3) = \tfrac{1}{3}\pi h^2(3r - h) = \pi h^2\left(r - \frac{h}{3}\right)$$



 © Groupe Modulo inc., 2013

50. Une équation de la droite est $x = \dfrac{\Delta x}{\Delta y}y + (\text{abscisse du point d'intersection avec l'axe des } x) = \dfrac{a/2 - b/2}{h - 0}y + \dfrac{b}{2} = \dfrac{a-b}{2h}y + \dfrac{b}{2}$.

$$V = \int_0^h A(y)dy = \int_0^h (2x)^2 dy$$
$$= \int_0^h \left[2\left(\frac{a-b}{2h}y + \frac{b}{2}\right)\right]^2 dy = \int_0^h \left[\frac{a-b}{h}y + b\right]^2 dy$$
$$= \int_0^h \left[\frac{(a-b)^2}{h^2}y^2 + \frac{2b(a-b)}{h}y + b^2\right] dy$$
$$= \left[\frac{(a-b)^2}{3h^2}y^3 + \frac{b(a-b)}{h}y^2 + b^2 y\right]_0^h$$
$$= \tfrac{1}{3}(a-b)^2 h + b(a-b)h + b^2 h = \tfrac{1}{3}(a^2 - 2ab + b^2 + 3ab)h$$
$$= \tfrac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)h$$



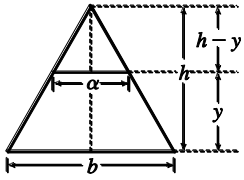
[Il est à noter que ceci peut être exprimé par $\frac{1}{3}(A_1 + A_2 + \sqrt{A_1 A_2})h$, comme dans l'exercice 48.]

Si $a = b$, nous obtenons un solide rectangulaire dont le volume est b^2h. Si $a = 0$, nous obtenons une pyramide carrée dont le volume est $\frac{1}{3}b^2h$.

51. Avec une section transversale à la hauteur y, nous constatons, selon la similitude des triangles, que $\dfrac{\alpha/2}{b/2} = \dfrac{h-y}{h}$, donc $\alpha = b\left(1 - \dfrac{y}{h}\right)$.

D'une façon similaire, avec des sections transversales dont la base est $2b$ et avec β qui remplace α, $\beta = 2b\left(1 - \dfrac{y}{h}\right)$. Donc,

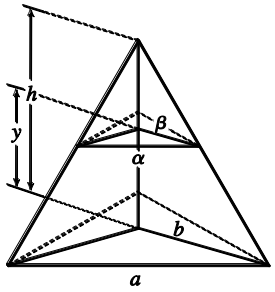
$$V = \int_0^h A(y)dy = \int_0^h \left[b\left(1 - \frac{y}{h}\right)\right]\left[2b\left(1 - \frac{y}{h}\right)\right]dy$$
$$= \int_0^h 2b^2\left(1 - \frac{y}{h}\right)^2 dy = 2b^2\int_0^h \left(1 - \frac{2y}{h} + \frac{y^2}{h^2}\right)dy$$
$$= 2b^2\left[y - \frac{y^2}{h} + \frac{y^3}{3h^2}\right]_0^h = 2b^2\left[h - h + \tfrac{1}{3}h\right]$$
$$= \tfrac{2}{3}b^2h \quad [= \tfrac{1}{3}Bh \text{ où } B \text{ est l'aire de la base, comme pour toute pyramide}]$$



 © Groupe Modulo inc., 2013

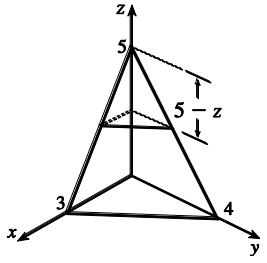
52. Considérez le triangle constitué de deux sommets de la base et du centre de la base. Ce triangle est semblable au triangle correspondant à la hauteur y, donc $a/b = \alpha/\beta \;\Rightarrow\; \alpha = a\beta/b$. De plus, selon la similitude des triangles, $b/h = \beta/(h-y) \;\Rightarrow\; \beta = b(h-y)/h$. Ces deux égalités signifient que $\alpha = a(1 - y/h)$, et puisque la section transversale est un triangle équilatéral, son aire est $A(y) = \frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha = \frac{a^2(1-y/h)^2}{4}\sqrt{3}$; donc,

$$V = \int_0^h A(y)\,dy = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\int_0^h \left(1-\frac{y}{h}\right)^2 dy$$
$$= \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left[-\frac{h}{3}\left(1-\frac{y}{h}\right)^3\right]_0^h = -\frac{\sqrt{3}}{12}a^2h(-1) = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2h$$



53. Une section transversale à la hauteur z est un triangle semblable à la base; nous multiplierons donc la longueur des cathètes du triangle de la base, 3 et 4, par le facteur de proportionnalité $(5 - z)/5$. Ainsi, l'aire du triangle à la hauteur z est $A(z) = \frac{1}{2}\cdot 3\left(\frac{5-z}{5}\right)\cdot 4\left(\frac{5-z}{5}\right) = 6\left(1-\frac{z}{5}\right)^2$; donc,

$$V = \int_0^5 A(z)\,dz = 6\int_0^5 \left(1-\frac{z}{5}\right)^2 dz = 6\int_1^0 u^2(-5\,du) \quad \left[\begin{matrix} u = 1-z/5, \\ du = -\frac{1}{5}dz \end{matrix}\right]$$
$$= -30\left[\tfrac{1}{3}u^3\right]_1^0 = -30\left(-\tfrac{1}{3}\right) = 10 \text{ cm}^3$$

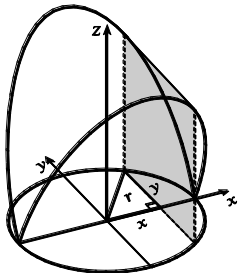


54. Une section transversale est ombrée dans le graphique.

$A(x) = (2y)^2 = (2\sqrt{r^2 - x^2})^2$, donc

$$V = \int_{-r}^{r} A(x)\,dx = 2\int_0^r 4(r^2 - x^2)\,dx$$
$$= 8\left[r^2x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^r = 8\left(\tfrac{2}{3}r^3\right) = \tfrac{16}{3}r^3$$

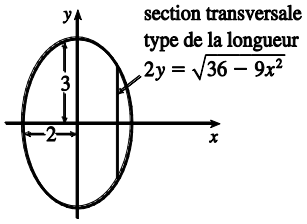
 © Groupe Modulo inc., 2013



55. Soit l la longueur d'une cathète du triangle rectangle isocèle et soit $2y$ l'hypoténuse,

alors $l^2 + l^2 = (2y)^2 \quad \Rightarrow \quad 2l^2 = 4y^2 \quad \Rightarrow \quad l^2 = 2y^2$.

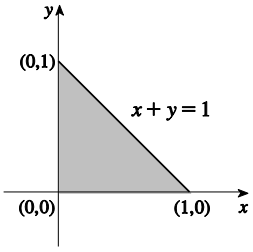
$$V = \int_{-2}^{2} A(x)dx = 2\int_{0}^{2} A(x)dx = 2\int_{0}^{2} \tfrac{1}{2}(l)(l)dx = 2\int_{0}^{2} y^2 dx$$
$$= 2\int_{0}^{2} \tfrac{1}{4}(36 - 9x^2)dx = \tfrac{9}{2}\int_{0}^{2}(4 - x^2)dx$$
$$= \tfrac{9}{2}\left[4x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \tfrac{9}{2}\left(8 - \tfrac{8}{3}\right) = 24$$



56. La section transversale de la base correspondant à la coordonnée y est de longueur $x = 1 - y$. L'aire du triangle équilatéral correspondant de côté c est $A(y) = c^2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = (1-y)^2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. Par conséquent,

$$V = \int_0^1 A(y)dy = \int_0^1 (1-y)^2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)dy$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^1 (1 - 2y + y^2)dy = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[y - y^2 + \tfrac{1}{3}y^3\right]_0^1$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{12}$$

Ou: $\int_0^1 (1-y)^2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)dy = \frac{\sqrt{3}}{4}\int_1^0 u^2(-du) \quad [u = 1-y] = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{1}{3}u^3\right]_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{12}$

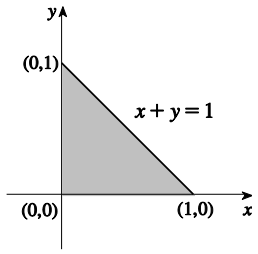


 © Groupe Modulo inc., 2013

57. La section transversale de la base correspondant à la coordonnée x est de longueur $y = 1 - x$. L'aire du carré correspondant de côté c est $A(x) = c^2 = (1 - x)^2 = 1 - 2x + x^2$. Par conséquent,

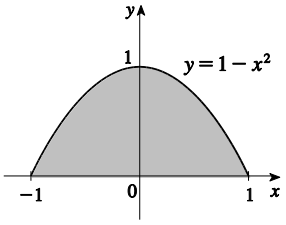
$$V = \int_0^1 A(x)dx = \int_0^1 (1 - 2x + x^2)dx$$
$$= \left[x - x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \left(1 - 1 + \tfrac{1}{3}\right) - 0 = \tfrac{1}{3}$$

Ou : $\int_0^1 (1-x)^2 dx = \int_1^0 u^2(-du) \quad [u = 1 - x] = \left[\tfrac{1}{3}u^3 \right]_0^1 = \tfrac{1}{3}$



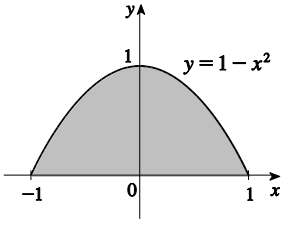
58. La section transversale de la base correspondant à la coordonnée y est de longueur $2x = 2\sqrt{1-y}$. $\left[y = 1 - x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{1-y} \right]$

L'aire du carré correspondant de côté c est $A(x) = c^2 = (2\sqrt{1-y})^2 = 4(1-y)$. Par conséquent, $V = \int_0^1 A(y)dy = \int_0^1 4(1-y)dy = 4\left[y - \tfrac{1}{2}y^2 \right]_0^1 = 4\left[\left(1 - \tfrac{1}{2}\right) - 0 \right] = 2$.



59. La section transversale de la base correspondant à la coordonnée x est de longueur $1 - x^2$. La hauteur h a également une longueur de $1 - x^2$, donc l'aire du triangle isocèle correspondant est $A(x) = \tfrac{1}{2}bh = \tfrac{1}{2}(1 - x^2)^2$. Par conséquent,

$$V = \int_{-1}^1 \tfrac{1}{2}(1 - x^2)^2 dx$$
$$= 2 \cdot \tfrac{1}{2}\int_0^1 (1 - 2x^2 + x^4)dx \quad [\text{par symétrie}]$$
$$= \left[x - \tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 \right]_0^1 = \left(1 - \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{5}\right) - 0 = \tfrac{8}{15}$$



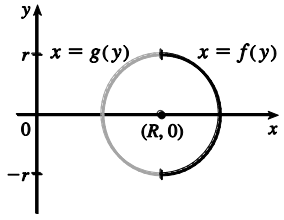
 © Groupe Modulo inc., 2013

60. a) $V = \int_{-r}^{r} A(x)dx = 2\int_{0}^{r} A(x)dx = 2\int_{0}^{r} \frac{1}{2} h\left(2\sqrt{r^2 - x^2}\right)dx = 2h\int_{0}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$

b) On constate que l'intégrale représente un quart de l'aire d'un cercle de rayon r, donc $V = 2h \cdot \frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi h r^2$.

61. a) Le tore est obtenu en effectuant une rotation du cercle $(x - R)^2 + y^2 = r^2$ autour de l'axe des y. En isolant x, on obtient que $x = R + \sqrt{r^2 - y^2} = f(y)$, soit l'expression décrivant la moitié droite du cercle et que $x = R - \sqrt{r^2 - y^2} = g(y)$, l'équation décrivant la moitié gauche. Donc,

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_{-r}^{r} \{[f(y)]^2 - [g(y)]^2\}dy \\ &= 2\pi\int_{0}^{r} \left[\left(R^2 + 2R\sqrt{r^2 - y^2} + r^2 - y^2\right) - \left(R^2 - 2R\sqrt{r^2 - y^2} + r^2 - y^2\right)\right]dy \\ &= 2\pi\int_{0}^{r} 4R\sqrt{r^2 - y^2}\,dy = 8\pi R\int_{0}^{r} \sqrt{r^2 - y^2}\,dy \end{aligned}$$



b) Puisque l'intégrale représente un quart de l'aire d'un cercle de rayon r, donc $8\pi R\int_{0}^{r} \sqrt{r^2 - y^2}\,dy = 8\pi R \cdot \frac{1}{4}\pi r^2 = 2\pi^2 r^2 R$.

62. À la figure 17, les sections transversales perpendiculaires à l'axe des y sont des rectangles. Le rectangle correspondant à la coordonnée y a une base de longueur $2\sqrt{16 - y^2}$ dans le plan xy et une hauteur de $\frac{1}{\sqrt{3}}y$, puisque $\angle BAC = 30°$ et $|BC| = \frac{1}{\sqrt{3}}|AB|$.

Ainsi, $A(y) = \frac{2}{\sqrt{3}}y\sqrt{16 - y^2}$ et

$$\begin{aligned} V &= \int_{0}^{4} A(y)dy = \tfrac{2}{\sqrt{3}}\int_{0}^{4} \sqrt{16 - y^2}\,y\,dy = \tfrac{2}{\sqrt{3}}\int_{16}^{0} u^{1/2}\left(-\tfrac{1}{2}du\right) \quad [\text{Soit } u = 16 - y^2, \text{ donc } du = -2y\,dy] \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{3}}\int_{0}^{16} u^{1/2}du = \tfrac{1}{\sqrt{3}}\tfrac{2}{3}\left[u^{3/2}\right]_{0}^{16} = \tfrac{2}{3\sqrt{3}}(64) = \tfrac{128}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

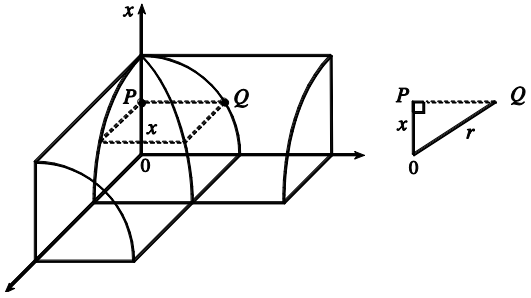
63. a) $\text{Volume}(S_1) = \int_{0}^{h} A(z)dz = \text{Volume}(S_2)$ puisque l'aire $A(z)$ de la section transversale à la hauteur z est la même pour les deux solides.

b) Selon le principe de Cavalieri, le volume du cylindre représenté dans la figure est le même que celui d'un cylindre droit de rayon r et de hauteur h, c'est-à-dire $\pi r^2 h$.

64. Chaque section transversale du solide S dans un plan perpendiculaire à l'axe des x est un carré (puisque les arêtes de la coupe reposent sur les cylindres, qui sont perpendiculaires). Un quart de ce carré et un huitième de S apparaissent au graphique. L'aire de ce quart de carré est $|PQ|^2 = r^2 - x^2$. Par conséquent, $A(x) = 4(r^2 - x^2)$ et le volume de S est

 © Groupe Modulo inc., 2013

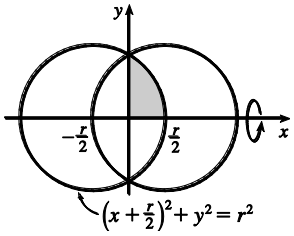
$$V = \int_{-r}^{r} A(x)dx = 4\int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)dx$$
$$= 8(r^2 - x^2)dx = 8\left[r^2 x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^r = \tfrac{16}{3}r^3$$



65. Tel que le montre le graphique, on obtient le volume du solide en effectuant une rotation de l'aire commune aux deux cercles de rayon *r*. Le volume de la moitié droite est

$$V_{\text{right}} = \pi\int_0^{r/2} y^2 dx = \pi\int_0^{r/2}\left[r^2 - \left(\tfrac{1}{2}r + x\right)^2\right]dx$$
$$= \pi\left[r^2 x - \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}r + x\right)^3\right]_0^{r/2} = \pi\left[\left(\tfrac{1}{2}r^3 - \tfrac{1}{3}r^3\right) - \left(0 - \tfrac{1}{24}r^3\right)\right] = \tfrac{5}{24}\pi r^3$$

Donc, par symétrie, le volume total est le double de ce résultat, ou $\frac{5}{12}\pi r^3$.



Autre solution : Comme le volume du solide est égal à deux fois le volume d'une calotte sphérique, nous pouvons utiliser la formule employée dans l'exercice 49, avec $h = \frac{1}{2}r$: $V = 2\cdot\frac{1}{3}\pi h^2(3r - h) = \frac{2}{3}\pi\left(\frac{1}{2}r\right)^2\left(3r - \frac{1}{2}r\right) = \frac{5}{12}\pi r^3$.

66. Il y a ici deux cas possibles : dans le premier cas, la boule n'est pas complètement submergée, alors que dans le second, elle l'est.

Cas 1 : $0 \le h \le 10$ La boule n'est pas complètement submergée, et donc une section transversale de l'eau parallèle à la surface est l'aire ombrée qui apparaît dans le premier graphique. Nous pouvons calculer l'aire de la section transversale à la hauteur *x* au-dessus du fond du bol en utilisant le théorème de Pythagore : $R^2 = 15^2 - (15 - x)^2$ et $r^2 = 5^2 - (x - 5)^2$,

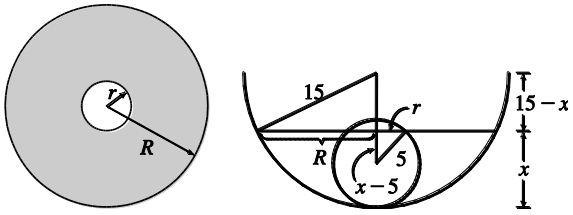
donc $A(x) = \pi\left(R^2 - r^2\right) = 20\pi x$. Le volume de l'eau dont la profondeur est *h* est

alors $V(h) = \int_0^h A(x)dx = \int_0^h 20\pi x dx = \left[10\pi x^2\right]_0^h = 10\pi h^2$ cm^3 , $0 \le h \le 10$.

Cas 2 : $10 < h \le 15$ Dans ce cas, nous pouvons calculer le volume tout simplement en soustrayant le volume déplacé par la boule du volume total dans le bol sous la surface de l'eau. Le volume total sous la surface est simplement le volume de la calotte

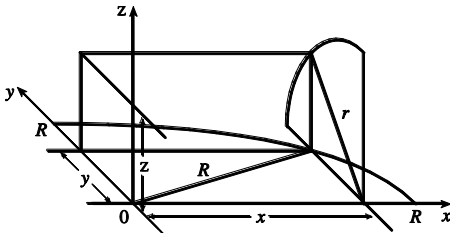
 © Groupe Modulo inc., 2013

sphérique du bol; nous pouvons donc utiliser la formule employée à l'exercice 49 : $V_{\text{calotte sphérique}}(h) = \frac{1}{3}\pi h^2(45-h)$. Le volume de la petite sphère est $V_{sphère} = \frac{4}{3}\pi(5)^3 = \frac{500}{3}\pi$, donc le volume total est $V_{\text{calotte sphérique}} - V_{sphère} = \frac{1}{3}\pi(45h^2 - h^3 - 500)$ cm^3 .



67. Supposez que l'axe des x est l'axe du trou cylindrique de rayon r. Un quart de la section transversale à travers y, perpendiculaire à l'axe des y, est le rectangle qui apparaît au graphique. En utilisant le théorème de Pythagore deux fois, nous calculons que les dimensions de ce rectangle sont $x = \sqrt{R^2 - y^2}$ et $z = \sqrt{r^2 - y^2}$, donc $\frac{1}{4}A(y) = xz = \sqrt{r^2 - y^2}\sqrt{R^2 - y^2}$ et

$$V = \int_{-r}^{r} A(y)dy = \int_{-r}^{r} 4\sqrt{r^2 - y^2}\sqrt{R^2 - y^2}\,dy = 8\int_0^r \sqrt{r^2 - y^2}\sqrt{R^2 - y^2}\,dy$$



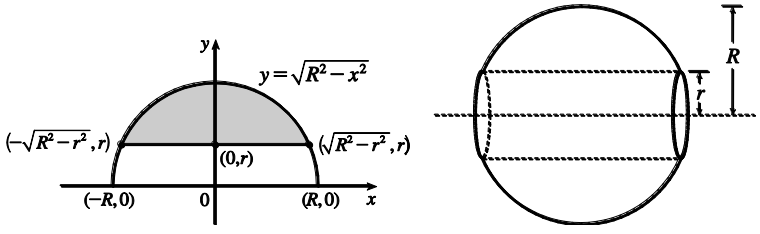
68. La droite $y = r$ croise le demi-cercle $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ lorsque $r = \sqrt{R^2 - x^2} \;\Rightarrow\; r^2 = R^2 - x^2 \;\Rightarrow\; x^2 = R^2 - r^2 \;\Rightarrow\; x = \pm\sqrt{R^2 - r^2}$.

Si nous effectuons une rotation de la région ombrée autour de l'axe des x, nous obtenons

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}} \pi\left[\left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 - r^2\right]dx = 2\pi\int_0^{\sqrt{R^2-r^2}} (R^2 - x^2 - r^2)\,dx \quad [\text{par symétrie}] \\ &= 2\pi\int_0^{\sqrt{R^2-r^2}} \left[\left(R^2 - r^2\right) - x^2\right]dx = 2\pi\left[\left(R^2 - r^2\right)x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^{\sqrt{R^2-r^2}} \\ &= 2\pi\left[(R^2 - r^2)^{3/2} - \tfrac{1}{3}(R^2 - r^2)^{3/2}\right] = 2\pi \cdot \tfrac{2}{3}(R^2 - r^2)^{3/2} = \tfrac{4\pi}{3}(R^2 - r^2)^{3/2} \end{aligned}$$

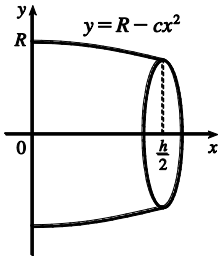
Cette réponse a du sens dans les cas de limites.Si $r \to 0, V \to \frac{4}{3}\pi R^3$, qui est le volume de la sphère complète.

Si $r \to R$, $V \to 0$, ce qui est logique parce que le rayon du trou se rapproche de celui de la sphère.



 © Groupe Modulo inc., 2013

69. a) Par symétrie, le rayon des deux extrémités du fût est le même, puisque la fonction $y = R - cx^2$ est paire. Puisque le fût résulte de la rotation autour de l'axe des x de la parabole $y = R - cy^2$, ce rayon est égal à la valeur de y en $x = \frac{1}{2}h$, ce qui donne $R - c\left(\frac{1}{2}h\right)^2 = R - d = r$.



b) Le fût est symétrique autour de l'axe des y, donc son volume est deux fois celui de la partie du fût où $x > 0$. De plus, le fût est un volume obtenu par rotation, donc

$$V = 2\int_0^{h/2} \pi y^2 dx = 2\pi \int_0^{h/2} \left(R - cx^2\right)^2 dx = 2\pi \left[R^2 x - \tfrac{2}{3}Rcx^3 + \tfrac{1}{5}c^2x^5\right]_0^{h/2}$$
$$= 2\pi\left(\tfrac{1}{2}R^2h - \tfrac{1}{12}Rch^3 + \tfrac{1}{160}c^2h^5\right)$$

Réarrangeons ces termes afin de nous rapprocher de l'expression cherchée : $V = \frac{1}{3}\pi h\left[2R^2 + \left(R^2 - \frac{1}{2}Rch^2 + \frac{3}{80}c^2h^4\right)\right]$.

Cependant, $R^2 - \frac{1}{2}Rch^2 + \frac{3}{80}c^2h^4 = \left(R - \frac{1}{4}ch^2\right)^2 - \frac{1}{40}c^2h^4 = (R-d)^2 - \frac{2}{5}\left(\frac{1}{4}ch^2\right)^2 = r^2 - \frac{2}{5}d^2$. Après substitution dans l'équation initiale, nous obtenons $V = \frac{1}{3}\pi h\left(2R^2 + r^2 - \frac{2}{5}d^2\right)$, ce qu'il fallait démontrer.

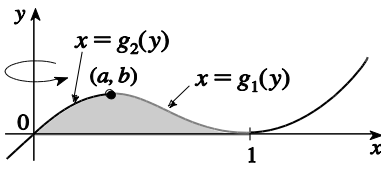
70. Il suffit de considérer le cas où $\mathscr{R}$ est délimité par les courbes de $y = f(x)$ et $y = g(x)$ pour $a \le x \le b$, où $g(x) \le f(x)$ pour tout x sur l'intervalle $[a, b]$, puisque les autres régions peuvent être divisées en sous-régions du même type. Nous désirons calculer le volume généré par la rotation de $\mathscr{R}$ autour de la droite $y = -k$. Ce volume est égale à

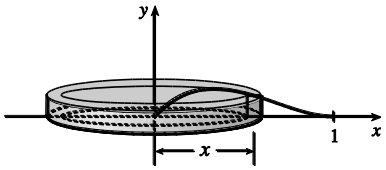
$$V_2 = \pi\int_a^b ([f(x)+k]^2 - [g(x)+k]^2)dx = \pi\int_a^b ([f(x)]^2 - [g(x)]^2)dx + 2\pi k\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = V_1 + 2\pi kA$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

2.3 Le calcul d'un volume par la méthode des coquilles cylindriques

1.



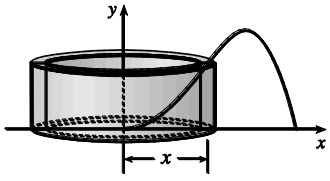


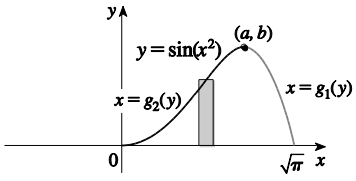
Si nous décidions d'utiliser la méthode d'un disque troué, nous devrions tout d'abord trouver le point (a, b) où la fonction $y = x(x-1)^2$ atteint un maximum relatif. Nous devrions ensuite exprimer x en fonction de y en résolvant pour x dans l'équation $y = x(x-1)^2$ afin d'en arriver aux fonctions $x = g_1(y)$ et $x = g_2(y)$ qui apparaissent dans le premier graphique. Cette étape serait difficile à compléter, car elle demande de résoudre une équation cubique. Finalement, nous calculerions le volume en utilisant $V = \pi\int_0^b \{[g_1(y)]^2 - [g_2(y)]^2\}\, dy$.

Si nous utilisons plutôt des coquilles cylindriques, nous trouverons que le rayon d'une coquille représentative servant d'approximation est x et que sa circonférence est donc $2\pi x$. Sa hauteur est y, c'est-à-dire $x(x-1)^2$. Le volume total est donc

$$V = \int_0^1 2\pi x\left[x(x-1)^2\right]dx = 2\pi\int_0^1\left(x^4 - 2x^3 + x^2\right)dx = 2\pi\left[\frac{x^5}{5} - 2\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{15}$$

2.

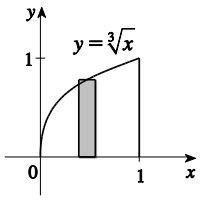


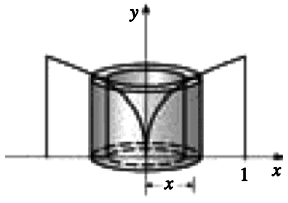


La circonférence d'une coquille cylindrique représentative est $2\pi x$ et sa hauteur $\sin(x^2)$. $V = \int_0^{\sqrt{\pi}} 2\pi x\sin(x^2)\, dx$. Soit $u = x^2$. Alors $du = 2x\, dx$, donc $V = \pi\int_0^{\pi} \sin u\, du = \pi\left[-\cos u\right]_0^{\pi} = \pi\left[1-(-1)\right] = 2\pi$. Si nous voulons appliquer la méthode de découpage du solide, nous devrons tout d'abord trouver le point (a, b) où la fonction $y = \sin(x^2)$ atteint un maximum relatif. Nous devrons ensuite exprimer x en fonction de y en isolant x dans l'équation $y = \sin(x^2)$ afin d'en arriver aux fonctions $x = g_1(y)$ et $x = g_2(y)$ qui apparaissent dans le second graphique. Finalement, nous calculerons le volume en posant $V = \pi\int_0^b \{[g_1(y)]^2 - [g_2(y)]^2\}\, dy$. L'utilisation de la méthode des coquilles cylindriques est de loin préférable à celle du découpage horizontal.

3. $V = \int_0^1 2\pi x\sqrt[3]{x}\,dx = 2\pi\int_0^1 x^{4/3}dx$

$= 2\pi[\frac{3}{7}x^{7/3}]_0^1 = 2\pi(\frac{3}{7}) = \frac{6}{7}\pi$

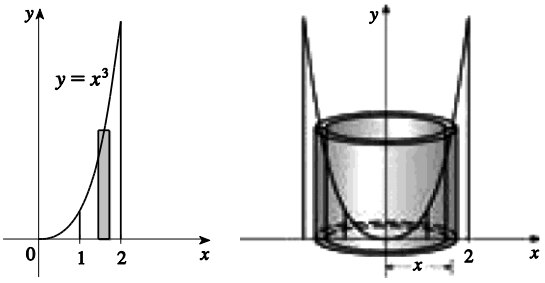




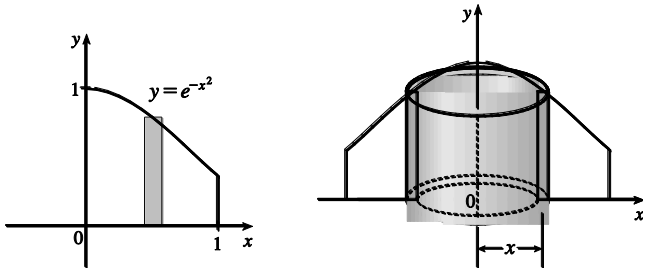
 © Groupe Modulo inc., 2013

4. $V = \int_1^2 2\pi x \cdot x^3 dx = 2\pi \int_1^2 x^4 dx$

$= 2\pi[\frac{1}{5}x^5]_1^2 = 2\pi(\frac{32}{5} - \frac{1}{5}) = \frac{62}{5}\pi$



5. $V = \int_0^1 2\pi x e^{-x^2} dx$. Soit $u = x^2$. Alors $du = 2x\,dx$, donc $V = \pi \int_0^1 e^{-u} du = \pi[-e^{-u}]_0^1 = \pi(1 - 1/e)$ **.**



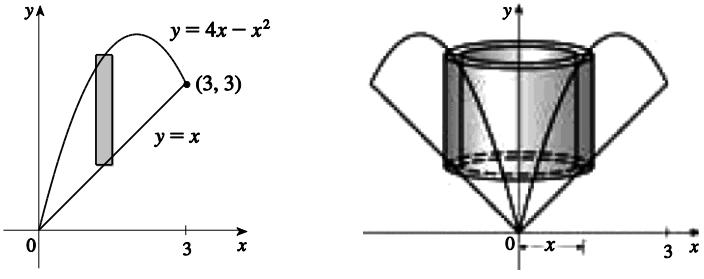
6. $4x - x^2 = x \iff 0 = x^2 - 3x \iff 0 = x(x-3) \iff x = 0$ ou 3.

$V = \int_0^3 2\pi x[(4x - x^2) - x]dx$

$= 2\pi \int_0^3 (-x^3 + 3x^2)dx$

$= 2\pi[-\frac{1}{4}x^4 + x^3]_0^3$

$= 2\pi(-\frac{81}{4} + 27) = 2\pi(\frac{27}{4}) = \frac{27}{2}\pi$



7. $x^2 = 6x - 2x^2 \iff 3x^2 - 6x = 0 \iff 3x(x-2) = 0 \iff x = 0$ ou 2.

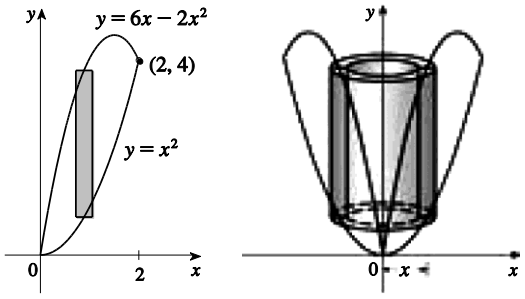
$V = \int_0^2 2\pi x[(6x - 2x^2) - x^2]dx$

$= 2\pi \int_0^2 (-3x^3 + 6x^2)dx$

$= 2\pi[-\frac{3}{4}x^4 + 2x^3]_0^2$

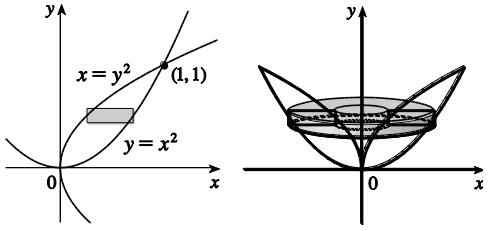
$= 2\pi(-12 + 16) = 8\pi$

 © Groupe Modulo inc., 2013



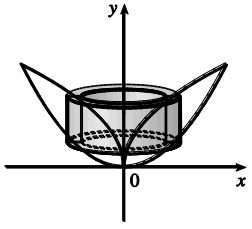
8. Par la méthode du découpage horizontal :

$$V = \int_0^1 \pi\left[\left(\sqrt{y}\right)^2 - (y^2)^2\right]dy = \pi\int_0^1 (y - y^4)dy$$
$$= \pi[\tfrac{1}{2}y^2 - \tfrac{1}{5}y^5]_0^1 = \pi(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{5}) = \tfrac{3}{10}\pi$$



Par la méthode des coquilles cylindriques :

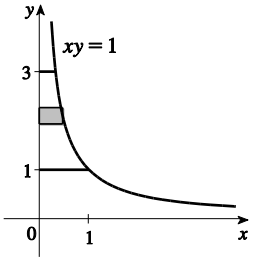
$$V = \int_0^1 2\pi x\left(\sqrt{x} - x^2\right)dx = 2\pi\int_0^1 (x^{3/2} - x^3)dx = 2\pi[\tfrac{2}{5}x^{5/2} - \tfrac{1}{4}x^4]_0^1$$
$$= 2\pi(\tfrac{2}{5} - \tfrac{1}{4}) = 2\pi(\tfrac{3}{20}) = \tfrac{3}{10}\pi$$

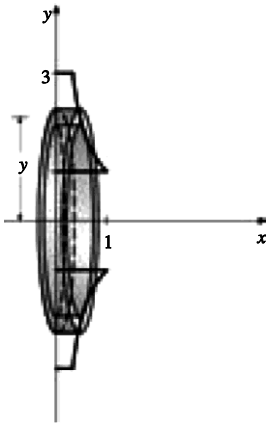


9. $xy = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{y}$, donc

$$V = 2\pi\int_1^3 y\left(\frac{1}{y}\right)dy$$
$$= 2\pi\int_1^3 dy = 2\pi[y]_1^3$$
$$= 2\pi(3 - 1) = 4\pi$$

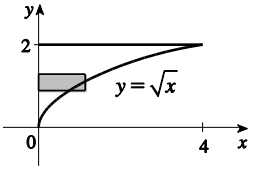
 © Groupe Modulo inc., 2013

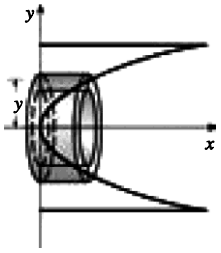




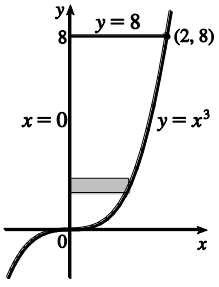
10. $y = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad x = y^2$, donc

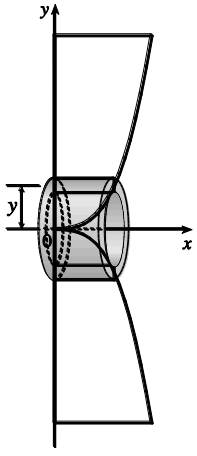
$$V = 2\pi \int_0^2 y(y^2)dy = 2\pi \int_0^2 y^3 dy$$
$$= 2\pi[\tfrac{1}{4}y^4]_0^2$$
$$= 2\pi(4) = 8\pi$$





11. $$V = 2\pi \int_0^8 \left[y(\sqrt[3]{y} - 0) \right] dy$$
$$= 2\pi \int_0^8 y^{4/3} dy = 2\pi[\tfrac{3}{7}y^{7/3}]_0^8$$
$$= \frac{6\pi}{7}(8^{7/3}) = \frac{6\pi}{7}(2^7) = \frac{768}{7}\pi$$





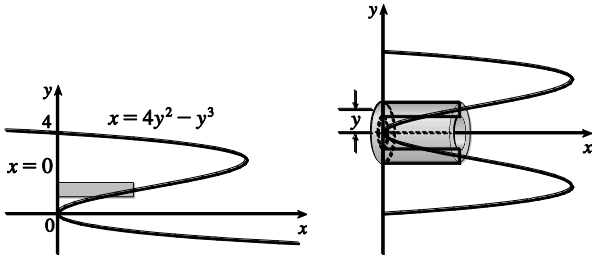
 © Groupe Modulo inc., 2013

12. $V = 2\pi\int_0^4 [y(4y^2 - y^3)]dy$

$= 2\pi\int_0^4 (4y^3 - y^4)dy$

$= 2\pi[y^4 - \frac{1}{5}y^5]_0^4 = 2\pi(256 - \frac{1024}{5})$

$= 2\pi(\frac{256}{5}) = \frac{512}{5}\pi$



13. La hauteur de la coquille cylindrique est $2 - [1 + (y-2)^2] = 1 - (y-2)^2 = 1 - (y^2 - 4y + 4) = -y^2 + 4y - 3$.

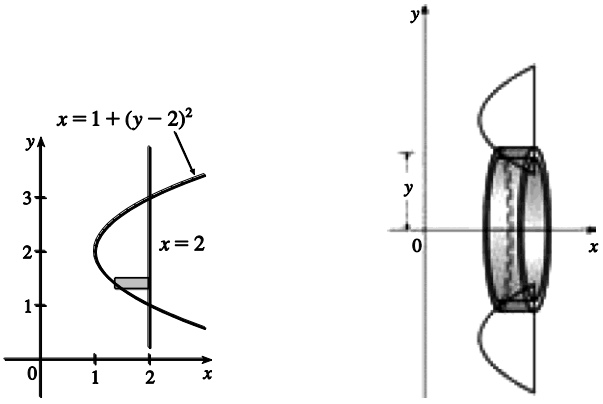
$V = 2\pi\int_1^3 y(-y^2 + 4y - 3)dy$

$= 2\pi\int_1^3 (-y^3 + 4y^2 - 3y)dy$

$= 2\pi[-\frac{1}{4}y^4 + \frac{4}{3}y^3 - \frac{3}{2}y^2]_1^3$

$= 2\pi[(-\frac{81}{4} + 36 - \frac{27}{2}) - (-\frac{1}{4} + \frac{4}{3} - \frac{3}{2})]$

$= 2\pi(\frac{8}{3}) = \frac{16}{3}\pi$

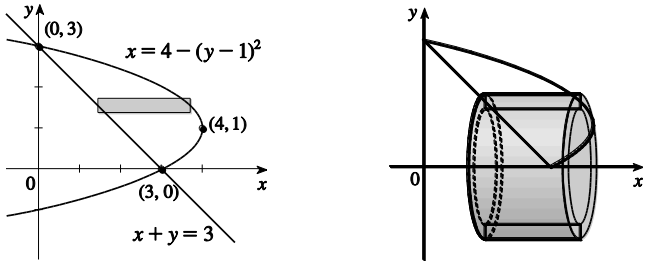


14. $V = \int_0^3 2\pi y[4 - (y-1)^2 - (3-y)]dy$

$= 2\pi\int_0^3 y(-y^2 + 3y)dy$

$= 2\pi\int_0^3 (-y^3 + 3y^2)dy = 2\pi[\frac{1}{4}y^4 + y^3]_0^3$

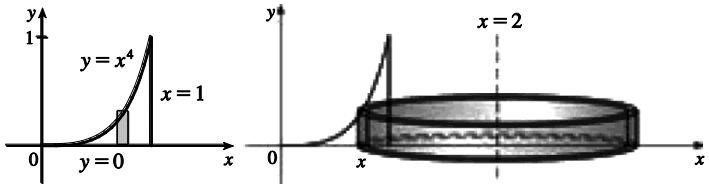
$= 2\pi(-\frac{81}{4} + 27) = 2\pi(\frac{27}{4}) = \frac{27}{2}\pi$



 © Groupe Modulo inc., 2013

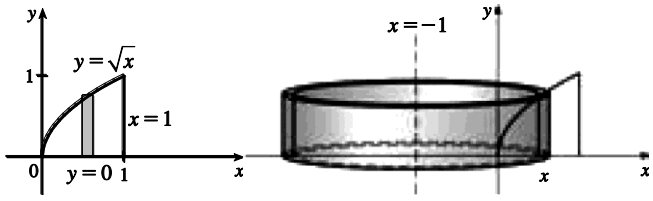
15. La coquille cylindrique est de rayon $2 - x$, de circonférence $2\pi(2 - x)$ et de hauteur x^4.

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 2\pi(2-x)x^4\,dx \\ &= 2\pi\int_0^1 (2x^4 - x^5)\,dx \\ &= 2\pi[\tfrac{2}{5}x^5 - \tfrac{1}{6}x^6]_0^1 \\ &= 2\pi[(\tfrac{2}{5} - \tfrac{1}{6}) - 0] = 2\pi(\tfrac{7}{30}) = \tfrac{7}{15}\pi \end{aligned}$$



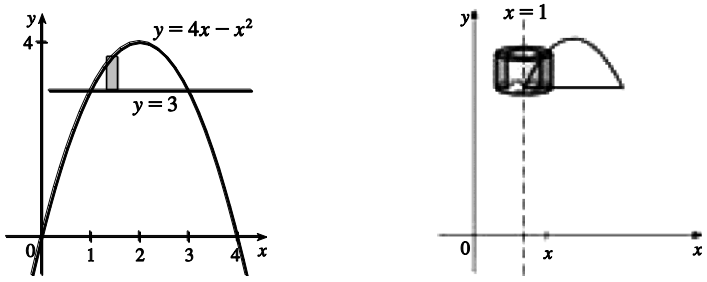
16. La coquille cylindrique est de rayon $x - (-1) = x + 1$, de circonférence $2\pi(x + 1)$ et de hauteur $\sqrt{x}$.

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 2\pi(x+1)\sqrt{x}\,dx \\ &= 2\pi\int_0^1 (x^{3/2} + x^{1/2})\,dx \\ &= 2\pi[\tfrac{2}{5}x^{5/2} + \tfrac{2}{3}x^{3/2}]_0^1 \\ &= 2\pi[(\tfrac{2}{5} + \tfrac{2}{3}) - 0] = 2\pi(\tfrac{16}{15}) = \tfrac{32}{15}\pi \end{aligned}$$



17. La coquille cylindrique est de rayon $x - 1$, de circonférence $2\pi(x - 1)$ et de hauteur $(4x - x^2) - 3 = -x^2 + 4x - 3$.

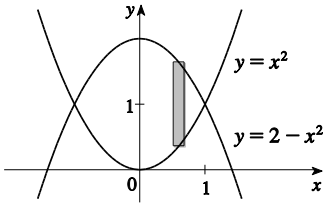
$$\begin{aligned} V &= \int_1^3 2\pi(x-1)(-x^2+4x-3)\,dx \\ &= 2\pi\int_1^3 (-x^3 + 5x^2 - 7x + 3)\,dx \\ &= 2\pi[-\tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{5}{3}x^3 - \tfrac{7}{2}x^2 + 3x]_1^3 \\ &= 2\pi[(-\tfrac{81}{4} + 45 - \tfrac{63}{2} + 9) - (-\tfrac{1}{4} + \tfrac{5}{3} - \tfrac{7}{2} + 3)] \\ &= 2\pi(\tfrac{4}{3}) = \tfrac{8}{3}\pi \end{aligned}$$

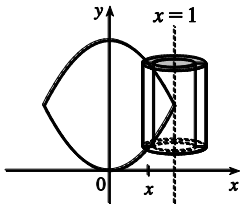


18. La coquille cylindrique est de rayon $1 - x$, de circonférence $2\pi(1 - x)$ et de hauteur $(2 - x^2) - x^2 = 2 - 2x^2$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

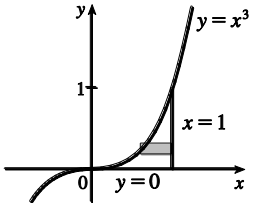
$$V = \int_{-1}^{1} 2\pi(1-x)(2-2x^2)\,dx$$
$$= 2\pi(2)\int_{-1}^{1}(1-x)(1-x^2)\,dx$$
$$= 4\pi\int_{-1}^{1}(1-x-x^2+x^3)\,dx$$
$$= 4\pi\left(\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx + \int_{-1}^{1}(x^3-x)\,dx\right)$$
$$= 4\pi(2)\int_{0}^{1}(1-x^2)\,dx \quad \text{[selon le théorème 1.7.7]}$$
$$= 8\pi[x-\tfrac{1}{3}x^3]_0^1 = 8\pi[(1-\tfrac{1}{3})-0] = 8\pi(\tfrac{2}{3}) = \tfrac{16}{3}\pi$$

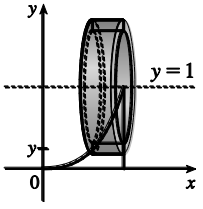




19. La coquille cylindrique est de rayon $1-y$, de circonférence $2\pi(1-y)$ et de hauteur $1-\sqrt[3]{y}$ $\left[\, y = x^3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[3]{y} \,\right]$.

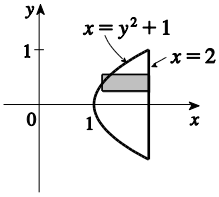
$$V = \int_0^1 2\pi(1-y)(1-y^{1/3})\,dy$$
$$= 2\pi\int_0^1(1-y-y^{1/3}+y^{4/3})\,dy$$
$$= 2\pi[y-\tfrac{1}{2}y^2-\tfrac{3}{4}y^{4/3}+\tfrac{3}{7}y^{7/3}]_0^1$$
$$= 2\pi[(1-\tfrac{1}{2}-\tfrac{3}{4}+\tfrac{3}{7})-0]$$
$$= 2\pi(\tfrac{5}{28}) = \tfrac{5}{14}\pi$$

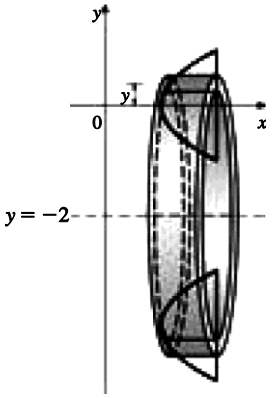




20. $V = 2\pi\int_{-1}^{1}[y-(-2)][2-(y^2+1)]\,dy$
$$= 2\pi\int_{-1}^{1}(y+2)(1-y^2)\,dy$$
$$= 2\pi\int_{-1}^{1}(y-y^3+2-2y^2)\,dy$$
$$= 2\pi[\tfrac{1}{2}y^2-\tfrac{1}{4}y^4+2y-\tfrac{2}{3}y^3]_{-1}^{1}$$
$$= 2\pi[(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}+2-\tfrac{2}{3})-(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}-2+\tfrac{2}{3})]$$
$$= 2\pi(4-\tfrac{4}{3}) = \tfrac{16}{3}\pi$$

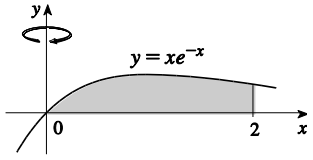
 © Groupe Modulo inc., 2013





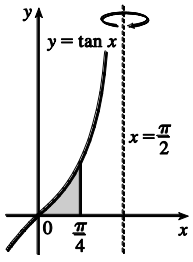
21. a) $V = 2\pi\int_0^2 x(xe^{-x})dx = 2\pi\int_0^2 x^2e^{-x}dx$

b) $V \approx 4{,}063\ 00$



22. a) $V = 2\pi\int_0^{\pi/4}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\tan x\ dx$

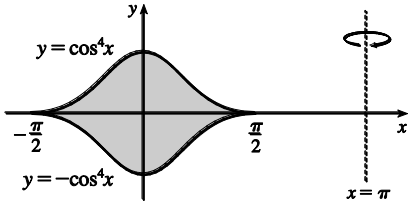
b) $V \approx 2{,}253\ 23$



23. a) $V = 2\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\pi - x)[\cos^4 x - (-\cos^4 x)]dx$

$= 4\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\pi - x)\cos^4 x\ dx$

b) $V \approx 46{,}509\ 42$



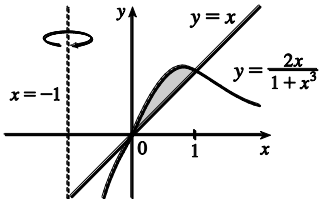
 © Groupe Modulo inc., 2013

24. a) $x = \dfrac{2x}{1+x^3} \Rightarrow x + x^4 = 2x \Rightarrow x^4 - x = 0 \Rightarrow$

$x(x^3 - 1) = 0 \Rightarrow x(x-1)(x^3 + x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou 1

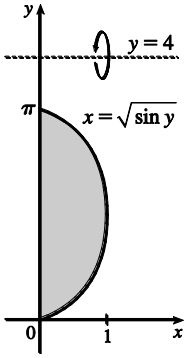
$V = 2\pi\int_0^1 [x - (-1)]\left(\dfrac{2x}{1+x^3} - x\right)dx$

b) $V \approx 2{,}361\ 64$



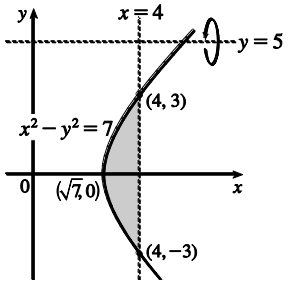
25. a) $V = \int_0^{\pi} 2\pi(4 - y)\sqrt{\sin y}\,dy$

b) $V \approx 36{,}574\ 76$



26. a) $V = \int_{-3}^{3} 2\pi(5 - y)\left(4 - \sqrt{y^2 + 7}\right)dy$

b) $V \approx 163{,}027\ 12$

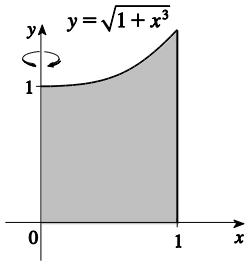


27. $V = \int_0^1 2\pi x\sqrt{1+x^3}\,dx$. Soit $f(x) = x\sqrt{1+x^3}$. En appliquant la règle des milieux des sous-intervalles avec $n = 5$, nous obtenons

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \tfrac{1-0}{5}[f(0{,}1) + f(0{,}3) + f(0{,}5) + f(0{,}7) + f(0{,}9)]$$
$$\approx 0{,}2(2{,}9290)$$

Si nous multiplions par 2π, nous obtenons $V \approx 3{,}68$.

 © Groupe Modulo inc., 2013



28. $V = \int_0^{10} 2\pi x\, f(x)dx$. Soit $g(x) = x\, f(x)$, où les valeurs de $f(x)$ sont estimées graphiquement. En appliquant la règle des milieux des sous-intervalles avec $n = 5$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_0^{10} g(x)dx &\approx \tfrac{10-0}{5}[g(1)+g(3)+g(5)+g(7)+g(9)]\\ &= 2[1f(1)+3f(3)+5f(5)+7f(7)+9f(9)]\\ &= 2[1(4-2)+3(5-1)+5(4-1)+7(4-2)+9(4-2)]\\ &= 2(2+12+15+14+18) = 2(61) = 122\end{aligned}$$

Si nous multiplions par 2π, nous obtenons $V \approx 244\pi \approx 766{,}5$.

29. $\int_0^3 2\pi x^5 dx = 2\pi\int_0^3 x(x^4)dx$. Le solide résulte de la rotation autour de l'axe des y de la région $0 \le y \le x^4$, $0 \le x \le 3$, en utilisant des coquilles cylindriques.

30. $2\pi\int_0^2 \frac{y}{1+y^2}dy = 2\pi\int_0^2 y\left(\frac{1}{1+y^2}\right)dy$. Le solide résulte de la rotation autour de l'axe des x de la région $0 \le x \le \frac{1}{1+y^2}$, $0 \le y \le 2$, en utilisant des coquilles cylindriques.

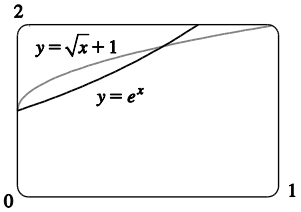
31. $\int_0^1 2\pi(3-y)(1-y^2)dy$. Le solide résulte de la rotation autour de la droite $y = 3$ de la région délimitée par

i) $x = 1-y^2$, $x = 0$ et $y = 0$ ou ii) $x = y^2$, $x = 1$ et $y = 0$, en utilisant des coquilles cylindriques.

32. $\int_0^{\pi/4} 2\pi(\pi - x)(\cos x - \sin x)dx$. Le solide résulte de la rotation autour de la droite $x = \pi$ de la région délimitée par

i) $0 \le y \le \cos x - \sin x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ ou ii) $\sin x \le y \le \cos x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$, en utilisant des coquilles cylindriques.

33.

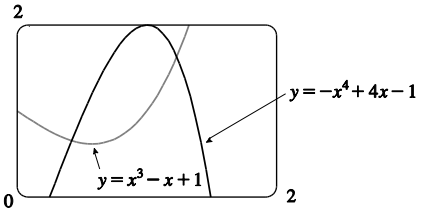


 © Groupe Modulo inc., 2013

Nous pouvons estimer graphiquement que les courbes se croisent en $x = 0$ et en $x = a \approx 0{,}56$, avec $\sqrt{x}+1 > e^x$ sur l'intervalle $[0, a]$.

Le volume du solide résultant de la rotation autour de l'axe des y de la région est donc $V = 2\pi\int_0^a x\left[\left(\sqrt{x}+1\right)-e^x\right]dx \approx 0{,}13$

34.

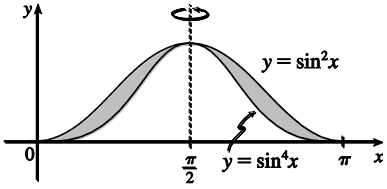


Nous pouvons estimer graphiquement que les courbes se croisent en $a \approx 0{,}42$ et en $x = b \approx 1{,}23$, avec $-x^4 + 4x - 1 > x^3 - x + 1$ sur l'intervalle $[a, b]$. Le volume du solide résultant de la rotation autour de l'axe des y de la région est donc

$$\begin{aligned} V &= 2\pi\int_a^b x[(-x^4+4x-1)-(x^3-x+1)]dx \\ &= 2\pi\int_a^b x(-x^4-x^3+5x-2)dx \approx 3{,}17 \end{aligned}$$

35. $V = 2\pi\int_0^{\pi/2}[(\frac{\pi}{2}-x)(\sin^2 x - \sin^4 x)]dx$

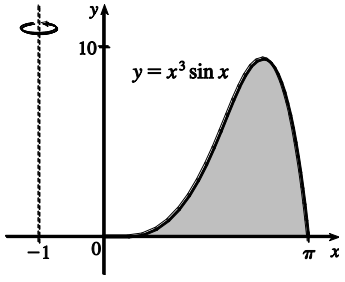
$\overset{\text{LCS}}{=} \frac{1}{32}\pi^3$



36. $V = 2\pi\int_0^{\pi}\{[x-(-1)](x^3\sin x)\}dx$

$\overset{\text{LCS}}{=} 2\pi(\pi^4+\pi^3-12\pi^2-6\pi+48)$

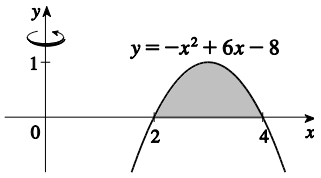
$= 2\pi^5+2\pi^4-2\pi^3-2\pi^2+96\pi$



37. En utilisant des coquilles cylindriques :

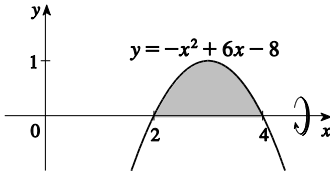
$$\begin{aligned} V &= \int_2^4 2\pi x(-x^2+6x-8)dx = 2\pi\int_2^4(-x^3+6x^2-8x)dx \\ &= 2\pi[-\tfrac{1}{4}x^4+2x^3-4x^2]_2^4 \\ &= 2\pi[(-64+128-64)-(-4+16-16)] \\ &= 2\pi(4) = 8\pi \end{aligned}$$

 © Groupe Modulo inc., 2013



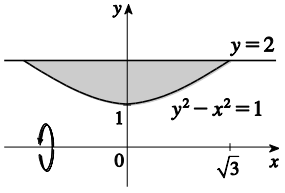
38. Selon un découpage vertical (méthode des disques) :

$$\begin{aligned} V &= \int_2^4 \pi(-x^2+6x-8)^2\,dx \\ &= \pi\int_2^4 (x^4-12x^3+52x^2-96x+64)dx \\ &= \pi[\tfrac{1}{5}x^5-3x^4+\tfrac{52}{3}x^3-48x^2+64x]_2^4 \\ &= \pi(\tfrac{512}{15}-\tfrac{496}{15}) = \tfrac{16}{15}\pi \end{aligned}$$



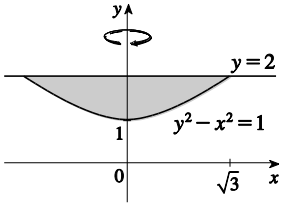
39. Selon un découpage vertical (méthode des disques troués) : $y^2-x^2=1 \;\Rightarrow\; y=\pm\sqrt{x^2\pm1}$

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \pi\left[(2-0)^2-\left(\sqrt{x^2+1}-0\right)^2\right]dx \\ &= 2\pi\int_0^{\sqrt{3}} [4-(x^2+1)]dx \quad \text{[par symétrie]} \\ &= 2\pi\int_0^{\sqrt{3}} (3-x^2)dx = 2\pi[3x-\tfrac{1}{3}x^3]_0^{\sqrt{3}} \\ &= 2\pi\left(3\sqrt{3}-\sqrt{3}\right) = 4\sqrt{3}\pi \end{aligned}$$



40. Selon un découpage horizontal (méthode des disques) : $y^2-x^2=1 \;\Rightarrow\; x=\pm\sqrt{y^2-1}$

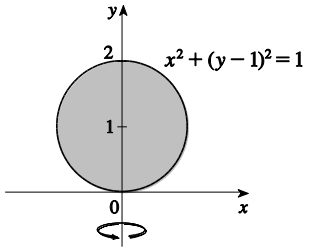
$$\begin{aligned} V &= \pi\int_1^2 \left(\sqrt{y^2-1}\right)^2 dy = \pi\int_1^2 (y^2-1)dy \\ &= \pi[\tfrac{1}{3}y^3-1]_1^2 = \pi[(\tfrac{8}{3}-2)-(\tfrac{1}{3}-1)] = \tfrac{4}{3}\pi \end{aligned}$$



 © Groupe Modulo inc., 2013

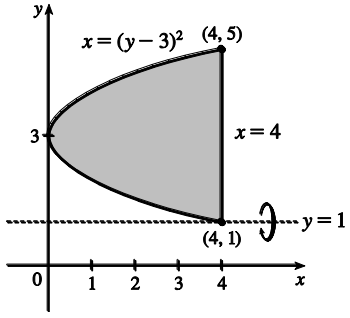
41. Selon un découpage horizontal (méthode des disques) : $x^2+(y-1)^2=1 \quad \Leftrightarrow \quad x=\pm\sqrt{1-(y-1)^2}$

$$V=\pi\int_0^2\left[\sqrt{1-(y-1)^2}\right]^2 dy=\pi\int_0^2(2y-y^2)dy$$
$$=\pi[y^2-\tfrac{1}{3}y^3]_0^2=\pi(4-\tfrac{8}{3})=\tfrac{4}{3}\pi$$



42. Selon la méthode des coquilles cylindriques :

$$V=\int_1^5 2\pi(y-1)[4-(y-3)^2]dy$$
$$=2\pi\int_1^5(y-1)(-y^2+6y-5)dy$$
$$=2\pi\int_1^5(-y^3+7y^2-11y+5)dy$$
$$=2\pi[-\tfrac{1}{4}y^4+\tfrac{7}{3}y^3-\tfrac{11}{2}y^2+5y]_1^5$$
$$=2\pi(\tfrac{275}{12}-\tfrac{19}{12})=\tfrac{128}{3}\pi$$

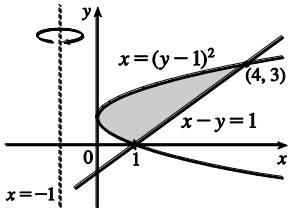


43. $y+1=(y-1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad y+1=y^2-2y+1 \quad \Leftrightarrow \quad 0=y^2-3y \quad \Leftrightarrow \quad 0=y(y-3) \quad \Leftrightarrow \quad y=0$ ou 3.

Selon un découpage horizontal (méthode des disques troués) :

$$V=\pi\int_0^3\{[(y+1)-(-1)]^2-[(y-1)^2-(-1)]^2\}dy$$
$$=\pi\int_0^3[(y+2)^2-(y^2-2y+2)^2]dy$$
$$=\pi\int_0^3[(y^2+4y+4)-(y^4-4y^3+8y^2-8y+4)]dy=\pi\int_0^3(-y^4+4y^3-7y^2+12y)dy$$
$$=\pi[-\tfrac{1}{5}y^5+y^4-\tfrac{7}{3}y^3+6y^2]_0^3=\pi(-\tfrac{243}{5}+81-63+54)=\tfrac{117}{5}\pi$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

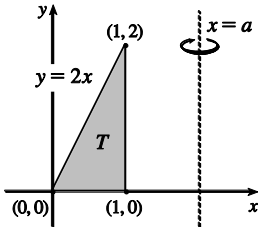


44. Selon la méthode des coquilles cylindriques pour trouver le volume V.

$$V = \int_0^1 2\pi(a-x)(2x)dx = 4\pi\int_0^1 (ax - x^2)dx$$
$$= 4\pi[\tfrac{1}{2}ax^2 - \tfrac{1}{3}x^3]_0^1 = 4\pi(\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{3})$$

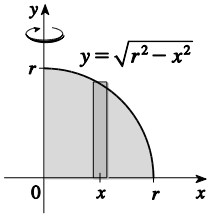
Maintenant exprimons la valeur de a en fonction de V :

$$V = 4\pi(\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{3}) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{V}{4\pi} = \frac{1}{2}a - \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}a = \frac{V}{4\pi} + \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow$$
$$a = \frac{V}{2\pi} + \frac{2}{3}$$



45. Selon la méthode des coquilles cylindriques :

$$V = 2\int_0^r 2\pi x\sqrt{r^2 - x^2}\,dx = -2\pi\int_0^r (r^2 - x^2)^{1/2}(-2x)dx$$
$$= [-2\pi \cdot \tfrac{2}{3}(r^2 - x^2)^{3/2}]_0^r = -\tfrac{4}{3}\pi(0 - r^3) = \tfrac{4}{3}\pi r^3$$



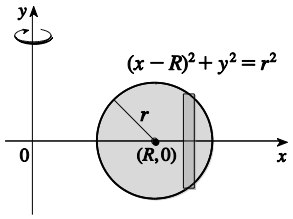
46. $V = \int_{R-r}^{R+r} 2\pi x \cdot 2\sqrt{r^2 - (x-R)^2}\,dx$

$= \int_{-r}^{r} 4\pi(u+R)\sqrt{r^2 - u^2}\,du$ [posons $u = x - R$]

$= 4\pi R\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - u^2}\,du + 4\pi\int_{-r}^{r} u\sqrt{r^2 - u^2}\,du$

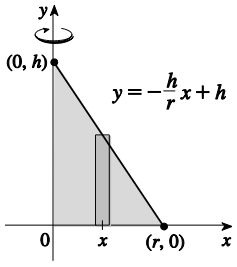
La première intégrale donne l'aire d'un demi-cercle de rayon r, c'est-à-dire $\frac{1}{2}\pi r^2$, et la seconde est nulle puisque l'intégrande est une fonction impaire. Il s'ensuit que $V = 4\pi R(\frac{1}{2}\pi r^2) + 4\pi \cdot 0 = 2\pi^2 Rr^2$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

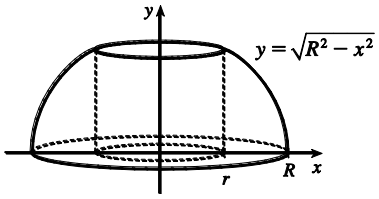


47. $V = 2\pi\int_0^r x\left(-\frac{h}{r}x+h\right)dx = 2\pi h\int_0^r\left(-\frac{x^2}{r}+x\right)dx$

$= 2\pi h\left[-\frac{x^3}{3r}+\frac{x^2}{2}\right]_0^r = 2\pi h\frac{r^2}{6} = \frac{\pi r^2 h}{3}$



48. Par symétrie, le volume de l'anneau à serviette de table fabriqué en perçant un trou de rayon r à travers une sphère de rayon R est le double du volume résultant de la rotation autour de l'axe des y de l'aire située au-dessus de l'axe des x et sous la courbe $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ (l'équation de la moitié supérieure de la section transversale de la sphère), entre $x = r$ et $x = R$. Ce volume est égal à



$$2\int_{\text{rayon interne}}^{\text{rayon externe}} 2\pi rh\,dx = 2\cdot 2\pi\int_r^R x\sqrt{R^2-x^2}\,dx = 4\pi[-\tfrac{1}{3}(R^2-x^2)^{3/2}]_r^R = \tfrac{4}{3}\pi(R^2-r^2)^{3/2}$$

Cependant, selon le théorème de Pythagore, $R^2 - r^2 = (\frac{1}{2}h)^2$, donc le volume de l'anneau à serviette de table est $\frac{4}{3}\pi(\frac{1}{2}h)^3 = \frac{1}{6}\pi h^3$, qui est indépendant de R et de r; en d'autres mots, la quantité de bois contenue dans un anneau à serviette de table de hauteur h est la même, quelles que soient les dimensions de la sphère qui a été utilisée. Vous remarquerez qu'une bonne partie de ce calcul a déjà été effectuée, mais avec plus de difficulté, à l'exercice 2.2.68.

Autre solution : La hauteur de la calotte sphérique manquante est égale au rayon de la sphère moins la moitié de la hauteur du cylindre percé, c'est-à-dire $R - \frac{1}{2}h$. Si nous utilisons les résultats de l'exercice 2.2.49,

$$V_{\text{anneau à serviette de table}} = V_{\text{sphère}} - V_{\text{cylindre}} - 2V_{\text{calotte sphérique}} = \tfrac{4}{3}\pi R^3 - \pi r^2 h - 2\cdot\tfrac{\pi}{3}(R-\tfrac{1}{2}h)^2[3R-(R-\tfrac{1}{2}h)] = \tfrac{1}{6}\pi h^3$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

2.4 Le travail

1. a) Le travail effectué par un gorille lorsqu'il soulève son propre poids de 160 kg à une hauteur de 6 m est

$W = Fd = (mg)d = [(160 \text{ kg})(9{,}8 \text{ m/s}^2)](6 \text{ m}) = 9408 \text{ J}$

b) Le temps que prend le gorille pour atteindre le sommet de l'arbre n'a aucune incidence sur le travail requis, qui demeure 9408 J

2. $W = Fd = (mg)d = [(200 \text{ kg})(9{,}8 \text{ m/s}^2)](3 \text{ m}) = (1960 \text{ N})(3 \text{ m}) = 5880 \text{ J}$

3. $W = \int_a^b f(x)dx = \int_1^{10} 5x^{-2}dx = 5[-x^{-1}]_1^{10} = 5(-\frac{1}{10} + 1) = 4{,}5 \text{ J}$

4. $W = \int_1^2 \cos(\frac{1}{3}\pi x)dx = \frac{3}{\pi}[\sin(\frac{1}{3}\pi x)]_1^2 = \frac{3}{\pi}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0 \text{ N} \cdot \text{m} = 0 \text{ J}$.

Interprétation : De $x = 1$ à $x = \frac{3}{2}$, la force effectue un travail égal à $\int_1^{3/2} \cos(\frac{1}{3}\pi x)dx = \frac{3}{\pi}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$J en accélérant la particule et en augmentant son énergie cinétique. De $x = \frac{3}{2}$ à $x = 2$, la force s'oppose au mouvement de la particule, diminuant son énergie cinétique. Il s'agit là d'un travail négatif, égal en valeur absolue, mais de signe opposé au travail effectué de $x = 1$ à $x = \frac{3}{2}$.

5. La fonction force (en newtons) est représentée par $F(x)$, et le travail (en joules) est l'aire sous la courbe, exprimée par $\int_0^8 F(x)dx = \int_0^4 F(x)dx + \int_4^8 F(x)dx = \frac{1}{2}(4)(30) + (4)(30) = 180 \text{ J}$.

6. $W = \int_4^{20} f(x)dx \approx M_4 = \Delta x[f(6) + f(10) + f(14) + f(18)] = \frac{20-4}{4}[5{,}8 + 8{,}8 + 8{,}2 + 5{,}2] = 4(28) = 112 \text{ J}$

7. Selon la loi de Hooke, la force requise pour maintenir un ressort étiré à x unités au-delà de sa longueur au repos est proportionnelle à x, c'est-à-dire $f(x) = kx$. Dans le présent cas, l'étirement est de 8 cm $= \frac{2}{25}$ m et la force est de 10 N. Ainsi,

$10 = k(\frac{2}{25}) \Rightarrow k = 125$ N/m et $f(x) = 125x$. Le travail effectué en étirant le ressort de sa longueur au repos à 12 cm $= \frac{3}{25}$ m au-delà de cette longueur au repos est $W = \int_0^{3/25} 125x\,dx = [\frac{125}{2}x^2]_0^{3/25} = \frac{9}{10}$ J.

8. Selon la loi de Hooke, la force requise pour maintenir un ressort étiré à x unités au-delà de sa longueur au repos est proportionnelle à x, c'est-à-dire $f(x) = kx$. Dans le présent cas, l'étirement est de 30 – 20 = 10 cm = 0,1 m et la force est de 25 N.

Ainsi, $25 = k(0{,}1) \Rightarrow k = 250$ N/m et $f(x) = 250x$. Le travail requis pour étirer le ressort de 20 cm à 25 cm

[25 – 20 = 5cm = $\frac{1}{20}$ m] est $W = \int_0^{1/20} 250x\,dx = [125x^2]_0^{1/20} = 125(1/20)^2 = \frac{5}{16}$ J.

 © Groupe Modulo inc., 2013

9. a) Si $\int_0^{0,12} kx\,dx = 2$ J, alors $2 = [\frac{1}{2}kx^2]_0^{0,12} = \frac{1}{2}k(0{,}014\,4) = 0{,}007\,2k$ et $k = \frac{2}{0{,}007\,2} = \frac{2500}{9} \approx 277{,}78$ N/m. Il s'ensuit que le travail requis pour étirer le ressort de 35 cm à 40 cm est $\int_{0,05}^{0,10} \frac{2500}{9}x\,dx = [\frac{1250}{9}x^2]_{1/20}^{1/10} = \frac{1250}{9}(\frac{1}{100} - \frac{1}{400}) = \frac{25}{24} \approx 1{,}04$ J.

b) $f(x) = kx$, donc $30 = \frac{2500}{9}x$ et $x = \frac{270}{2500}m = 10{,}8$ cm

10. Si $12 = \int_0^1 kx\,dx = [\frac{1}{2}kx^2]_0^1 = \frac{1}{2}k$, alors $k = 24$ N/m et le travail requis est $\int_0^{3/4} 24x\,dx = [12x^2]_0^{3/4} = 12 \cdot \frac{9}{16} = \frac{27}{4} = 6{,}75$ J.

11. Le déplacement de 20 cm à 30 cm est 0,1 m, donc avec $f(x) = kx$, nous obtenons $W_1 = \int_0^{0,1} kx\,dx = k[\frac{1}{2}x^2]_0^{0,1} = \frac{1}{200}k$.

Et, $W_2 = \int_{0,1}^{0,2} kx\,dx = k[\frac{1}{2}x^2]_{0,1}^{0,2} = k(\frac{4}{200} - \frac{1}{200}) = \frac{3}{200}k$. Il s'ensuit que $W_2 = 3W_1$.

12. Soit L la longueur au repos d'un ressort en mètres. Alors, $6 = \int_{0,10-L}^{0,12-L} kx\,dx = [\frac{1}{2}kx^2]_{0,10-L}^{0,12-L} = \frac{1}{2}k[(0{,}12 - L)^2 - (0{,}10 - L)^2]$

et $10 = \int_{0,12-L}^{0,14-L} kx\,dx = [\frac{1}{2}kx^2]_{0,12-L}^{0,14-L} = \frac{1}{2}k[(0{,}14 - L)^2 - (0{,}12 - L)^2]$.

En simplifiant, nous obtenons $12 = k(0{,}004\,4 - 0{,}04L)$ et $20 = k(0{,}005\,2 - 0{,}04L)$. En soustrayant la première égalité de la seconde, nous obtenons $8 = 0{,}000\,8k$, donc $k = 10\,000$. La deuxième égalité devient $20 = 52 - 400L$, donc $L = \frac{32}{400}\text{m} = 8$ cm.

Aux exercices 13 à 20, n est le nombre de sous-intervalles de longueur Δx, et x_i^* est un point d'échantillonnage dans le $i^{\text{ème}}$ sous-intervalle $[x_{i-1}, x_i]$.

13. a) La portion du câble qui pend entre x m et $(x + \Delta x)$ m sous le sommet de l'immeuble a une masse de $10\Delta x$ kg et doit être hissée de $x_i^* m$; sa contribution au travail total est donc $10gx_i^*\Delta x$ J. Le travail total requis est

$$W = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 10gx_i^*\,\Delta x = \int_0^{16} 10gx\,dx = [5gx^2]_0^{16} = 1280g = 12\,544 \text{ J}.$$

Il est à remarquer que la hauteur exacte de l'immeuble n'a aucune importance (pourvu qu'elle soit de plus de 16 m).

b) Lorsque la moitié du câble sera hissée au sommet de l'immeuble, le travail requis pour hisser la moitié supérieure du câble est $W_1 = \int_0^8 10gx\,dx = [5gx^2]_0^8 = 3136$ J. La moitié inférieure du câble est hissée de 8 m et le travail requis pour accomplir cette tâche est $W_2 = \int_8^{16} 10 \cdot 8g\,dx = 80g[x]_8^{16} = 6272$ J. Le travail total requis pour hisser la moitié du câble au sommet de l'immeuble est $W = W_1 + W_2 = 3\,136 + 6\,272 = 9408$ J.

14. *Hypothèses :*

1. Une fois que son extrémité a été soulevée, la chaîne est en forme de L, et 4 m de la chaîne reposent sur le sol.
2. La chaîne glisse sans effort et sans friction le long du sol lorsque son extrémité est soulevée.

 © Groupe Modulo inc., 2013

3. La masse linéaire de la chaîne est constante sur toute sa longueur et est donc égale à (8 kg/m)(9,8 m/s^2) = 78,4 N/m. La partie de la chaîne située à x m de l'extrémité soulevée est élevée de $6 - x$ m si $0 \le x \le 6$ m, et elle est élevée de 0 m si $x > 6$ m. Le travail requis est donc

$$W = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(6-x_i^*)\cdot 78,4\ \Delta x = \int_0^6 (6-x)78,4\,dx = 78,4[6x - \tfrac{1}{2}x^2]_0^6 = (78,4)(18) = 1411,2\ \text{J}$$

15. Le travail requis pour hisser le câble est $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 3gx_i^*\Delta x = \int_0^{200} 3gx\,dx = \frac{3}{2}g[x^2]_0^{200} = 588\,000$ J. Le travail requis pour hisser le charbon est 3500 kg · 200 m · g = 6 860 000 J. Le travail total requis est donc 588 000 + 6 860 000 = 7 448 000 J.

16. Le travail requis pour hisser le seau lui-même est 2 kg · 25 m · g = 490 J. Au temps t (en secondes), le seau est $x_i^* = 0,5t$ m au-dessus de sa position initiale de 25 m, mais il ne contient maintenant que (15 – 0,1t) kg d'eau. En fonction de la distance, le seau contient $[15 - 0,1(2x_i^*)]$ kg d'eau lorsqu'il est x_i^* m au-dessus de sa position initiale de 25 m. Le travail requis pour hisser cette quantité d'eau sur une distance Δx est $(15 - \frac{1}{5}x_i^*)\,g\Delta x$ J. Ainsi, le travail requis pour hisser l'eau est

$$W = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(15-\tfrac{1}{5}x_i^*)g\Delta x = \int_0^{25}(15-\tfrac{1}{5}x)g\,dx = g[15x - \tfrac{1}{10}x^2]_0^{25} = g(375-62,5) = 3062,5\ \text{J}.$$

Si nous ajoutons le travail requis pour hisser le seau, nous obtenons un total de 3 552,5 J de travail.

17. À une hauteur de x mètres ($0 \le x \le 12$), la masse du câble est (0,8 kg/m)(12 – x m) = (9,6 – 0,8x) kg et la masse de l'eau est $(\frac{36}{12}\text{ kg/m})(12 - x\text{ m}) = (36 - 3x)$ kg. La masse du seau est 10 kg, donc la masse totale est (9,6 – 0,8x) + (36 – 3x) + 10 = (55,6 – 3,8x) kg; par conséquent, la force totale est 9,8(55,6 – 3,8x)N. Le travail requis pour hisser le seau Δx m à travers le $i^{\text{ème}}$ sous-intervalle de [0, 12] est $9,8(55,6 - 3,8x_i^*)\Delta x$, et le travail total est donc

$$W = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 9,8(55,6-3,8x_i^*)\Delta x = \int_0^{12}(9,8)(55,6-3,8x)\,dx = 9,8[55,6x - 1,9x^2]_0^{12} = 9,8(393,6) \approx 3\,857\ \text{J}$$

18. La masse linéaire de la chaîne est $\dfrac{10\text{ kg}}{3\text{ m}} = \frac{10}{3}$ kg/m. La section de la chaîne qui est x m sous le plafond (pour $1,5 \le x \le 3$ doit être soulevée de 2(x – 1,5) m ; le travail requis pour soulever le i^{e} sous-intervalle de la chaîne est donc $2(x_i^* - 1,5)(\frac{10}{3}\Delta x)\cdot g$. Le travail total requis est

$$\begin{aligned} W &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 2(x_i^*-1,5)(\tfrac{10}{3})g\ \Delta x = \int_{1,5}^{3}[2(x-1,5)(\tfrac{10}{3})g]\,dx = \tfrac{20}{3}g\int_{1,5}^{3}(x-1,5)\,dx \\ &= \tfrac{20}{3}g[\tfrac{1}{2}x^2 - 1,5x]_{1,5}^{3} = \tfrac{20}{3}g[(\tfrac{9}{2}-\tfrac{9}{2}) - (\tfrac{9}{8}-\tfrac{9}{4})] = \tfrac{20}{3}g(\tfrac{9}{8}) = 73,5\ \text{J} \end{aligned}.$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

19. Une « tranche » d'eau d'une épaisseur de Δx m et située à une profondeur de x_i^*m (où $0 \le x_i^* \le \frac{1}{2}$) a un volume de $(2 \times 1 \times \Delta x)$ m^3, une masse de $2000\,\Delta x$ kg et pèse environ $(9{,}8)(2000\,\Delta x) = 19\,600\,\Delta x$ N; le travail requis pour la pomper à l'extérieur de l'aquarium est donc d'environ $19{,}600x_i^*\Delta x$ J. Donc, $W = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n} 19{,}600x_i^*\Delta x = \int_0^{1/2} 19{,}600x\,dx = [9800x^2]_0^{1/2} = 2450$ J.

20. Une « tranche » horizontale (et donc cylindrique) d'eau d'une épaisseur de Δx m a un volume de $\pi r^2 h = \pi \cdot 3{,}5^2 \cdot \Delta x$ m^3 et pèse environ $3{,}5^2\pi \cdot 1000 \cdot 9{,}8 \cdot \Delta x = 120\,050\pi \cdot \Delta x$ N. Si la tranche considérée est à x_i^* m sous le rebord de la piscine (où $0{,}3 \le x_i^* \le 1{,}5$), alors le travail requis pour la pomper à l'extérieur de la piscine est environ $120\,050\pi x_i^*\Delta x$. Il s'ensuit que

$$W = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 120\,050\pi x_i^*\Delta x = \int_{0,3}^{1,5} 120\,050\pi x\,dx = [60\,025\pi x^2]_{0,3}^{1,5} = 60\,025\pi(1{,}5^2 - 0{,}3^2) = 129\,654\pi \text{ J}.$$

21. Une « tranche » rectangulaire d'eau d'une épaisseur de Δx m et située à x m au-dessus du fond du réservoir a une largeur de x m et un volume de $8x\,\Delta x$ m^3. Cette tranche pèse environ $(9{,}8 \times 1000)(8x\,\Delta x)$ N, et doit être élevée d'une hauteur de $(5 - x)$ m par la pompe; le travail requis est donc environ $(9{,}8 \times 10^3)(5 - x)(8x\,\Delta x)$ J. Le travail total requis est

$$\begin{aligned} W &\approx \int_0^3 (9{,}8\times10^3)(5-x)8x\,dx = (9{,}8\times10^3)\int_0^3 (40x - 8x^2)dx = (9{,}8\times10^3)[20x^2 - \tfrac{8}{3}x^3]_0^3 \\ &= (9{,}8\times10^3)(180 - 72) = (9{,}8\times10^3)(108) = 1058{,}4\times10^3 \approx 1{,}06\times10^6 \text{ J} \end{aligned}$$

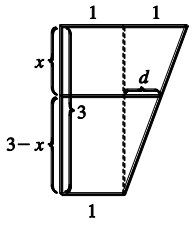
22. Soit y la profondeur (en mètres) sous le centre du réservoir sphérique, de sorte que $y = -3$ au sommet du réservoir et $y = -4$ à la hauteur du bec de soutirage. Une « tranche » horizontale d'eau en forme d'un disque d'une épaisseur Δy m et située à la hauteur y a un rayon de $\sqrt{9 - y^2}$ m et un volume de $\pi r^2\Delta y = \pi(9 - y^2)\,\Delta y$ m^3. Cette tranche pèse environ $(9{,}8 \times 1000)\pi(9 - y^2)\,\Delta y$ N et doit être élevée d'une hauteur de $(y + 4)$ m par la pompe; le travail requis pour la pomper vers l'extérieur est donc environ $(9{,}8 \times 10^3)(y + 4)\pi(9 - y^2)\,\Delta y$ J. Le travail total requis est

$$\begin{aligned} W &\approx \int_{-3}^3 (9{,}8\times10^3)(y+4)\pi(9-y^2)dy = (9{,}8\times10^3)\pi\int_{-3}^3 (9y - y^3 + 36 - 4y^2)dy \\ &= (9{,}8\times10^3)\pi(2)(4)\int_0^3 (9 - y^2)dy \quad \text{[selon le théorème 1.7.7]} \\ &= (78{,}4\times10^3)\pi[9y - \tfrac{1}{3}y^3]_0^3 = (78{,}4\times10^3)\pi(18) = 1\,411\,200\pi \approx 4{,}43\times10^6 \text{ J} \end{aligned}$$

23. Soit x, la profondeur (en mètres) sous le bec de soutirage au sommet du réservoir. Une « tranche » horizontale d'eau en forme d'un disque d'une épaisseur de Δx m et située à la hauteur x a un rayon de $\frac{1}{3}(6 - x)$ m* et un volume de $\pi r^2\Delta x = \pi \cdot \frac{1}{9}(6 - x)^2\Delta x$ m^3. Cette tranche pèse environ $(9{,}8\times10^3)\frac{\pi}{9}(6 - x)^2\Delta x$ N et doit être élevée d'une hauteur de x m par la pompe ; le travail requis pour la pomper vers l'extérieur est donc environ $(9{,}8\times10^3)x\frac{\pi}{9}(16 - x)^2\Delta x$ J. Le travail total requis est

 © Groupe Modulo inc., 2013

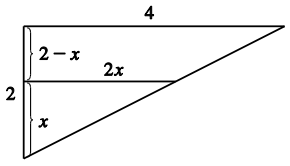
$$W \approx \int_0^3 (9{,}8\times 10^3)x\tfrac{\pi}{9}(6-x)^2\,dx = (9{,}8\times 10^3)\tfrac{\pi}{9}\int_0^3 x(36-12x+x^2)\,dx$$
$$= (9{,}8\times 10^3)\tfrac{\pi}{9}\int_0^3 (36x-12x^2+x^3)\,dx = (9{,}8\times 10^3)\tfrac{\pi}{9}[18x^2-4x^3+\tfrac{1}{4}x^4]_0^3 .$$
$$= (9{,}8\times 10^3)\tfrac{\pi}{9}\left(\frac{297}{4}\right) = 80\,850\pi \approx 2{,}54\times 10^5 \text{ J}$$



* Selon la similitude des triangles, $\dfrac{d}{3-x} = \dfrac{1}{3}$.

Donc $r = 1 + d = 1 + \tfrac{1}{3}(3-x)$
$= \dfrac{1(3)}{3} + \dfrac{1}{3}(3-x)$
$= \tfrac{1}{3}(6-x)$

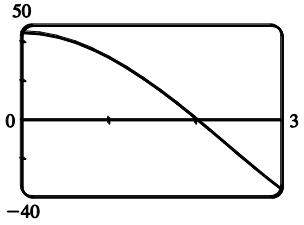
24. Soit x, la distance (en mètres) au-dessus du fond du réservoir. Une « tranche » horizontale d'eau d'une épaisseur de Δx m et située à la hauteur x a un volume de $3(2x)\,\Delta x$ m^3. Cette tranche pèse environ $(9{,}8 \times 1000)(6x\,\Delta x)$ N et doit être élevée d'une hauteur de $(2 - x)$ m par la pompe ; le travail requis pour la pomper vers l'extérieur est donc environ $(9800)(2 - x)6x\,\Delta x$ N. Le travail total requis est $W \approx \int_0^2 (9800)(2-x)6x\,dx = 58\,800\int_0^2 (2x-x^2)\,dx = 58\,800[x^2 - \tfrac{1}{3}x^3]_0^2 = 58\,800(\dfrac{4}{3}) = 78\,400$ N.



25. Si un travail de seulement $4{,}7 \times 10^5$ J est effectué, alors seule l'eau au-dessus d'un certain niveau (appelons-le h) aura été pompée vers l'extérieur. Nous utiliserons donc la même formule qu'à l'exercice 21, à l'exception que la quantité de travail est fixe, et que nous désirons calculer la borne inférieure d'intégration :

$4{,}7\times 10^5 \approx \int_h^3 (9{,}8\times 10^3)(5-x)8x\,dx = (9{,}8\times 10^3)[20x^2 - \tfrac{8}{3}x^3]_h^3 \quad \Leftrightarrow$
$\tfrac{4{,}7}{9{,}8}\times 10^2 \approx 48 = (20\cdot 3^2 - \tfrac{8}{3}\cdot 3^3) - (20h^2 - \tfrac{8}{3}h^3) \quad \Leftrightarrow \quad 2h^3 - 15h^2 + 45 = 0$. Afin de trouver la solution de cette équation, nous traçons $2h^3 - 15h^2 + 45$ entre $h = 0$ et $h = 3$. Nous constatons que l'équation est satisfaite lorsque $h \approx 2{,}0$. Le niveau de l'eau restant dans le réservoir est donc d'environ 2,0 m.

 © Groupe Modulo inc., 2013



26. Les seuls changements qu'il faut apporter à la solution de l'exercice 22 sont : 1) changer la borne inférieure de –3 à 0, puis 2) remplacer 1000 par 900.

$$W \approx \int_0^3 (9{,}8\times 900)(y+4)\pi(9-y^2)\,dy = (9{,}8\times 900)\pi\int_0^3 (9y - y^3 + 36 - 4y^2)\,dy$$
$$= (9{,}8\times 900)\pi[\tfrac{9}{2}y^2 - \tfrac{1}{4}y^4 + 36y - \tfrac{4}{3}y^3]_0^3 = (9{,}8\times 900)\pi(92{,}25) = 813\,645\pi$$
$$\approx 2{,}56\times 106 \text{ J [environ 58 \% du travail à l'exercice 22]}$$

27. $V = \pi r^2 x$, donc V est une fonction de x, et P peut également être considéré comme une fonction de x. Si $V_1 = \pi r^2 x_1$ et $V_2 = \pi r^2 x_2$, alors

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \pi r^2 P(V(x))\,dx = \int_{x_1}^{x_2} P(V(x))\,dV(x) \quad [\text{Soit } V(x) = \pi r^2 x, \text{ donc } dV(x) = \pi r^2 dx.]$$
$$= \int_{V_1}^{V_2} P(V)\,dV \text{ selon la méthode du changement de variable.}$$

28. 100 N/cm^2 = 100 · 100^2 N/m^2, 1600 cm^3 = $\frac{1600}{100^3}$ m^3, et 13 000 cm^3 = $\frac{13\,000}{100^3}$ m^3.

$k = PV^{1,4} = (100\cdot 100^2)(\frac{1600}{100^3})^{1,4} = 1\,000\,000(\frac{1}{625})^{1,4} \approx 121{,}83$. Par conséquent, $P \approx 121{,}83V^{-1,4}$ et

$$W = \int_{1\,600/100^3}^{13\,000/100^3} 121{,}83\,V^{-1,4}\,dV = 121{,}83[\tfrac{1}{-0{,}4}V^{-0,4}]_{1/625}^{13/1\,000} = (121{,}83)(2{,}5)[(\tfrac{625}{1})^{0,4} - (\tfrac{1\,000}{13})^{0,4}] \approx 2\,270 \text{ J}.$$

29. a) $$W = \int_a^b F(r)\,dr = \int_a^b G\frac{m_1 m_2}{r^2}\,dr = Gm_1m_2\left[\frac{-1}{r}\right]_a^b = Gm_1m_2\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

b) Selon la sous-question a), $W = GMm\left(\dfrac{1}{R} - \dfrac{1}{R + 1\,000\,000}\right)$ où M est la masse de la Terre en kg, R est le rayon de la Terre en mètres et m est la masse du satellite en kg. (Souvenez-vous que 1000 km = 1 000 000 m.) Par conséquent,

$$W = (6{,}67\times 10^{-11})(5{,}98\times 10^{24})(1000)\times\left(\frac{1}{6{,}37\times 10^6} - \frac{1}{7{,}37\times 10^6}\right) \approx 8{,}50\times 10^9 \text{ J}$$

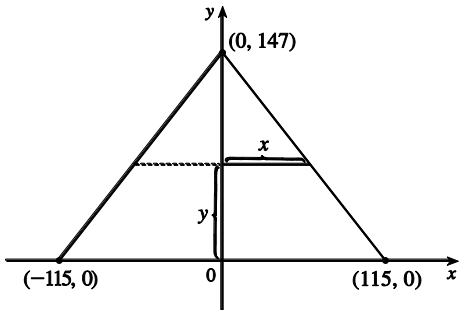
30. a) Considérons que les côtés de la pyramide sont lisses. Selon le graphique, pour $0 \le x \le 115$, l'équation pour le côté est $y = \frac{-147}{115}x + 147 \iff x = -\frac{115}{147}(y - 147)$. La longueur horizontale d'une section transversale est $2x$ et l'aire d'une section transversale est $A = (2x)^2 = 4x^2 = 4\dfrac{115^2}{147^2}(y-147)^2$. Une tranche d'épaisseur Δy à la hauteur y a un volume de $\Delta V = A\,\Delta y$ m^3 et un poids de $9{,}8\times 2400\,\Delta V$ N ; le travail requis pour la construction de la pyramide est donc

 © Groupe Modulo inc., 2013

$$W_1 = \int_0^{147} 9{,}8 \times 2400 \cdot y \cdot 4\frac{115^2}{147^2}(y-147)^2\,dy = 94\,080\frac{115^2}{147^2}\int_0^{147}(y^3 - 2\cdot 147y^2 + 147^2 y)dy$$

$$= 94\,080\frac{115^2}{147^2}\left[\frac{1}{4}y^4 - \frac{2\cdot 147}{3}y^3 + \frac{147^2}{2}y^2\right]_0^{147} = 94\,080\frac{115^2}{147^2}\left(\frac{147^4}{4} - \frac{2\cdot 147^4}{3} + \frac{147^4}{2}\right)$$

$$= 94\,080\frac{115^2}{147^2}\frac{147^4}{12} = 7840\cdot 115^2\cdot 147^2 \approx 2{,}24\times 10^{12}$$



b) Travail effectué $= W_2 = \dfrac{10\text{ h}}{\text{jour}} \cdot \dfrac{340\text{ jours}}{\text{année}} \cdot \dfrac{20\text{ années}}{1\text{ ouvrier}} \cdot \dfrac{271\text{ J}}{\text{heure}} = 1{,}8428\times 10^7\ \dfrac{\text{J}}{\text{ouvrier}}$. Si nous divisons W_1 par W_2, nous obtenons environ 121 582 ouvriers.

 © Groupe Modulo inc., 2013

2.5 La valeur moyenne d'une fonction

1. $f_{moy} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{4-0}\int_0^4 (4x-x^2)dx = \frac{1}{4}[2x^2 - \frac{1}{3}x^3]_0^4 = \frac{1}{4}[(32-\frac{64}{3})-0] = \frac{1}{4}(\frac{32}{3}) = \frac{8}{3}$

2. $f_{moy} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{\pi-(-\pi)}\int_{-\pi}^{\pi} \sin 4x dx = 0$ [selon le théorème 1.7.7 b)]

3. $g_{moy} = \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx = \frac{1}{8-1}\int_1^8 \sqrt[3]{x}dx = \frac{1}{7}[\frac{3}{4}x^{4/3}]_1^8 = \frac{3}{28}(16-1) = \frac{45}{28}$

4. $g_{moy} = \frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt = \frac{1}{3-1}\int_1^3 \frac{t}{\sqrt{3+t^2}}\,dt = \frac{1}{2}\left[(3+t^2)^{1/2}\right]_1^3 = \frac{1}{2}(2\sqrt{3}-2) = \sqrt{3}-1$

5. $f_{moy} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt = \frac{1}{\pi/2-0}\int_0^{\pi/2} e^{\sin t}\cos t dt = \frac{2}{\pi}[e^{\sin t}]_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi}(e-1)$

6. $f_{moy} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{\pi/2-0}\int_0^{\pi/2} \sec^2(\theta/2)d\theta = \frac{2}{\pi}[2\tan(\theta/2)]_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi}\left[2(1)-0\right] = \frac{4}{\pi}$

7. $h_{moy} = \frac{1}{\pi-0}\int_0^{\pi} \cos^4 x \sin x\, dx = \frac{1}{\pi}\int_1^{-1} u^4(-du)$ $[u = \cos x,\ du = -\sin x\, dx]$

$= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} u^4 du = \frac{1}{\pi}\cdot 2\int_0^1 u^4 du$ [selon le théorème 1.7.7 a)] $= \frac{2}{\pi}[\frac{1}{5}u^5]_0^1 = \frac{2}{5\pi}$

8. $h_{moy} = \frac{1}{b-a}\int_a^b h(u)du = \frac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^1 (3-2u)^{-1}du = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{1}{3-2u}du = \frac{1}{2}\int_5^1 \frac{1}{y}(-\frac{1}{2}dy)$ $[y = 3-2u,\ dy = -2du]$

$= -\frac{1}{4}\left[\ln|y|\right]_5^1 = -\frac{1}{4}(\ln 1 - \ln 5) = \frac{1}{4}\ln 5$

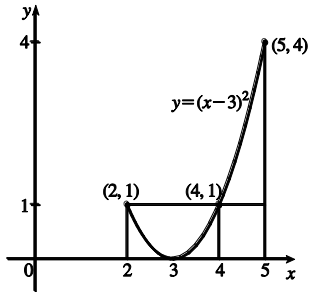
9. a) $f_{moy} = \frac{1}{5-2}\int_2^5 (x-3)^2 dx = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}(x-3)^3\right]_2^5$

$= \frac{1}{9}\left[2^3 - (-1)^3\right] = \frac{1}{9}(8+1) = 1$

b) $f(c) = f_{moy} \Leftrightarrow (c-3)^2 = 1 \Leftrightarrow$

$c-3 = \pm 1 \Leftrightarrow c = 2$ ou 4

c)



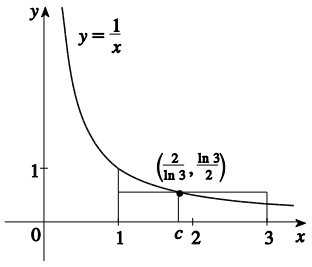
10. a) $f_{moy} = \frac{1}{3-1}\int_1^3 \frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}\left[\ln|x|\right]_1^3$

$= \frac{1}{2}(\ln 3 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 3$

 © Groupe Modulo inc., 2013

b) $f(c) = f_{moy} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{c} = \frac{1}{2}\ln 3 \quad \Leftrightarrow \quad c = 2/\ln 3 \approx 1{,}820$

c)



11. a) $f_{moy} = \dfrac{1}{\pi - 0}\int_0^{\pi}(2\sin x - \sin 2x)dx$

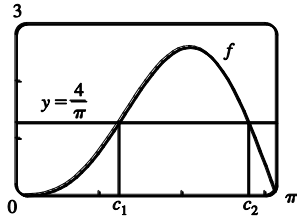
$= \frac{1}{\pi}[-2\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x]_0^{\pi}$

$= \frac{1}{\pi}\left[\left(2 + \frac{1}{2}\right) - \left(-2 + \frac{1}{2}\right)\right] \frac{4}{\pi}$

b) $f(c) = f_{moy} \quad \Leftrightarrow \quad 2\sin c - \sin 2c = \frac{4}{\pi} \quad \Leftrightarrow$

$c_1 \approx 1{,}238$ ou $c_2 \approx 2{,}808$

c)



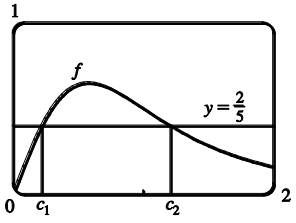
12. a) $f_{\text{moy}} = \dfrac{1}{2-0}\int_0^2 \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}dx$

$= \dfrac{1}{2}\int_1^5 \dfrac{1}{u^2}du \quad [u = 1 + x^2, du = 2xdx]$

$= \dfrac{1}{2}\left[-\dfrac{1}{u}\right]_1^5 = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{5} - 1\right) = \dfrac{2}{5}$

b) $f(c) = f_{moy} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{2c}{(1+c^2)^2} = \dfrac{2}{5} \quad \Leftrightarrow \quad 5c = (1+c^2)^2 \quad \Leftrightarrow \quad c_1 \approx 0{,}220$ ou $c_2 \approx 1{,}207$

c)



13. La fonction f est continue sur l'intervalle [1, 3], donc, selon le théorème de la valeur moyenne pour les intégrales, il existe un nombre c appartenant à [1, 3] tel que $\int_1^3 f(x)dx = f(c)(3-1) \quad \Rightarrow \quad 8 = 2f(c)$; c'est-à-dire qu'il y a un nombre c tel que $f(c) = \frac{8}{2} = 4$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

14. Il est nécessaire que $\frac{1}{b-0}\int_0^b f(x)dx = 3$. Le membre de gauche de cette équation est égal à

$\frac{1}{b}\int_0^b (2+6x-3x^2)dx = \frac{1}{b}[2x+3x^2-x^3]_0^b = 2+3b-b^2$; nous devons donc résoudre l'équation

$2+3b-b^2=3 \quad \Leftrightarrow \quad b^2-3b+1=0 \quad b=\dfrac{3 \pm \sqrt{(-3)^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1} = \dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. Les deux racines sont à retenir puisqu'elles sont toutes deux positives.

15. À l'aide d'interprétations géométriques, évaluez la valeur des intégrales.

$$\begin{aligned}\int_0^8 f(x)dx &= \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx + \int_4^6 f(x)dx + \int_6^7 f(x)dx + \int_7^8 f(x)dx \\ &= -\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+1+4+\tfrac{3}{2}+2 = 9\end{aligned}$$

Il s'ensuit que la valeur moyenne de la fonction *f* sur l'intervalle [0, 8] = $f_{moy} = \frac{1}{8-0}\int_0^8 f(x)dx = \frac{1}{8}(9) = \frac{9}{8}$

16. a) $v_{moy} = \frac{1}{12-0}\int_0^{12} v(t)dt = \frac{1}{12}I$. À l'aide de la méthode des milieux des sous-intervalles, avec $n = 3$ et $\Delta t = \frac{12-0}{3} = 4$, estimez *I*.

$I \approx M_3 = 4[v(2) + v(6) + v(10)] = 4[21 + 50 + 66] = 4(137) = 548$. Donc, $v_{moy} \approx \frac{1}{12}(548) = 45\frac{2}{3}$ km/h.

b) Une estimation directement à partir du graphique donne $v(t) = 45\frac{2}{3}$ lorsque $t \approx 5{,}2$ s.

17. Posons $t = 0$ et $t = 12$ correspondant respectivement à 9 h et 21 h.

$$\begin{aligned}T_{moy} &= \tfrac{1}{12-0}\int_0^{12}[10+8\sin\tfrac{1}{12}\pi t]dt = \tfrac{1}{12}[10t - 8\cdot\tfrac{12}{\pi}\cos\tfrac{1}{12}\pi t]_0^{12} \\ &= \tfrac{1}{12}[10\cdot 12 + 8\cdot\tfrac{12}{\pi} + 8\cdot\tfrac{12}{\pi}] = \left(10+\tfrac{16}{\pi}\right)°C \approx 15{,}1°\text{C}\end{aligned}$$

18. $v_{moy} = \dfrac{1}{R-0}\int_0^R v(r)dr = \dfrac{1}{R}\int_0^R \dfrac{P}{4\eta l}(R^2-r^2)dr = \dfrac{P}{4\eta lR}[R^2r - \tfrac{1}{3}r^3]_0^R = \dfrac{P}{4\eta lR}(\tfrac{2}{3})R^3 = \dfrac{PR^2}{6\eta l}$

Comme la fonction $v(r)$ est décroissante sur l'intervalle $[0, R]$, $v_{\max} = v(0) = \dfrac{PR^2}{4\eta l}$. Il s'ensuit que $v_{moy} = \frac{2}{3}v_{\max}$.

19. $\rho_{moy} = \dfrac{1}{8}\int_0^8 \dfrac{12}{\sqrt{x+1}}dx = \dfrac{3}{2}\int_0^8 (x+1)^{-1/2}dx = [3\sqrt{x+1}]_0^8 = 9-3 = 6$ kg/m

20. a) Nous avons $T_s = 20°\text{C}$ et, par conséquent, $\dfrac{dT}{dt} = c(T-20)$. Soit $y = T - 20$, de sorte que $y(0) = T(0) - 20 = 95 - 20 = 75$. Or, *y* satisfait aux conditions du théorème 3.8.2 (voir *Calcul différentiel*), donc $y = 75e^{ct}$. Puisque $T(30) = 61$, donc

$y(30) = 61 - 20 = 41$ et $41 = 75e^{c(30)} \quad \Rightarrow \quad \frac{41}{75} = e^{30c} \quad \Rightarrow \quad 30c = \ln\frac{41}{75} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{30}\ln\frac{41}{75} \approx -0{,}020\,131$.

Par conséquent, $T(t) = 20 + 75e^{-kt}$, où $k = -c \approx 0{,}02$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

b) $T_{moy} = \frac{1}{30-0}\int_0^{30} T(t)dt = \frac{1}{30}\int_0^{30}(20+75e^{-kt})dt = \frac{1}{30}[20t - \frac{75}{k}e^{-kt}]_0^{30} = \frac{1}{30}[600 - \frac{75}{k}e^{-30k}) - (0 - \frac{75}{k})]$
$= \frac{1}{30}(600 - \frac{75}{k}\cdot\frac{41}{75} + \frac{75}{k}) = \frac{1}{30}(600 + \frac{34}{k}) = 20 + \frac{34}{30k} \approx 76{,}3°\text{C}$

21. $P_{moy} = \frac{1}{50-0}\int_0^{50} P(t)dt = \frac{1}{50}\int_0^{50} 2560e^{bt}dt$ [avec $b = 0{,}017\,185$]
$= \dfrac{2560}{50}\left[\dfrac{1}{b}e^{bt}\right]_0^{50} = \dfrac{2560}{50b}(e^{50b} - 1) \approx 4056$ millions, ou environ 4 milliards de personnes

22. $s = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{2s/g}$ [puisque $t \geq 0$]. Mais, $v = ds/dt = gt = g\sqrt{2s/g} = \sqrt{2gs} \Rightarrow v^2 = 2gs \Rightarrow s = \dfrac{v^2}{2g}$. Nous constatons qu'il est possible de considérer v comme une fonction de t ou de s : $v = F(t) = gt$ et $v = G(s) = \sqrt{2gs}$. Remarquez que $v_T = F(T) = gT$.

La vitesse peut être considérée comme une fonction de t : $s = s(t) = \frac{1}{2}gt^2$; de plus, $s(t) = \dfrac{v^2}{2g} = \dfrac{[F(t)]^2}{2g}$. Lorsque $t = T$, ces deux formules pour $s(t)$ signifient que

$$\sqrt{2gs(T)} = F(T) = vT = gT = 2(\tfrac{1}{2}gT^2)/T = 2s(T)/T \qquad (*)$$

La moyenne des vitesses par rapport au temps t durant l'intervalle $[0, T]$ est

$v_{t-moy} = F_{moy} = \dfrac{1}{T-0}\int_0^T F(t)dt = \dfrac{1}{T}[s(T) - s(0)]$ [selon le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral]
$= \dfrac{s(T)}{T}$ [puisque $s(0) = 0$] $= \dfrac{1}{2}v_T$ [selon (*)]

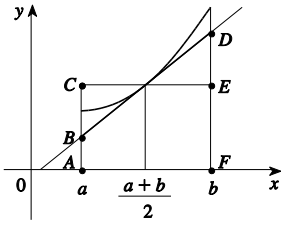
Cependant, la moyenne des vitesses par rapport au déplacement s durant l'intervalle correspondant de déplacement $[s(0), s(T)] = [0, s(T)]$ est

$$v_{s-moy} = G_{moy} = \frac{1}{s(T)-0}\int_0^{s(T)} G(s)ds = \frac{1}{s(T)}\int_0^{s(T)} \sqrt{2gs}\,ds = \frac{\sqrt{2g}}{s(T)}\int_0^{s(T)} s^{1/2}\,ds$$
$$= \frac{\sqrt{2g}}{s(T)}\cdot\frac{2}{3}\left[s^{3/2}\right]_0^{s(T)} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{2g}}{s(T)}\cdot[s(T)]^{3/2} = \frac{2}{3}\sqrt{2gs(T)} = \frac{2}{3}vT \quad \text{[selon (*)]}$$

23. $V_{moy} = \frac{1}{5}\int_0^5 V(t)dt = \frac{1}{5}\int_0^5 \frac{5}{4\pi}[1 - \cos(\frac{2}{5}\pi t)]dt = \frac{1}{4\pi}\int_0^5 [1 - \cos(\frac{2}{5}\pi t)]dt$
$= \frac{1}{4\pi}[t - \frac{5}{2\pi}\sin(\frac{2}{5}\pi t)]_0^5 = \frac{1}{4\pi}\left[(5-0) - 0\right] = \frac{5}{4\pi} \approx 0{,}4$ L

24. $f_{moy} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$
$> \frac{1}{b-a}$(aire du trapèze $ABDF$)
$= \frac{1}{b-a}$(aire du rectangle $ACEF$)
$= \frac{1}{b-a}[f(\frac{a+b}{2})\cdot(b-a)]$
$= f(\frac{a+b}{2})$

 © Groupe Modulo inc., 2013



25. Soit $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ pour x sur l'intervalle $[a, b]$. Alors, la fonction F est continue sur l'intervalle $[a, b]$ et on peut en prendre la dérivée sur cet intervalle; donc, selon le théorème de la valeur moyenne, il existe un nombre c appartenant à $]a, b[$ tel que $F(b) - F(a) = F'(c)(b - a)$. Cependant, $F'(x) = f(x)$ selon le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral. Par conséquent, $\int_a^b f(t)dt - 0 = f(c)(b-a)$.

26. $$f_{moy}\ [a,b]=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{b-a}\int_a^c f(x)dx+\frac{1}{b-a}\int_c^b f(x)dx$$
$$=\frac{c-a}{b-a}\left[\frac{1}{c-a}\int_a^c f(x)dx\right]+\frac{b-c}{b-a}\left[\frac{1}{b-c}\int_c^b f(x)dx\right]=\frac{c-a}{b-a}f_{moy}\ [a,c]+\frac{b-c}{b-a}f_{moy}[c,b]$$

PROJET CONCRET

Le calcul intégral et le baseball

1. a) $F=ma=m\dfrac{dv}{dt}$, donc, selon la méthode du changement de variable, nous obtenons

$$\int_{t_0}^{t_1}F(t)dt=\int_{t_0}^{t_1}m\left(\frac{dv}{dt}\right)dt=m\int_{v_0}^{v_1}dv=[mv]_{v_0}^{v_1}=mv_1-mv_0=p(t_1)-p(t_0)$$

b)

i) Nous avons $v_1=180\text{ km/h}=\frac{180(1\,000)}{3\,600}\text{m/s}=50\text{ m/s}, v_0=-145\text{ km/h}=-40,2\overline{7}\text{ m/s}$, et la masse de la balle de baseball est $m=\dfrac{P}{g}=\dfrac{1,4}{9,8}=\dfrac{1}{7}$. La variation de l'impulsion de la balle est donc

$p(t_1)-p(t_0)=mv_1-mv_0=\frac{1}{7}[50-(-40,2\overline{7})]\approx 12,9\text{ kg-m/s}$.

ii) Aux sous-questions a) et b)i), nous avons trouvé que $\int_0^{0,001}F(t)dt=p(0,001)-p(0)\approx 12,9$, donc la force moyenne sur [0; 0,001] est $\frac{1}{0,001}\int_0^{0,001}F(t)dt\approx\frac{1}{0,001}(12,9)=12\,900\text{ N}$

2. a) $W=\int_{s_0}^{s_1}F(s)ds$, où $F(s)=m\dfrac{dv}{dt}=m\dfrac{dv}{ds}\dfrac{ds}{dt}=mv\dfrac{dv}{ds}$ et donc, selon la méthode du changement de variable,

$$W=\int_{s_0}^{s_1}F(s)ds=\int_{s_0}^{s_1}mv\frac{dv}{ds}ds=\int_{v(s_0)}^{v(s_1)}mvdv=[\tfrac{1}{2}mv^2]_{v_0}^{v_1}=\tfrac{1}{2}mv_1^2-\tfrac{1}{2}mv_0^2$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

b) À la question précédente, on a calculé que 145 km/h = 50 m/s. Considérons $v_0 = v(s_0) = 0$ et $v_1 = v(s_1) = 50$ m/s [remarquez que s_1 est le moment où la balle de baseball est lancée]. $m = \frac{1}{7}$, donc le travail effectué est

$$W = \tfrac{1}{2}mv_1^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{7}\cdot(50)^2 \approx 178{,}6 \text{ J}$$

3. a) Nous avons ici une équation différentielle de la forme $dv/dt = kv$; donc, selon le théorème 3.8.2 (voir dans *Calcul différentiel*), la solution est $v(t) = v(0)e^{kt}$. Dans le cas présent, $k = -\frac{1}{10}$ et $v(0) = 30$ m/s, donc $v(t) = 30e^{-t/10}$. Nous voulons trouver le temps t que prend la balle pour parcourir 85 m; nous trouvons donc la fonction distance ($v(t) > 0$)

$$s(t) = \int_0^t v(x)dx = \int_0^t 30e^{-x/10}dx = 30[-10e^{-x/10}]_0^t = -300(e^{-t/10} - 1) = 300(1 - e^{-t/10})$$

En considérant $s(t) = 85$, et trouvons la valeur de t :

$$85 = 300(1 - e^{-t/10}) \quad \Rightarrow \quad 1 - e^{-t/10} = \tfrac{17}{60} \quad \Rightarrow \quad -\tfrac{1}{10}t = \ln(1 - \tfrac{17}{60}) \quad \Rightarrow \quad t \approx 3{,}331 \text{ secondes.}$$

b) Soit x la distance de l'arrêt-court au marbre. Nous calculons comme une fonction de x le temps que prend la balle pour atteindre le marbre, puis nous prenons la dérivée par rapport à x pour trouver la valeur de x qui correspond au temps minimal. Le temps total que prend la balle pour atteindre le marbre est la somme du temps que prennent les deux lancers, plus le temps du relais ($\frac{1}{2}$s) . La distance entre le voltigeur et l'arrêt-court est $85 - x$, donc pour trouver le temps t_1 que prend le premier lancer, il faut résoudre l'équation $s_1(t_1) = 85 - x \quad \Leftrightarrow \quad 1 - e^{-t_1/10} = \dfrac{85 - x}{300} \quad \Leftrightarrow \quad t_1 = -10 \ln \dfrac{215 + x}{300}$. Nous trouvons le temps t_2 que prend le second lancer en supposant que l'arrêt-court lance à la vitesse w, puisque cette vitesse change dans le reste de l'exercice. Nous posons $v = we^{-t/10}$ et trouvons la valeur de t_2 dans l'équation

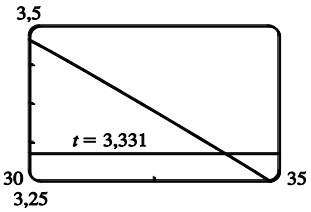
$s(t_2) = 10w(1 - e^{-t_2/10}) = x \quad \Leftrightarrow \quad e^{-t_2/10} = 1 - \dfrac{x}{10w} \quad \Leftrightarrow \quad t_2 = -10 \ln \dfrac{10w - x}{10w}$; le temps total est

donc $t_w(x) = \dfrac{1}{2} - 10\left[\ln \dfrac{215 + x}{300} + \ln \dfrac{10w - x}{10w}\right]$.

Pour trouver le temps minimal, calculons la dérivée : $\dfrac{dt_w}{dx} = -10\left[\dfrac{1}{215 + x} - \dfrac{1}{10w - x}\right]$, qui change de négative à positive lorsque $215 + x = 10w - x \quad \Leftrightarrow \quad x = 5w - 107{,}5$. Selon le test de la dérivée première, t_w atteint un minimum à cette distance de l'arrêt-court au marbre. Donc, si l'arrêt-court lance la balle à $w = 32$ m/s d'un point $x = 5(32) - 107{,}5 = 52{,}5$ m du marbre, le temps minimal est $t_{32}(52{,}5) = \frac{1}{2} - 10(\ln \frac{215 + 52{,}5}{300} + \ln \frac{320 - 52{,}5}{320}) \approx 3{,}489$ secondes. Ce temps est plus long que celui calculé à la sous-question a), donc, dans ce cas, l'entraîneur devrait favoriser un lancer direct. Si $w = 35$ m/s, alors $x = 67{,}5$ m du marbre, et le temps minimal est $t_{35}(67{,}5) = \frac{1}{2} - 10(\ln \frac{215 + 67{,}5}{300} + \ln \frac{350 - 67{,}5}{350}) \approx 3{,}244$ secondes. Ce temps est moins long que celui calculé à la sous-question a), donc, dans ce cas, l'entraîneur devrait favoriser un lancer avec relais.

 © Groupe Modulo inc., 2013

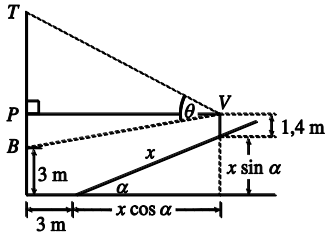
c) En général, le temps minimal est $t_w(5w-107{,}5)=\frac{1}{2}-10\left[\ln\frac{107{,}5+5w}{300}+\ln\frac{107{,}5+5w}{10w}\right]=\frac{1}{2}-10\ln\frac{(w+21{,}5)^2}{120w}$. Nous voulons trouver à quelle vitesse ce temps est égal à environ 3,331 secondes, c'est-à-dire le même temps qu'avec un lancer direct. À partir du graphique, nous évaluons que cela est le cas lorsque $\omega \approx 33{,}8$ m/s. Donc, si l'arrêt-cours peut lancer la balle à cette vitesse, alors un lancer avec relais prend le même temps qu'un lancer direct.



PROJET CONCRET

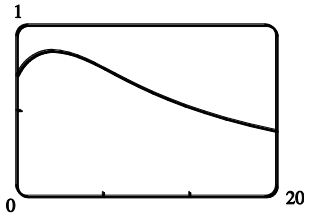
Où vaut-il mieux s'asseoir au cinéma?

1. $|VP| = 3 + x\cos\alpha$, $|PT| = 11 - (1{,}2 + x\sin\alpha) = 9{,}8 - x\sin\alpha$, et $|PB| = (1{,}2 + x\sin\alpha) - 3 = x\sin\alpha - 1{,}8$. Donc, selon le théorème de Pythagore, nous obtenons $|VT| = \sqrt{|VP|^2+|PT|^2} = \sqrt{(3+x\cos\alpha)^2+(9{,}8-x\sin\alpha)^2} = a$ et $|VB| = \sqrt{|VP|^2+|PB|^2} = \sqrt{(3+x\cos\alpha)^2+(x\sin\alpha-1{,}8)^2} = b$.



Si nous appliquons la loi des cosinus au ΔVBT, nous obtenons $8^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{a^2+b^2-64}{2ab} \Leftrightarrow \theta = \arccos\left(\frac{a^2+b^2-64}{2ab}\right)$, ce qu'il fallait démontrer.

2. Le graphique de θ semble montrer que la valeur de x pour laquelle θ est maximal est $x \approx 2{,}4$ m. Si nous considérons que la première rangée est à $x = 0$ m, la rangée la plus près de cette valeur de x est la quatrième rangée, à $x = 3$ m, et le graphique montre que l'angle de vision dans cette rangée semble être à peu près 0,85 radians, ou environ 48,7°.



 © Groupe Modulo inc., 2013

3. Si nous utilisons un logiciel de calcul symbolique, nous saisissons la définition de θ, substituons les valeurs exactes de a et b en fonction de x et $\alpha = 20° = \frac{\pi}{9}$ radians, et obtenons ensuite la dérivée. À l'aide d'un logiciel permettant d'obtenir les racines numériques, nous trouvons que l'unique racine positive de l'équation $d\theta/dx = 0$ est $x \approx 2{,}419\,813\,174$, ce qui corrobore l'estimation graphique obtenue à l'exercice 2.

4. Le graphique de l'exercice 2 semble montrer que la valeur moyenne de la fonction sur l'intervalle [0, 20] est environ 0,6. Nous pouvons utiliser un logiciel de calcul symbolique pour obtenir $\frac{1}{20}\int_0^{20} \theta(x)dx \approx 0{,}616 \approx 35{,}3°$. (Le calcul est fait très rapidement si on effectue une intégration numérique avec l'argument *method*=_d01akc : evalf[15](Int(theta/20,x=0..20, method = _d01akc));) La valeur minimale est $\theta(20) \approx 0{,}36$ et nous avons trouvé à l'exercice 2 que la valeur maximale est environ 0,86.

 © Groupe Modulo inc., 2013

2. Révision

Compréhension des concepts

1. a) Se référer à la figure 2 et aux équations 2.1.1 et 2.1.2, à la section 2.1.

b) Plutôt que d'utiliser « la partie supérieure moins la partie inférieure » et d'effectuer l'intégration avec un découpage vertical, nous utilisons « la partie droite moins la partie gauche » et effectuons l'intégration avec un découpage horizontal. Se référer aux figures 11 et 12 à la section 2.1.

2. La valeur numérique de l'aire représente la longueur en mètres de l'avance de Suzanne sur Karine après une minute.

3. a) Se référer à l'analyse qui apparaît à la section 2.2, près des figures 2 et 3, et qui se termine par la sous-section « Définition du volume ».

b) Se référer à l'analyse qui apparaît entre les exemples 5 et 6 de la section 2.2. Si la section transversale est un disque, on trouve le rayon en fonction de x ou de y et on utilise $A = \pi(\text{rayon})^2$. Si la section transversale est un disque troué, on trouve le rayon interne r_{int} et le rayon externe r_{ext} et on utilise $A = \pi(r_{ext}^2) - \pi(r_{\text{int}}^2)$.

4. a) $V = 2\pi rh\,\Delta r$ = (circonférence)(hauteur)(épaisseur)

b) Pour une coquille cylindrique type, on trouve la circonférence et la hauteur en fonction de x ou de y et on calcule

$V = \int_a^b$ (circonférence)(hauteur)(dx ou dy), où a et b sont les bornes sur x ou y.

c) La méthode du découpage produit parfois des disques ou des disques troués dont les rayons sont difficiles, voire impossibles, à déterminer de façon explicite. Dans d'autres cas, la méthode des coquilles cylindriques permet de calculer une intégrale d'une façon plus simple que la méthode du découpage.

5. L'intégrale $\int_0^6 f(x)dx$ représente la quantité de travail effectué. Ses unités sont des newtons-mètres, ou joules.

6. a) La valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle $[a, b]$ est $f_{moy} = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

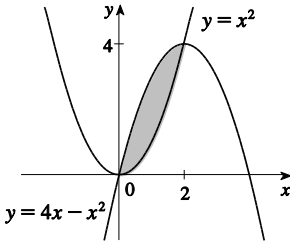
b) Le théorème de la valeur moyenne pour les intégrales stipule qu'il existe un nombre c auquel la valeur de f est exactement égale à la valeur moyenne de la fonction, c'est-à-dire $f(c) = f_{\text{moy}}$. Pour une interprétation géométrique du théorème de la valeur moyenne, se référer à la figure 2 de la section 2.5 et à l'analyse qui l'accompagne.

 © Groupe Modulo inc., 2013

Exercices récapitulatifs

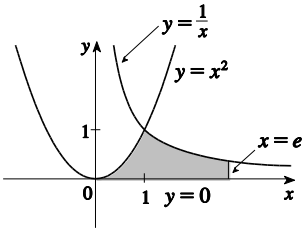
1. Les courbes se croisent lorsque $x^2 = 4x - x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 4x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x(x-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ ou 2.

$$A = \int_0^2 [(4x - x^2) - x^2]\,dx = \int_0^2 (4x - 2x^2)\,dx$$
$$= [2x^2 - \tfrac{2}{3}x^3]_0^2 = [(8 - \tfrac{16}{3}) - 0] = \tfrac{8}{3}$$



2. Les courbes $y = 1/x$ et $y = x^2$ se croisent lorsque $1/x = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$.

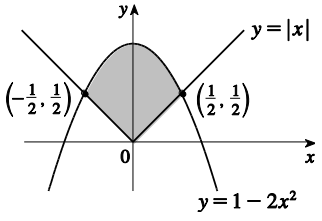
$$A = \int_0^1 (x^2 - 0)\,dx + \int_1^e \left(\frac{1}{x} - 0\right) dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 + \left[\ln\,|x|\right]_1^e$$
$$= (\tfrac{1}{3} - 0) + (1 - 0) = \tfrac{4}{3}$$



3. Si $x \geq 0$, alors $|x| = x$ et les courbes se croisent lorsque $x = 1 - 2x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 + x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2x-1)(x+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \tfrac{1}{2}$ ou -1,

mais $-1 < 0$. Par symétrie, nous pouvons doubler l'aire entre $x = 0$ et $x = \tfrac{1}{2}$.

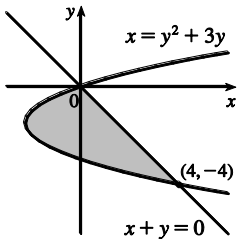
$$A = 2\int_0^{1/2} [(1 - 2x^2) - x]\,dx = 2\int_0^{1/2} (-2x^2 - x + 1)\,dx$$
$$= 2[-\tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + x]_0^{1/2} = 2[(-\tfrac{1}{12} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{2}) - 0]$$
$$= 2\left(\tfrac{7}{24}\right) = \tfrac{7}{12}$$



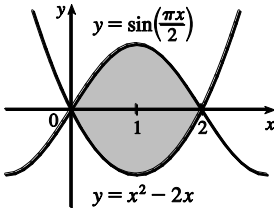
4. $y^2 + 3y = -y \quad \Leftrightarrow \quad y^2 + 4y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y(y+4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0$ ou -4.

 © Groupe Modulo inc., 2013

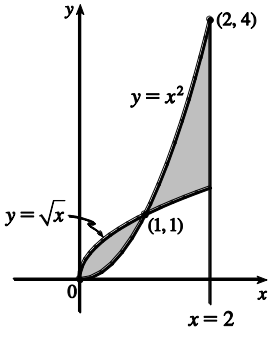
$$A = \int_{-4}^{0} [-y - (y^2 + 3y)]\, dy = \int_{-4}^{0} -4(-y^2 - 4y)dy$$
$$= [-\tfrac{1}{3}y^3 - 2y^2]_{-4}^{0} = 0 - (\tfrac{64}{3} - 32) = \tfrac{32}{3}$$



5. $$A = \int_0^2 \left[\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) - (x^2 - 2x) \right] dx$$
$$= \left[-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^2$$
$$= \left(\tfrac{2}{\pi} - \tfrac{8}{3} + 4\right) - (-\tfrac{2}{\pi} - 0 + 0) = \tfrac{4}{3} + \tfrac{4}{\pi}$$



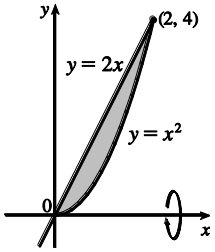
6. $$A = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)dx + \int_1^2 \left(x^2 - \sqrt{x}\right)dx$$
$$= \left[\tfrac{2}{3}x^{3/2} - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^1 + \left[\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{2}{3}x^{3/2}\right]_1^2$$
$$= \left[\left(\tfrac{2}{3}\right) - \tfrac{1}{3}\right] - 0] + [(\tfrac{8}{3} - \tfrac{4}{3}\sqrt{2}) - (\tfrac{1}{3} - \tfrac{2}{3})]$$
$$= \tfrac{10}{3} - \tfrac{4}{3}\sqrt{2}$$



7. Si nous utilisons des disques troués dont le rayon interne est x^2 et le rayon externe $2x$, nous obtenons

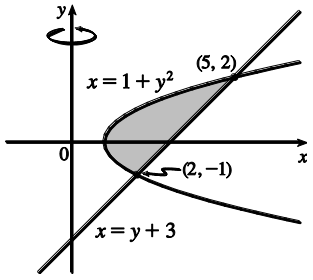
$$V = \pi \int_0^2 \left[[(2x)^2 - (x^2)^2] \right] dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - x^4)dx$$
$$= \pi[\tfrac{4}{3}x^3 - \tfrac{1}{5}x^5]_0^2 = \pi(\tfrac{32}{3} - \tfrac{32}{5})$$
$$= 32\pi \cdot \tfrac{2}{15} = \tfrac{64}{15}\pi$$

 © Groupe Modulo inc., 2013



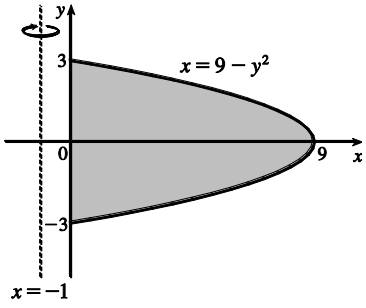
8. $1+y^2 = y+3 \iff y^2-y-2=0 \iff (y-2)(y+1)=0 \iff y=2 \text{ ou } -1.$

$$V = \pi\int_{-1}^{2}[(y+3)^2-(1+y^2)^2]dy = \pi\int_{-1}^{2}(y^2+6y+9-1-2y^2-y^4)dy$$
$$= \pi\int_{-1}^{2}(8+6y-y^2-y^4)dy = \pi[8y+3y^2-\tfrac{1}{3}y^3-\tfrac{1}{5}y^5]_{-1}^{2}$$
$$= \pi[(16+12-\tfrac{8}{3}-\tfrac{32}{5})-(-8+3+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5})] = (33-\tfrac{9}{3}-\tfrac{33}{5}) = \tfrac{117}{5}\pi$$



9. $V = \pi\int_{-3}^{3}\left\{[(9-y^2)-(-1)]^2-\left[0-(-1)\right]^2\right\}dy$

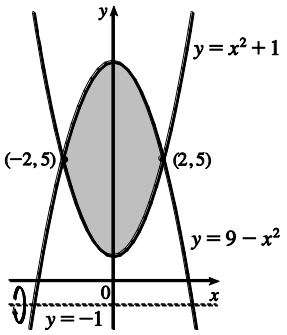
$$= 2\pi\int_{0}^{3}[(10-y^2)^2-1]\,dy = 2\pi\int_{0}^{3}(100-20y^2+y^4-1)\,dy$$
$$= 2\pi\int_{0}^{3}(99-20y^2+y^4)dy = 2\pi[99y-\tfrac{20}{3}y^3+\tfrac{1}{5}y^5]_{0}^{3}$$
$$= 2\pi(297-180+\tfrac{243}{5}) = \tfrac{1656}{5}\pi$$



10. $V = \pi\int_{-2}^{2}\left\{[(9-x^2)-(-1)]^2-[(x^2+1)-(-1)]^2\right\}dx$

$$= \pi\int_{-2}^{2}[(10-x^2)^2-(x^2+2)^2]dx$$
$$= 2\pi\int_{0}^{2}(96-24x^2)dx = 48\pi\int_{0}^{2}(4-x^2)dx$$
$$= 48\pi[4x-\tfrac{1}{3}x^3]_{0}^{2} = 48\pi(8-\tfrac{8}{3}) = 256\pi$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

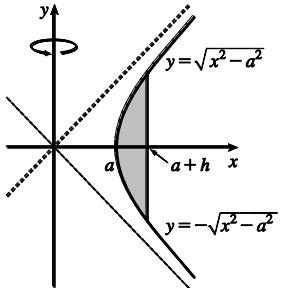


11. Le graphique de $x^2 - y^2 = a^2$ est une hyperbole avec une branche droite et une branche gauche. Si nous calculons la valeur de y, nous obtenons $y^2 = x^2 - a^2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{x^2 - a^2}$.

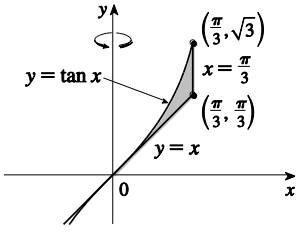
Nous utiliserons des coquilles cylindriques dont la hauteur est $\sqrt{x^2 - a^2} \ -(-\sqrt{x^2 - a^2}) = 2\sqrt{x^2 - a^2}$.

Le volume est $V = \int_a^{a+h} 2\pi x \cdot 2\sqrt{x^2 - a^2}\,dx$. Pour l'évaluer, posons $u = x^2 - a^2$, donc $du = 2x\,dx$ et $xdx = \frac{1}{2}du$. Lorsque $x = a$, $u = 0$, et lorsque $x = a + h$, $u = (a + h)^2 - a^2 = a^2 + 2ah + h^2 - a^2 = 2ah + h^2$.

Il s'ensuit que $V = 4\pi\int_0^{2ah+h^2} \sqrt{u}\left(\frac{1}{2}du\right) = 2\pi\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_0^{2ah+h^2} = \frac{4}{3}\pi(2ah + h^2)^{3/2}$.



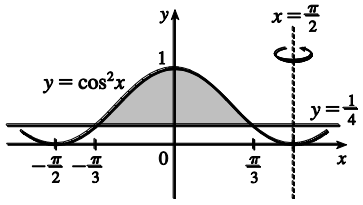
12. Une coquille cylindrique est de rayon x, de circonférence $2\pi x$ et de hauteur $\tan x - x$. $V = \int_0^{\pi/3} 2\pi x(\tan x - x)dx$.



13. Une coquille cylindrique est de rayon $\frac{\pi}{2} - x$, de circonférence $2\pi(\frac{\pi}{2} - x)$ et de hauteur $\cos^2 x - \frac{1}{4}$. $y = \cos^2 x$ croise $y = \frac{1}{4}$ lorsque $\cos^2 x = \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = \pm\frac{1}{2} \quad [|\,x\,| \leq \pi/2] \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{\pi}{3}$.

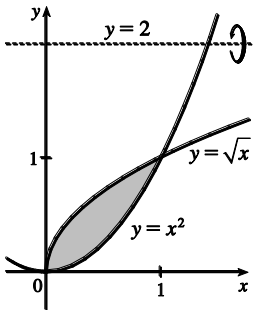
$$V = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} 2\pi\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\left(\cos^2 x - \frac{1}{4}\right)dx$$

 © Groupe Modulo inc., 2013



14. Un disque troué a un rayon externe de $2 - x^2$ et un rayon interne de $2 - \sqrt{x}$.

$$V = \int_0^1 \pi\left[(2-x^2)^2 - (2-\sqrt{x})^2\right]dx$$



15. a) Une section transversale est un disque trouédont le rayon interne est x^2 et le rayon externe x.

$$V = \int_0^1 \pi[(x)^2 - (x^2)^2]dx = \int_0^1 \pi(x^2 - x^4)dx = \pi[\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{5}x^5]_0^1 = \pi[\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5}] = \tfrac{2}{15}\pi$$

b) Une section transversale est un disque troué dont le rayon interne est y et le rayon externe $\sqrt{y}$.

$$V = \int_0^1 \pi\left[\left(\sqrt{y}\right)^2 - y^2\right]dy = \int_0^1 \pi(y - y^2)dy = \pi[\tfrac{1}{2}y^2 - \tfrac{1}{3}y^3]_0^1 = \pi[\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}] = \tfrac{\pi}{6}$$

c) Une section transversale est un disque troué dont le rayon interne est $2 - x$ et le rayon externe $2 - x^2$.

$$V = \int_0^1 \pi[(2-x^2)^2 - (2-x)^2]dx = \int_0^1 \pi(x^4 - 5x^2 + 4x)dx = \pi[\tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{5}{3}x^3 + 2x^2]_0^1 = \pi[\tfrac{1}{5} - \tfrac{5}{3} + 2] = \tfrac{8}{15}\pi$$

16. a) $A = \int_0^1 (2x - x^2 - x^3)dx = [x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4]_0^1 = 1 - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{5}{12}$

b) Une section transversale est un disque troué dont le rayon interne est x^3 et le rayon externe $2x - x^2$; son aire est donc $\pi(2x - x^2)^2 - \pi(x^3)^2$.

$$V = \int_0^1 A(x)dx = \int_0^1 \pi[(2x-x^2)^2 - (x^3)^2]dx = \int_0^1 \pi(4x^2 - 4x^3 + x^4 - x^6)dx$$
$$= \pi[\tfrac{4}{3}x^3 - x^4 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7]_0^1 = \pi(\tfrac{4}{3} - 1 + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7}) = \tfrac{41}{105}\pi$$

c) Si on utilise la méthode des coquilles cylindriques,

$$V = \int_0^1 2\pi x(2x - x^2 - x^3)dx = \int_0^1 2\pi(2x^2 - x^3 - x^4)dx = 2\pi[\tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{5}x^5]_0^1 = 2\pi(\tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5}) = \tfrac{13}{30}\pi .$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

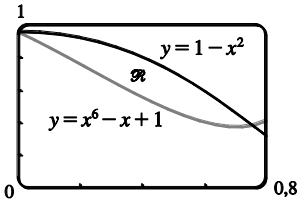
17. a) Si nous utilisons la méthode des milieux des sous-intervalles sur l'intervalle [0, 1] avec $f(x) = \tan(x^2)$ et $n = 4$, nous évaluons

$$A = \int_0^1 \tan(x^2)dx \approx \tfrac{1}{4}\left[\tan\left((\tfrac{1}{8})^2\right) + \tan\left(\left(\tfrac{3}{8}\right)^2\right) + \tan\left(\left(\tfrac{5}{8}\right)^2\right) + \tan\left(\left(\tfrac{7}{8}\right)\right)^2\right] \approx \tfrac{1}{4}(1{,}53) \approx 0{,}38$$

b) Si nous utilisons la méthode des milieux des sous-intervalles sur l'intervalle [0, 1] avec $f(x) = \pi \tan^2(x^2)$ (pour les disques) et $n = 4$, nous évaluons

$$V = \int_0^1 f(x)dx \approx \tfrac{1}{4}\pi\left[\tan^2\left((\tfrac{1}{8})\right)^2 + \tan^2\left((\tfrac{3}{8})\right)^2 + \tan^2\left((\tfrac{5}{8})^2\right) + \tan^2\left((\tfrac{7}{8})\right)^2\right] \approx \tfrac{\pi}{4}(1{,}114) \approx 0{,}87$$

18. a)



Le graphique montrer que les courbes se croisent en $x = 0$ et en $x = a \approx 0{,}75$, avec $1 - x^2 > x^6 - x + 1$ sur l'intervalle $[0, a]$.

b) L'aire de $\mathscr{R}$ est $A = \int_0^a [(1 - x^2) - (x^6 - x + 1)]dx = [-\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{1}{2}x^2]_0^a \approx 0{,}12$.

c) Si nous utilisons des disques troués, le volume du solide résultant de la rotation de $\mathscr{R}$ autour de l'axe des x est

$$V = \pi\int_0^a [(1 - x^2)^2 - (x^6 - x + 1)^2]dx = \pi\int_0^a (-x^{12} + 2x^7 - 2x^6 + x^4 - 3x^2 + 2x)dx$$
$$= \pi[-\tfrac{1}{13}x^{13} + \tfrac{1}{4}x^8 - \tfrac{2}{7}x^7 + \tfrac{1}{5}x^5 - x^3 + x^2]_0^a \approx 0{,}54$$

d) Si nous utilisons des coquilles cylindriques, le volume du solide résultant de la rotation de $\mathscr{R}$ autour de l'axe des y est

$$V = \int_0^a 2\pi x[(1 - x^2) - (x^6 - x + 1)]dx = 2\pi\int_0^a (-x^3 - x^7 + x^2)\,dx = 2\pi[-\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{1}{8}x^8 + \tfrac{1}{3}x^3]_0^a \approx 0{,}31 .$$

19. $\int_0^{\pi/2} 2\pi x\cos x\,dx = \int_0^{\pi/2} (2\pi x)\cos x\,dx$

Le solide résulte de la rotation de la région $\mathscr{R} = \left\{(x, y) | 0 \le x \le \tfrac{\pi}{2}, 0 \le y \le \cos x\right\}$ autour de l'axe des y.

20. $\int_0^{\pi/2} 2\pi\cos^2 x\,dx = \int_0^{\pi/2} \pi(\sqrt{2}\cos x)^2\,dx$

Le solide résulte de la rotation de la région $\mathscr{R} = \left\{(x, y) | 0 \le x \le \tfrac{\pi}{2}, 0 \le y \le \sqrt{2\cos x}\right\}$ autour de l'axe des x.

21. $\int_0^{\pi} \pi(2 - \sin x)^2 dx$

Le solide résulte de la rotation de la région $\mathscr{R} = \{(x, y) \mid 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le 2 - \sin x\}$ autour de l'axe des x.

22. $\int_0^4 2\pi(6 - y)(4y - y^2)dy$

Le solide résulte de la rotation de la région $\mathscr{R} = \left\{(x, y) | 0 \le x \le 4y - y^2, 0 \le y \le 4\right\}$ autour de la droite $y = 6$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

23. Considérons que la base est le disque $x^2 + y^2 \le 9$. Alors, $V = \int_{-3}^{3} A(x)dx$, où $A(x_0)$ est l'aire du triangle rectangle isocèle dont l'hypoténuse repose le long de la droite $x = x_0$ dans le plan xy. La longueur de l'hypoténuse est $2\sqrt{9-x^2}$ et la longueur de chaque cathète est $\sqrt{2}\sqrt{9-x^2}$. $A(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{2}\sqrt{9-x^2})^2 = 9 - x^2$, donc

$$V = 2\int_0^3 A(x)dx = 2\int_0^3 (9-x^2)dx = 2[9x - \tfrac{1}{3}x^3]_0^3 = 2\left(27-9\right) = 36$$

24. $V = \int_{-1}^{1} A(x)dx = 2\int_0^1 A(x)dx = 2\int_0^1 [(2-x^2)-x^2]^2 dx = 2\int_0^1 [2(1-x^2)]^2 dx$

$= 8\int_0^1 (1-2x^2+x^4)\,dx = 8[x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5]_0^1 = 8(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}) = \frac{64}{15}$

25. Des triangles équilatéraux dont les côtés mesurent $\frac{1}{4}x$ mètres ont une hauteur de $\frac{1}{4}x\sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{8}x$. Par conséquent, $A(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}x\cdot\frac{\sqrt{3}}{8}8x = \frac{\sqrt{3}}{64}x^2$. $V = \int_0^{20} A(x)dx = \frac{\sqrt{3}}{64}\int_0^{20} x^2dx = \frac{\sqrt{3}}{64}[\frac{1}{3}x^3]_0^{20} = \frac{8000\sqrt{3}}{64\cdot 3} = \frac{125\sqrt{3}}{3}\,\text{m}^3$.

26. a) Étant donné la symétrie du solide, nous ne considérerons que la partie à la droite de l'origine. Les sections transversales demi-circulaires perpendiculaires à l'axe des x sont de rayon $1 - x$, donc $A(x) = \frac{1}{2}\pi(1-x)^2$. Nous pouvons maintenant évaluer

$V = 2\int_0^1 A(x)dx = 2\int_0^1 \frac{1}{2}\pi(1-x)^2 dx = \int_0^1 \pi(1-x)^2 dx = -\frac{\pi}{3}[(1-x)^3]_0^1 = \frac{\pi}{3}$.

b) Sectionnez le solide à l'aide d'un plan perpendiculaire à l'axe des x passant au-travers de l'axe des y. Pliez la moitié du solide située dans la partie négative de l'axe des x sous le plan xy de sorte que le point (–1, 0) revienne par en-arrière et se superpose le point (1, 0). Le solide qui en résulte est un cône droit à base circulaire de rayon 1 dont le sommet est à $(x, y, z) = (1, 0, 0)$ et dont la base est située dans le plan yz et a son centre à l'origine. Le volume de ce cône est $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\cdot 1^2\cdot 1 = \frac{\pi}{3}$.

27. $f(x) = kx \;\Rightarrow\; 30\text{ N} = k\left(15-12\right)\text{cm} \;\Rightarrow\; k = 10\text{N/cm} = 1000\text{N/m}$.

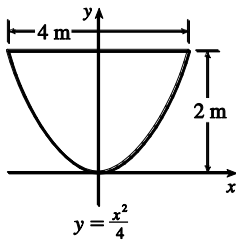
$20\text{ cm} - 12\text{ cm} = 0{,}08\text{ m} \;\Rightarrow\; W = \int_0^{0{,}08} kx dx = 1000\int_0^{0{,}08} x dx = 500[x^2]_0^{0{,}08} = 500(0{,}08)^2 = 3{,}2\text{ N}\cdot\text{m} = 3{,}2\text{ J}$.

28. Le travail requis pour hisser l'ascenseur lui-même est 70 kg × 10 m × 9,8 = 6860 J. Le travail requis pour hisser les 50 m inférieurs du câble est 50 m × 10 kg/m × 10 m × 9,8 = 49 000 J. Le travail requis pour hisser les 10 m supérieurs du câble est $\int_0^{10} 9{,}8\times 10x dx = 9{,}8[5x^2]_0^{10} = 9{,}8\left[5\cdot 100\right] = 4900\text{ J}$. En additionnant ces trois résultats, nous constatons que le travail total requis est 6860 + 49 000 + 4900 = 60 760 J.

 © Groupe Modulo inc., 2013

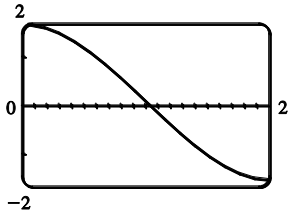
29. a) La parabole dont l'équation $y = ax^2$ a son sommet à l'origine et passe par le point $(2,2)$. Ainsi, $2 = a \cdot 2^2 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow x^2 = 2y \Rightarrow x = \sqrt{2y}$. Chaque disque a un rayon de $\sqrt{2y}$ et est déplacé de $2 - y$ m.

$$W = \int_0^2 \pi(\sqrt{2y})^2(1000 \times 9{,}8)(2-y)dy = 19\,600\pi\int_0^2 y(2-y)dy$$
$$= 19\,600\pi[y^2 - \tfrac{1}{3}y^3]_0^2 = 19\,600\pi\left(4 - \tfrac{8}{3}\right) = \tfrac{78\,400\pi}{3} \approx 82\,100 \text{ J}$$



b) À la sous-question a), nous connaissions le niveau final de l'eau (0) mais non la quantité de travail effectuée. Nous utiliserons ici la même équation, sauf que la quantité de travail est connue, et la borne inférieure d'intégration (c'est-à-dire le niveau final de l'eau, que nous appellerons h) est inconnue :

$W = 40\,000 \Leftrightarrow 19\,600\pi[y^2 - \frac{1}{3}y^3]_h^2 = 40\,000 \Leftrightarrow \frac{100}{49\pi} = [(4 - \frac{8}{3}) - (h^2 - \frac{1}{3}h^3)] \Leftrightarrow h^3 - 3h^2 + 4 - \frac{300}{49\pi} = 0$. Traçons la fonction $f(h) = h^3 - 3h^2 + 4 - \frac{300}{49\pi}$ sur l'intervalle [0, 2] pour voir à quel point sa valeur est 0. Le graphique montre que $f(h) = 0$ pour $h \approx 1{,}0$. Le niveau de l'eau restant dans le réservoir est donc d'environ 1,0 m.



30. $f_{moy} = \frac{1}{10-0}\int_0^{10} t\sin(t^2)\,dt = \frac{1}{10}\int_0^{100} \sin u(\frac{1}{2}du) \quad [u = t^2, du = 2t\,dt]$
$= \frac{1}{20}\left[-\cos u\right]_0^{100} = \frac{1}{20}(-\cos 100 + \cos 0) = \frac{1}{20}(1 - \cos 100) \approx 0{,}007$

31. $\lim\limits_{h\to 0} f_{moy} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{(x+h)-x}\displaystyle\int_x^{x+h} f(t)dt = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$, où $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Nous reconnaissons cependant que cette limite est $F'(x)$, (définition de la dérivée). Par conséquent, $\lim\limits_{h\to 0} f_{moy} = F'(x) = f(x)$ selon le TFC1.

 © Groupe Modulo inc., 2013

32. a) $\mathscr{R}_1$ est la région sous la courbe de $y = x^2$ et au-dessus de l'axe des x entre $x = 0$ et $x = b$ et $\mathscr{R}_2$ est la région à la gauche de la courbe de $x = \sqrt{y}$ et à la droite de l'axe des y entre $y = 0$ et $y = b^2$. L'aire de $\mathscr{R}_1$ est donc $A_1 = \int_0^b x^2 dx = [\frac{1}{3}x^3]_0^b = \frac{1}{3}b^3$ et l'aire de $\mathscr{R}_2$ est $A_2 = \int_0^{b^2} \sqrt{y}\ dy = \left[\frac{2}{3}y^{3/2}\right]_0^{b^2} = \frac{2}{3}b^3$. Il n'y a donc aucune solution à $A_1 = A_2$ pour $b \neq 0$.

b) Si nous utilisons des disques (découpage vertical), nous trouvons que le volume résultant de la rotation de $\mathscr{R}_1$ autour de l'axe des x est $V_{1,x} = \pi\int_0^b (x^2)^2 dx = \frac{1}{5}\pi b^5$. Si nous utilisons des coquilles cylindriques, nous trouvons que le volume résultant de la rotation de $\mathscr{R}_1$ autour de l'axe des y est $V_{1,y} = 2\pi\int_0^b x(x^2)dx = 2x[\frac{1}{4}x^4]_0^b = \frac{1}{2}\pi b^4$.

Puisque, $V_{1,x} = V_{1,y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{5}\pi b^5 = \frac{1}{2}\pi b^4 \quad \Leftrightarrow \quad 2b = 5 \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{5}{2}$. Les volumes résultant de la rotation autour des axes des x et des y sont donc les mêmes pour $b = \frac{5}{2}$

c) Nous utilisons des coquilles cylindriques pour trouver le volume résultant de la rotation de $\mathscr{R}_2$ autour de l'axe des x :

$\mathscr{R}_{2,x} = 2\pi\int_0^{b^2} y\left(\sqrt{y}\right)dy = 2\pi\left[\frac{2}{5}y^{5/2}\right]_0^{b^2} = \frac{4}{5}\pi b^5$. Nous avons déjà calculé le volume résultant de la rotation de $\mathscr{R}_1$ autour de l'axe des x à la sous-question b). Alors, $\mathscr{R}_{1x} = \mathscr{R}_{2,x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{5}\pi b^5 = \frac{4}{5}\pi b^5$, qui n'a aucune solution pour $b \neq 0$.

d) Nous utilisons des disques (découpage horizontal) pour trouver le volume résultant de la rotation de $\mathscr{R}_2$ autour de l'axe des y :

$\mathscr{R}_{2,y} = \pi\int_0^{b^2} \left(\sqrt{y}\right)^2 dy = \pi[\frac{1}{2}y^2]_0^{b^2} = \frac{1}{2}\pi b^4$ Nous avons déjà calculé le volume résultant de la rotation de $\mathscr{R}_1$ autour de l'axe des y à la sous-question b). Alors, $\mathscr{R}_{1,y} = \mathscr{R}_{2,y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\pi b^4 = \frac{1}{2}\pi b^4$. Cette équation est cependant vraie pour tout b; les volumes résultant de la rotation autour de l'axe des y sont donc égaux pour toutes les valeurs de b.

Problèmes supplémentaires

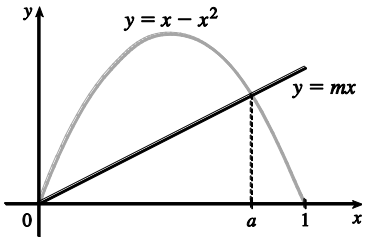
---

1. a) L'aire de la région sous la courbe de la fonction f entre 0 et t est égale à $\int_0^t f(x)\ dx$; il est donc nécessaire que $\int_0^t f(x)\ dx = t^3$ pour tout t. Nous prenons la dérivée de chaque membre de cette équation par rapport à t (selon le TFC1) et obtenons $f(t) = 3t^2$. Cette fonction est positive et continue, tel que demandé.

b) Le volume généré entre $x = 0$ et $x = b$ est $\int_0^b \pi[f(x)]^2\ dx$. Il s'ensuit, selon les données de l'exercice, que $b^2 = \int_0^b \pi[f(x)]^2\ dx$ pour tout $b > 0$. Dérivons chaque membre de cette équation par rapport à b, à l'aide du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral. Nous obtenons $2b = \pi[f(b)]^2 \quad \Rightarrow \quad f(b) = \sqrt{2b/\pi}$, puisque la fonction f est positive. Par conséquent, $f(x) = \sqrt{2x/\pi}$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

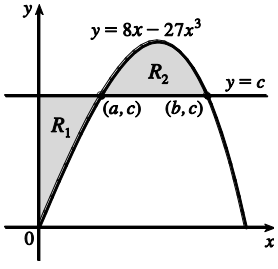
2. L'aire totale de la région délimitée par la parabole $y = x - x^2 = x(1-x)$, et l'axe des x est $\int_0^1 (x-x^2)dx = [\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3]_0^1 = \frac{1}{6}$. Soit m la pente de la droite que nous recherchons. L'aire au-dessus de cette droite mais sous la parabole est alors $\int_0^a [(x-x^2) - mx]\,dx$, où a est la coordonnée sur l'axe des x du point d'intersection de la droite et de la parabole. Pour identifier le point d'intersection, il nous faut trouver la solution de l'équation $x - x^2 = mx \iff 1 - x = m \iff x = 1 - m$. La valeur de a est donc $1 - m$ et



$$\int_0^{1-m} [(x-x^2) - mx]\,dx = \int_0^{1-m} [(1-m)x - x^2]\,dx = [\tfrac{1}{2}(1-m)x^2 - \tfrac{1}{3}x^3]_0^{1-m}$$
$$= \tfrac{1}{2}(1-m)(1-m)^2 - \tfrac{1}{3}(1-m)^3 = \tfrac{1}{6}(1-m)^3$$

Puisque cette aire est la moitié de l'aire totale, soit $\frac{1}{6}$, alors $\frac{1}{6}(1-m)^3 = \frac{1}{12} \iff (1-m)^3 = \frac{6}{12} \iff 1 - m = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \iff m = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. La pente de la droite désirée est donc $1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx 0,206$.

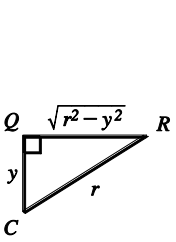
3. Soient a et b les abscisses des points où la droite coupe la courbe. La figure montre que $R_1 = R_2 \implies$

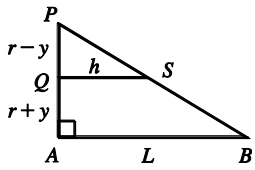


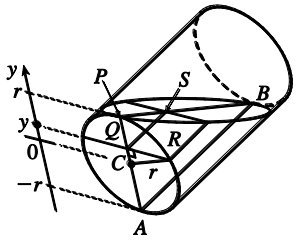
$$\int_0^a [c - (8x - 27x^3)]\,dx = \int_a^b [(8x - 27x^3) - c]\,dx$$
$$[cx - 4x^2 + \tfrac{27}{4}x^4]_0^a = [4x^2 - \tfrac{27}{4}x^4 - cx]_a^b$$
$$ac - 4a^2 + \tfrac{27}{4}a^4 = (4b^2 - \tfrac{27}{4}b^4 - bc) - (4a^2 - \tfrac{27}{4}a^4 - ac)$$
$$0 = 4b^2 - \tfrac{27}{4}b^4 - bc = 4b^2 - \tfrac{27}{4}b^2 - b(8b - 27b^3)$$
$$= 4b^2 - \tfrac{27}{4}b^4 - 8b^2 + 27b^4 = \tfrac{81}{4}b^4 - 4b^2$$
$$= b^2(\tfrac{81}{4}b^2 - 4)$$

Donc, pour $b > 0$, $b^2 = \frac{16}{81} \implies b = \frac{4}{9}$. Il s'ensuit que $c = 8b - 27b^3 = 8(\frac{4}{9}) - 27(\frac{64}{729}) = \frac{32}{9} - \frac{64}{27} = \frac{32}{27}$.

4. a) Sectionnez selon des « tranches » perpendiculaires à la droite passant par le centre C de la base du verre et le point P où la surface supérieure de l'eau touche la base du verre.



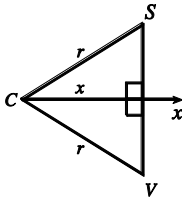


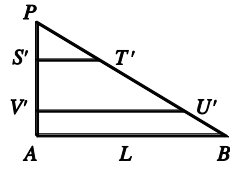


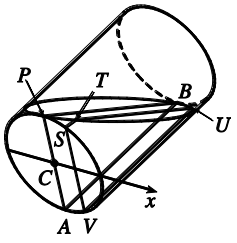
Une section transversale rectangulaire représentative située à y unités au-dessus de l'axe du verre est de largeur $2|QR| = 2\sqrt{r^2 - y^2}$ et de hauteur $h = |QS| = \frac{L}{2r}(r - y)$. [Les triangles PQS et PAB sont semblables, donc $\frac{h}{L} = \frac{|PQ|}{|PA|} = \frac{r - y}{2r}$.] Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - y^2} \cdot \frac{L}{2r}(r - y)\, dy = L\int_{-r}^{r}\left(1 - \frac{y}{r}\right)\sqrt{r^2 - y^2}\, dy \\ &= L\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2 - y^2}\, dy - \frac{L}{r}\int_{-r}^{r} y\sqrt{r^2 - y^2}\, dy \\ &= L \cdot \frac{\pi r^2}{2} - \frac{L}{r} \cdot 0 \quad \left[\begin{array}{l}\text{la première intégrale représente l'aire d'un demi-cercle de rayon } r, \\ \text{et la seconde a une intégrande impaire.}\end{array}\right] = \frac{\pi r^2 L}{2} \end{aligned}$$

b) Sectionnez selon des « tranches » parallèles au plan qui coupe l'axe du verre et le point de contact P. (Il s'agit ici du plan déterminé par P, B et C dans la figure.) La section $STUV$ obtenue est un trapèze. Par rapport à un axe des x dont l'origine est C tel qu'il est montré à la figure, si x est l'abscisse de S et V est x, alors $|SV| = 2\sqrt{r^2 - x^2}$. En projetant le trapèze $STUV$ sur le plan du triangle PAB (appelons la projection $S'T'U'V'$), nous constatons que $|AP| = 2r$, $|SV| = 2\sqrt{r^2 - x^2}$ et que $|S'P| = |V'A| = \frac{1}{2}(|AP| - |SV|) = r - \sqrt{r^2 - x^2}$.







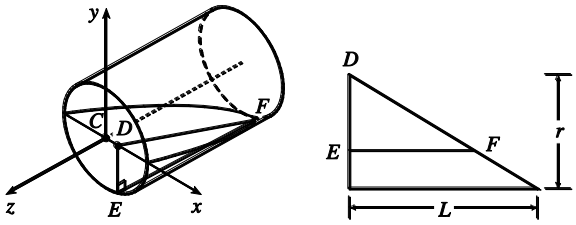
Selon les propriétés des triangles semblables, $\frac{|ST|}{|S'P|} = \frac{|AB|}{|AP|}$, donc $|ST| = (r - \sqrt{r^2 - x^2}) \cdot \frac{L}{2r}$. De la même façon, nous trouvons que $\frac{|VU|}{|V'P|} = \frac{|AB|}{|AP|}$, donc $|VU| = |V'P| \cdot \frac{L}{2r} = (|AP| - |V'A|) \cdot \frac{L}{2r} = (r + \sqrt{r^2 - x^2}) \cdot \frac{L}{2r}$. L'aire $A(x)$ du trapèze $STUV$ est $\frac{1}{2}|SV| \cdot (|ST| + |VU|)$; c'est-à-dire que $A(x) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{r^2 - x^2} \cdot \left[(r - \sqrt{r^2 - x^2}) \cdot \frac{L}{2r} + (r + \sqrt{r^2 - x^2}) \cdot \frac{L}{2r}\right] = L\sqrt{r^2 - x^2}$. Il s'ensuit que $V = \int_{-r}^{r} A(x)\, dx = L\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2 - x^2}\, dx = L \cdot \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi r^2 L}{2}$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

c) Se référer au calcul de V à la sous-question a) ou à la sous-question b).

d) Le volume de l'eau est exactement la moitié du volume du verre cylindrique, donc $V = \frac{1}{2}\pi r^2 L$.

e) Choisissez les axes des x, y et z comme il est montré à la figure. Alors, les tranches perpendiculaires à l'axe des x sont des triangles, les tranches perpendiculaires à l'axe des y sont des rectangles et les tranches perpendiculaires à l'axe des z sont des disques. À l'aide de tranches triangulaires, nous trouvons que l'aire $A(x)$ d'une tranche représentative DEF, où x est l'abscisse de D, est exprimée par $A(x) = \frac{1}{2}|DE| \cdot |EF| = \frac{1}{2}|DE| \cdot \left(\frac{L}{r}|DE|\right) = \frac{L}{2r}|DE|^2 = \frac{L}{2r}(r^2 - x^2)$. Il s'ensuit que



$$V = \int_{-r}^{r} A(x)\,dx = \frac{L}{2r}\int_{-r}^{r}(r^2 - x^2)\,dx = \frac{L}{r}\int_{-r}^{r}(r^2 - x^2)\,dx = \frac{L}{r}\left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r$$

$$= \frac{L}{r}\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) = \frac{L}{r}\cdot\tfrac{2}{3}r^3 = \tfrac{2}{3}r^2 L \quad \text{[Ceci représente } 2/(3\pi) \approx 0{,}21 \text{ du volume du verre.]}$$

5. a) $V = \pi h^2(r - h/3) = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$. Se référer à la solution de l'exercice 2.2.49.

b) La plus petite calotte est de hauteur $h = 1 - x$ et donc, selon la sous-question a), son volume est $V = \frac{1}{3}\pi(1-x)^2[3(1) - (1-x)] = \frac{1}{3}\pi(x-1)^2(x+2)$. Ce volume doit être un tiers du volume total de la sphère, qui est $\frac{4}{3}\pi(1)^3$. Donc, $\frac{1}{3}\pi(x-1)^2(x+2) = \frac{1}{3}(\frac{4}{3}\pi) \Rightarrow (x^2 - 2x + 1)(x+2) = \frac{4}{3} \Rightarrow x^3 - 3x + 2 = \frac{4}{3} \Rightarrow 3x^3 - 9x + 2 = 0$. Si nous utilisons la méthode de Newton avec $f(x) = 3x^3 - 9x + 2$, $f'(x) = 9x^2 - 9$, nous obtenons $x_{n+1} = x_n - \dfrac{3x_n^3 - 9x_n + 2}{9x_n^2 - 9}$. Si nous supposons que $x_1 = 0$, nous obtenons $x_2 \approx 0{,}2222$ et $x_3 \approx 0{,}2261 \approx x_4$, donc, en utilisant quatre décimales, on a $x \approx 0{,}2261$.

c) Lorsque $r = 0{,}5$ et $s = 0{,}75$, l'équation $x^3 - 3rx^2 + 4r^3 s = 0$ devient $x^3 - 3(0{,}5)x^2 + 4(0{,}5)^3(0{,}75) = 0 \Rightarrow x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4(\frac{1}{8})\frac{3}{4} = 0 \Rightarrow 8x^2 - 12x^2 + 3 = 0$. Nous utilisons la méthode de Newton avec $f(x) = 8x^3 - 12x^2 + 3$, $f'(x) = 24x^2 - 24x$, donc $x_{n+1} = x_n - \dfrac{8x_n^3 - 12x_n^2 + 3}{24x_n^2 - 24x_n}$. Supposons que $x_1 = 0{,}5$. Alors, $x_2 \approx 0{,}6667$ et $x_3 \approx 0{,}6736 \approx x_4$. Donc, avec quatre décimales, la profondeur est 0,6736 m.

d)

i) À partir de la solution à la sous-question a) avec $r = 5$ cm, nous savons que le volume d'eau dans le bol est $V = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h) = \frac{1}{3}\pi h^2(15 - h) = 5\pi h^2 - \frac{1}{3}\pi h^3$. Nous savons que $\dfrac{dV}{dt} = 0{,}2 \text{ cm}^3/\text{s}$ et nous désirons trouver $\dfrac{dh}{dt}$ lorsque

$h = 3$. Or, $\frac{dV}{dt} = 10\pi h\frac{dh}{dt} - \pi h^2\frac{dh}{dt}$, donc $\frac{dh}{dt} = \frac{0,2}{\pi(10h - h^2)}$. Lorsque $h = 3$, nous obtenons

$\frac{dh}{dt} = \frac{0,2}{\pi(10\cdot 3 - 3^2)} = \frac{1}{105\pi} \approx 0,003$ cm/s.

ii) À partir de la solution à la sous-question a), nous savons que le volume d'eau nécessaire pour remplir le bol à partir du moment où l'eau a une profondeur de 4 cm est $V = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi(5)^3 - \frac{1}{3}\pi(4)^2(15-4) = \frac{2}{3}\cdot 125\pi - \frac{16}{3}\cdot 11\pi = \frac{74}{3}\pi$. Pour trouver le temps nécessaire pour remplir le bol, nous divisons ce volume par le taux : Temps $= \frac{74\pi/3}{0,2} = \frac{370\pi}{3} \approx 387$ s $\approx 6,5$ min.

6. a) Le volume au-dessus de la surface est $\int_0^{L-h} A(y)\,dy = \int_{-h}^{L-h} A(y)\,dy - \int_{-h}^{0} A(y)\,dy$. La proportion du volume au-dessus de la surface est donc $\frac{\int_0^{L-h} A(y)\,dy}{\int_{-h}^{L-h} A(y)\,dy} = \frac{\int_{-h}^{L-h} A(y)\,dy - \int_{-h}^{0} A(y)\,dy}{\int_{-h}^{L-h} A(y)\,dy}$. Or, selon le principe d'Archimède, nous avons

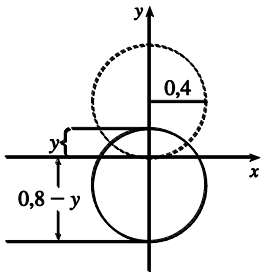
$F = P \;\Rightarrow\; \rho_f g\int_{-h}^{0} A(y)\,dy = \rho_0 g\int_{-h}^{L-h} A(y)\,dy$, donc $\int_{-h}^{0} A(y)\,dy = (\rho_0/\rho_f)\int_{-h}^{L-h} A(y)\,dy$. Par conséquent, $\frac{\int_0^{L-h} A(y)\,dy}{\int_{-h}^{L-h} A(y)\,dy} = \frac{\int_{-h}^{L-h} A(y)\,dy - (\rho_0/\rho_f)\int_{-h}^{L-h} A(y)\,dy}{\int_{-h}^{L-h} A(y)\,dy} = \frac{\rho_f - \rho_0}{\rho_f}$, le pourcentage de volume au-dessus de la surface est donc $100\left(\frac{\rho_f - \rho_0}{\rho_f}\right)\%$.

b) Dans le cas d'un iceberg, le pourcentage de volume au-dessus de la surface est $100(\frac{1030-917}{1030})\% \approx 11\%$.

c) Non, l'eau ne déborde pas du verre. Soit V_g le volume du glaçon cubique, soit V_e le volume de l'eau qui résulte de la fonte de la glace. Alors, selon la formule dérivée à la sous-question a), le volume de la glace au-dessus de la surface de l'eau est $[(\rho_f - \rho_0)/\rho f']\ V_g$, donc le volume sous la surface est $V_g - [(\rho_f - \rho_0)/\rho_f]V_g = (\rho_0/\rho_f)V_g$. Or, la masse du glaçon cubique est égale à la masse de l'eau qui est créée lorsqu'il fond, c'est-à-dire $m = \rho_0 V_g = \rho_f V_e \;\Rightarrow\; V_e = (\rho_0/\rho_f)V_g$. Donc, lorsque le glaçon cubique fond, le volume de l'eau qui résulte de la fonte est le même que le volume du glaçon cubique qui se trouvait sous la surface de l'eau, et donc l'eau ne déborde pas du verre.

d) La figure montre l'instant où la hauteur de la partie exposée de la sphère est y. Si nous utilisons la formule à la sous-question 5a) avec $r = 0,4$ et $h = 0,8 - y$, nous constatons que le volume de la partie immergée de la sphère est $\frac{1}{3}\pi(0,8-y)^2[1,2-(0,8-y)]$, donc son poids est $1000g\cdot\frac{1}{3}\pi s^2(1,2-s)$, où $s = 0,8 - y$. Alors, le travail fourni pour immerger totalement la sphère dans l'eau est

 © Groupe Modulo inc., 2013



$$P = \int_0^{0,8} g\tfrac{1000}{3}\pi s^2(1,2-s)\,ds = g\tfrac{1000}{3}\pi\int_0^{0,8}(1,2s^2 - s^3)\,ds$$
$$= g\tfrac{1000}{3}\pi[0,4s^3 - \tfrac{1}{4}s^4]_0^{0,8} = g\tfrac{1000}{3}\pi(0,2048 - 0,1024) = 9,8\tfrac{1000}{3}\pi(0,1024) \approx 1,05\times 10^3 \text{ J}$$

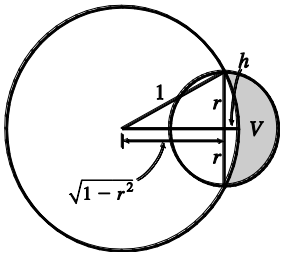
7. Sachant que le taux de variation du volume de l'eau est $\frac{dV}{dt} = -kA(x)$, où k est une constante positive quelconque et où $A(x)$ est l'aire de la surface lorsque la profondeur de l'eau est x. Portons maintenant attention au taux de variation de la profondeur de l'eau par rapport au temps, c'est-à-dire $\frac{dx}{dt}$. selon la règle de la dérivation en chaîne, $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx}\frac{dx}{dt}$, donc nous pouvons alors réécrire la première équation comme suit : $\frac{dV}{dx}\frac{dx}{dt} = -kA(x)$ (*). De plus, nous savons que le volume total d'eau jusqu'à une profondeur x est $V(x) = \int_0^x A(s)\,ds$, où $A(s)$ est l'aire d'une section transversale de l'eau à une profondeur s. Si nous prenons la dérivée de cette équation par rapport à x, nous obtenons $dV/dx = A(x)$. En substituant cette réponse dans l'équation *, nous obtenons $A(x)(dx/dt) = -kA(x) \quad \Rightarrow \quad dx/dt = -k$, une constante.

8. Une sphère représentative de rayon r apparaît à la figure. Nous désirons que le volume ombré V, qui peut être assimilé au volume d'un hémisphère de rayon r moins le volume de la calotte sphérique de hauteur $h = 1 - \sqrt{1-r^2}$ et de rayon 1, soit maximal.

$$V = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{4}{3}\pi r^3 - \tfrac{1}{3}\pi(1-\sqrt{1-r^2})^2[3(1) - (1-\sqrt{1-r^2})] \quad \text{[selon la sous-question 5a)]}$$
$$= \tfrac{1}{3}\pi[2r^3 - (2-2\sqrt{1-r^2} - r^2)(2+\sqrt{1-r^2})]$$
$$= \tfrac{1}{3}\pi[2r^3 - 2 + (r^2+2)\sqrt{1-r^2}]$$

$$V' = \tfrac{1}{3}\pi\left[6r^2 + \frac{(r^2+2)(-r)}{\sqrt{1-r^2}} + \sqrt{1-r^2}(2r)\right] = \tfrac{1}{3}\pi\left[\frac{6r^2\sqrt{1-r^2} - r(r^2+2) + 2r(1-r^2)}{\sqrt{1-r^2}}\right]$$
$$= \tfrac{1}{3}\pi\left(\frac{6r^2\sqrt{1-r^2} - 3r^3}{\sqrt{1-r^2}}\right) = \frac{\pi r^2(2\sqrt{1-r^2} - r)}{\sqrt{1-r^2}}$$

 © Groupe Modulo inc., 2013



$V'(r) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\sqrt{1-r^2} = r \quad \Leftrightarrow \quad 4 - 4r^2 = r^2 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 = \frac{4}{5} \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 0{,}89$.

Puisque $V'(r) > 0$ pour $0 < r < \frac{2}{\sqrt{5}}$ et $V'(r) < 0$ pour $\frac{2}{\sqrt{5}} < r < 1$, nous savons que V atteint un maximum en $r = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

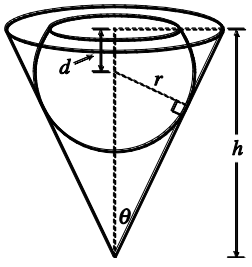
9. Nous devons trouver des expressions représentant les aires A et B, établir qu'elles sont égales et tirer les conclusions qui en découlent au sujet de la courbe C. Si $P = (a, 2a^2)$, alors l'aire A est simplement $\int_0^a (2x^2 - x^2)\, dx = \int_0^a x^2\, dx = \frac{1}{3}a^3$. Pour trouver l'aire B, nous utilisons y comme variable d'intégration. Déterminons l'équation de la courbe centrale en fonction de y: $y = 2x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{y/2}$, puisque nous ne nous préoccupons que du premier quadrant. L'aire B peut être exprimée comme

$$\int_0^{2a^2} \left[\sqrt{y/2} - C(y)\right] dy = \left[\frac{4}{3}(y/2)^{3/2}\right]_0^{2a^2} - \int_0^{2a^2} C(y)\, dy = \frac{4}{3}a^3 - \int_0^{2a^2} C(y)\, dy$$

où $C(y)$ est la fonction de la courbe C. Considérant que $A = B$, nous obtenons $\frac{1}{3}\alpha^3 = \frac{4}{3}\alpha^3 - \int_0^{2\alpha^2} C(y)dy \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^{2\alpha^2} C(y)dy = \alpha^3$.

Nous dérivons maintenant chaque membre de cette équation par rapport à a, à l'aide de la règle de la dérivation en chaîne et du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral : $C(2\alpha^2)(4\alpha) = 3\alpha^2 \quad \Rightarrow \quad C(y) = \frac{3}{4}\sqrt{y/2}$, où $y = 2\alpha^2$. Obtenons maintenant la valeur de y : $x = \frac{3}{4}\sqrt{y/2} \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{9}{16}(y/2) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{32}{9}x^2$.

10. Nous voulons trouver le volume de la partie de la sphère qui est sous la surface de l'eau. Comme le montre le graphique, cette région est une calotte sphérique de rayon r et de hauteur $r + d$. Trouvons une expression qui représente d en fonction de h, r et q, alors nous pourrons calculer le volume de la région [se référer à la sous-question 5a)], et ensuite dériver par rapport à r afin d'identifier le point maximal. Nous constatons que $\sin\theta = \frac{r}{h-d} \quad \Leftrightarrow \quad h - d = \frac{r}{\sin\theta} \quad \Leftrightarrow \quad d = h - r\csc\theta$.



 © Groupe Modulo inc., 2013

Nous pouvons maintenant utiliser la formule qui apparaît à la solution de la sous-question 5a) pour calculer le volume de l'eau écoulée :

$$V = \tfrac{1}{3}\pi h^2(3r-h) = \tfrac{1}{3}\pi(r+d)^2[3r-(r+d)] = \tfrac{1}{3}\pi(r+h-r\csc\theta)^2(2r-h+r\csc\theta)$$
$$= \tfrac{\pi}{3}[r(1-\csc\theta)+h]^2[r(2+\csc\theta)-h]$$

Nous prenons maintenant la dérivée par rapport à r :

$$dV/dr = \tfrac{\pi}{3}([r(1-\csc\theta)+h]^2(2+\csc\theta)+2[r(1-\csc\theta)+h](1-\csc\theta)[r(2+\csc\theta)-h])$$
$$= \tfrac{\pi}{3}[r(1-\csc\theta)+h]([r(1-\csc\theta)+h](2+\csc\theta)+2(1-\csc\theta)[r(2+\csc\theta)-h])$$
$$= \tfrac{\pi}{3}[r(1-\csc\theta)+h](3(2+\csc\theta)(1-\csc\theta)r+[(2+\csc\theta)-2(1-\csc\theta)]h)$$
$$= \tfrac{\pi}{3}[r(1-\csc\theta)+h][3(2+\csc\theta)(1-\csc\theta)r+3h\csc\theta]$$

Ceci s'annule lorsque $r = \dfrac{h}{\csc\theta-1}$ et lorsque $r = \dfrac{h\csc\theta}{(\csc\theta+2)(\csc\theta-1)}$. Or, puisque $V\left(\dfrac{h}{\csc\theta-1}\right)=0$ (le premier facteur disparaît; ceci correspond à $d = -r$), le volume de l'eau qui s'écoule est maximal lorsque $r = \dfrac{h\csc\theta}{(\csc\theta-1)(\csc\theta+2)}$. (Nous savons par intuition qu'une valeur maximale existe et qu'elle doit se produire à un nombre critique.) Si nous multiplions le numérateur et le dénominateur par $\sin^2\theta$, nous obtenons une autre forme de la réponse : $r = \dfrac{h\sin\theta}{\sin\theta+\cos 2\theta}$.

11. a) Si nous empilons des disques le long de l'axe des y, nous obtenons $V = \int_0^h \pi[f(y)]^2\,dy$.

b) Selon la règle de la dérivation en chaîne, $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{dV}{dh}\cdot\dfrac{dh}{dt} = \pi[f(h)]^2\dfrac{dh}{dt}$.

c) $kA\sqrt{h} = \pi[f(h)]^2\dfrac{dh}{dt}$. Soit $\dfrac{dh}{dt} = C$: $\pi[f(h)]^2 C = kA\sqrt{h} \;\Rightarrow\; [f(h)]^2 = \dfrac{kA}{\pi C}\sqrt{h} \;\Rightarrow\; f(h) = \sqrt{\dfrac{ka}{\pi C}}\,h^{1/4}$; c'est-à-dire, $f(y) = \sqrt{\dfrac{kA}{\pi C}}\,y^{1/4}$. L'avantage que procure $\dfrac{dh}{dt} = C$ est que les marques sur le récipient sont également espacées.

12. a) Utilisons d'abord la méthode des coquilles cylindriques pour exprimer le volume V en fonction de h, r et w :

$$V = \int_0^r 2\pi xy\,dx = \int_0^r 2\pi x\left[h+\frac{w^2x^2}{2g}\right]dx = 2\pi\int_0^r\left(hx+\frac{w^2x^3}{2g}\right)dx$$
$$= 2\pi\left[\frac{hx^2}{2}+\frac{w^2x^4}{8g}\right]_0^r = 2\pi\left[\frac{hr^2}{2}+\frac{w^2r^4}{8g}\right] = \pi hr^2+\frac{\pi w^2r^4}{4g} \;\Rightarrow$$

$$h = \frac{V-(\pi w^2r^4)/(4g)}{\pi r^2} = \frac{4gV-\pi w^2r^4}{4\pi gr^2}.$$

b) La surface touche le fond lorsque $h = 0 \;\Rightarrow\; 4gV-\pi w^2r^4 = 0 \;\Rightarrow\; w^2 = \dfrac{4gV}{\pi r^4} \;\Rightarrow\; w = \dfrac{2\sqrt{gV}}{\sqrt{\pi}r^2}$.

Pour que le liquide déborde du récipient, $y(r) > L \;\Leftrightarrow$

 © Groupe Modulo inc., 2013

$$L < h + \frac{w^2r^2}{2g} = \frac{4gV - \pi w^2 r^4}{4\pi g r^2} + \frac{w^2r^2}{2g} = \frac{4gV}{4\pi g r^2} - \frac{\pi w^2 r^2}{4\pi g r^2} + \frac{w^2r^2}{2g}$$
$$= \frac{V}{\pi r^2} - \frac{w^2r^2}{4g} + \frac{w^2r^2}{2g} = \frac{V}{\pi r^2} + \frac{w^2r^2}{4g} \quad \Leftrightarrow$$

$\frac{w^2r^2}{4g} > L - \frac{V}{\pi r^2} = \frac{\pi r^2 L - V}{\pi r^2} \quad \Leftrightarrow \quad w^2 > \frac{4g(\pi r^2 L - V)}{\pi r^4}$. Donc, pour que l'eau déborde, il faut que la vitesse angulaire soit $w > \frac{2\sqrt{g(\pi r^2 L - V)}}{r^2\sqrt{\pi}}$.

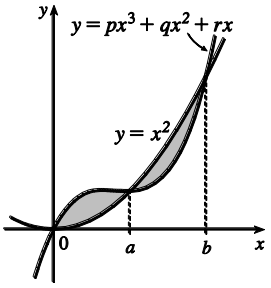
c)

i) Nous avons ici $r = 2$, $L = 7$, $h = 7 - 5 = 2$. Lorsque $x = 1$, $y = 7–4 = 3$. Par conséquent, $3 = 2 + \frac{w^2 \cdot 1^2}{2 \cdot 32} \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{w^2}{2 \cdot 32} \quad \Rightarrow \quad w^2 = 64 \quad \Rightarrow \quad w = 8$ rad/s. $V = \pi(2)(2)^2 + \frac{\pi \cdot 8^2 \cdot 2^4}{4g} = 8\pi + 8\pi = 16\pi$ m^3.

ii) Le long de la paroi, $x = 2$, donc $y = 2 + \frac{8^2 \cdot 2^2}{2 \cdot 32} = 6$ et la surface est à une distance de 7 – 6 = 1 m du sommet du réservoir.

13. Puisque la courbe de la fonction polynomiale passe par l'origine, son équation est de la forme $y = px^3 + qx^2 + rx$. Les courbes se croisent lorsque $px^3 + qx^2 + rx = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad px^3 + (q-1)x^2 + rx = 0$. Désignons le membre gauche de l'équation par $f(x)$. Comme $f(a) = f(b) = 0$, une autre forme de f est

$$f(x) = px(x-a)(x-b) = px[x^2 - (a+b)x + ab]$$
$$= p[x^3 - (a+b)x^2 + abx]$$



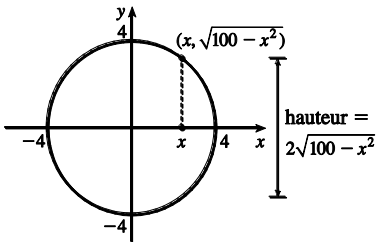
Puisque les deux aires sont égales, nous devons avoir $\int_0^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad [F(x)]_0^a = [F(x)]_b^a \quad \Rightarrow \quad F(a) - F(0) = F(a) - F(b) \quad \Rightarrow \quad F(0) = F(b)$, où F est une primitive de f. Or, $F(x) = \int f(x)\,dx = \int p[x^3 - (a+b)x^2 + abx]\,dx = p[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}(a+b)x^3 + \frac{1}{2}abx^2] + C$, donc

$F(0) = F(b) \quad \Rightarrow \quad C = p[\frac{1}{4}b^4 - \frac{1}{3}(a+b)b^3 + \frac{1}{2}ab^3] + C \quad \Rightarrow \quad 0 = p[\frac{1}{4}b^4 - \frac{1}{3}(a+b)b^3 + \frac{1}{2}ab^3] \quad \Rightarrow \quad 0 = 3b - 4(a+b) + 6a$

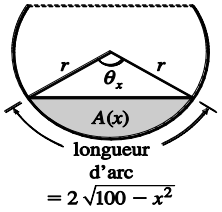
[multiplions par $12/(pb^3)$, $b \neq 0$] $\Rightarrow \quad 0 = 3b - 4a - 4b + 6a \quad \Rightarrow \quad b = 2a$. Il s'ensuit que la valeur de b est le double de la valeur de a.

 © Groupe Modulo inc., 2013

14. a) Situons la tortilla circulaire plate sur un système de coordonnées *xy*, comme dans la première figure. Une équation du cercle est $x^2 + y^2 = 10^2$ et la hauteur d'une section transversale est $2\sqrt{100 - x^2}$.



Regardons maintenant une section transversale dont l'angle central est θ_x, comme dans la seconde figure (*r* est le rayon du cylindre à base circulaire). L'aire ombrée $A(x)$ est égale à l'aire $A_1(x)$ de la section moins l'aire $A_2(x)$ du triangle.



$$\begin{aligned} A(x) &= A_1(x) - A_2(x) = \tfrac{1}{2}r^2\theta_x - \tfrac{1}{2}r^2 \sin\theta_x \quad \text{[formules trigonométriques pour les aires]} \\ &= \tfrac{1}{2}r(r\theta_x) - \tfrac{1}{2}r^2 \sin\left(\frac{s}{r}\right) \quad \text{[longueur de l'arc } s = r\theta_x \quad \Rightarrow \quad \theta_x = s/r\text{]} \\ &= \tfrac{1}{2}r \cdot 2\sqrt{100 - x^2} - \tfrac{1}{2}r^2 \sin\left(\frac{2\sqrt{100 - x^2}}{r}\right) \quad [s = 2\sqrt{100 - x^2}\,] \\ &= r\sqrt{100 - x^2} - \tfrac{1}{2}r^2 \sin\left(\frac{2}{r}\sqrt{100 - x^2}\right) \quad (*) \end{aligned}$$

Nous remarquons que l'angle central θ_x sera petit vers les extrémités de la tortilla, c'est-à-dire lorsque $|x| \approx 10$. Cependant, près du centre de la tortilla (lorsque $|x| \approx 0$), l'angle central θ_x peut excéder 180°. Par conséquent, le sinus de θ_x sera négatif et le second terme de (*) sera positif (ajoutant en fait des aires à l'aire de la section). Le volume du taco peut être calculé en effectuant l'intégration des aires de la section transversale entre $x = -10$ et $x = 10$. Il s'ensuit que

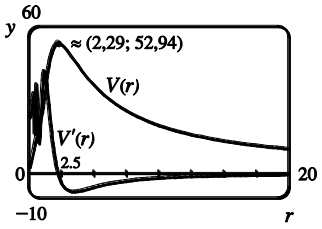
$$V(x) = \int_{-10}^{10} A(x)\, dx = \int_{-10}^{10} \left[r\sqrt{100 - x^2} - \tfrac{1}{2}r^2 \sin\left(\frac{2}{r}\sqrt{100 - x^2}\right)\right] dx\,.$$

b) Pour trouver la valeur de *r* telle que le volume du taco soit maximal, définissons la fonction

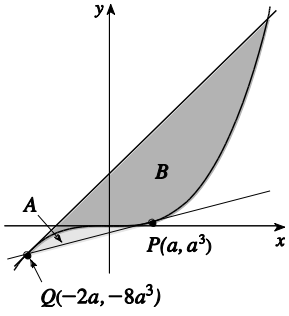
$$V(r) = \int_{-10}^{10} \left[r\sqrt{100 - x^2} - \tfrac{1}{2}r^2 \sin\left(\frac{2}{r}\sqrt{100 - x^2}\right)\right] dx\,.$$

La figure montre les courbes de $y = V(r)$ et de $y = V'(r)$. À l'aide d'un logiciel de calcul symbolique, nous trouvons que le volume maximal est d'environ 827,14 et qu'il se produit lorsque $r \approx 5{,}7279$.

 © Groupe Modulo inc., 2013



15. Considérons P dans la partie positive de l'abscisse. Puisque la fonction $y = x^3$ est impaire, cela n'aura aucune incidence sur le résultat du calcul. Soit $P = (a, a^3)$. La pente de la tangente à la courbe $y = x^3$ au point P est $3a^2$, et donc, l'équation de la tangente est $y - a^3 = 3a^2(x - a) \Leftrightarrow y = 3a^2x - 2a^3$. Résolvons simultanément cette équation avec celle de $y = x^3$ pour trouver le deuxième point d'intersection : $x^3 = 3a^2x - 2a^3 \Leftrightarrow (x - a)^2(x + 2a) = 0$. Donc, $Q = (-2a, -8a^3)$ est l'autre point d'intersection. L'équation de la tangente au point Q est $y - (-8a^3) = 12a^2[x - (-2a)] \Leftrightarrow y = 12a^2x + 16a^3$. Par symétrie, cette tangente croisera la courbe une seconde fois au point $x = -2(-2a) = 4a$. La courbe repose au-dessus de la première tangente et sous la seconde; nous cherchons donc une relation entre $A = \int_{-2a}^{a} [x^3 - (3a^2x - 2a^3)]\,dx$ et $B = \int_{-2a}^{4a} [(12a^2x + 16a^3) - x^3]\,dx$. Nous calculons $A = [\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}a^2x^2 + 2a^3x]_{-2a}^{a} = \frac{3}{4}a^4 - (-6a^4) = \frac{27}{4}a^4$ et $B = [6a^2x^2 + 16a^3x - \frac{1}{4}x^4]_{-2a}^{4a} = 96a^4 - (-12a^4 = 108a^4)$. Nous constatons que $B = 16A = 2^4A$. Ceci est dû au fait que notre calcul de l'aire B était essentiellement le même que celui de l'aire A, après avoir remplacé a par $-2a$; donc, si nous remplaçons a par $-2a$ dans l'expression qui représente A, nous obtenons $\frac{27}{4}(-2a)^4 = 108a^4 = B$.



 © Groupe Modulo inc., 2013

3. LES TECHNIQUES D'INTÉGRATION

3.1 L'intégration des parties

1. Posons $u = \ln x, dv = x^2 dx \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$, $v = \frac{1}{3}x^3$. Alors, selon la formule 2,

$$\int x^2 \ln x\, dx = (\ln x)(\tfrac{1}{3}x^3) - \int (\tfrac{1}{3}x^3)(\tfrac{1}{x})\, dx = \tfrac{1}{3}x^3 \ln x - \tfrac{1}{3}\int x^2\, dx = \tfrac{1}{3}x^3 \ln x - \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{3}x^3) + C$$
$$= \tfrac{1}{3}x^3 \ln x - \tfrac{1}{9}x^3 + C \quad \left[\text{ou } \tfrac{1}{3}x^3\left(\ln x - \tfrac{1}{3}\right) + C\right]$$

2. Posons $u = \theta, dv = \cos\theta\, d\theta \Rightarrow du = d\theta$, $v = \sin\theta$. Alors, selon la formule 2,

$$\int \theta\cos\theta\, d\theta = \theta\sin\theta - \int \sin\theta\, d\theta = \theta\sin\theta + \cos\theta + C.$$

Remarque : Lorsqu'on effectue une intégration par parties, on peut utiliser un procédé mnémotechnique qui aide à choisir *u*. Celui-ci est la règle de préséance LIATE pour *u:*

Logarithmique

Inverse trigonométrique

Algébrique

Trigonométrique

Exponentielle

Si l'intégrande a plusieurs termes, nous tentons de choisir *u* suivant l'ordre de cette liste. Par exemple, dans $\int xe^{2x}dx$, l'intégrande est xe^{2x}, qui est le produit d'une fonction algébrique *(x)* et d'une fonction exponentielle *(e^{2x})*. Comme Algébrique apparaît avant Exponentielle dans la liste, nous choisirons $u = x$. Il se pourrait que le résultat de l'intégration soit le même, quel que soit le choix de *u* ou de *dv* qui a été fait, mais, en cas de doute, il est préférable de se référer à la règle LIATE.

3. Posons $u = x, dv = \cos 5x\, dx \Rightarrow du = dx$, $v = \frac{1}{5}\sin 5x$. Alors, selon la formule 2,

$$\int x\cos 5x\, dx = \tfrac{1}{5}x\sin 5x - \int \tfrac{1}{5}\sin 5x\, dx = \tfrac{1}{5}x\sin 5x + \tfrac{1}{25}\cos 5x + C.$$

4. Posons $u = y, dv = e^{0,2y}dy \Rightarrow du = dy$, $v = \frac{1}{0,2}e^{0,2y}$. Alors, selon la formule 2,

$$\int ye^{0,2y}dy = 5ye^{0,2y} - \int 5e^{0,2y}dy = 5ye^{0,2y} - 25e^{0,2y} + \mathrm{C}.$$

5. Posons $u = t, dv = e^{-3t}dt \Rightarrow du = dt$, $v = -\frac{1}{3}e^{-3t}$. Alors, selon la formule 2,

$$\int te^{-3t}dt = -\tfrac{1}{3}te^{-3t} - \int -\tfrac{1}{3}e^{-3t}dt = -\tfrac{1}{3}te^{-3t} + \tfrac{1}{3}\int e^{-3t}dt = -\tfrac{1}{3}te^{-3t} - \tfrac{1}{9}e^{-3t} + C.$$

6. Posons $u = x - 1, dv = \sin\pi x\, dx \Rightarrow du = dx$, $v = -\frac{1}{\pi}\cos\pi x$. Alors, selon la formule 2,

 © Groupe Modulo inc., 2013

$$\int (x-1)\sin \pi x\, dx = -\frac{1}{\pi}(x-1)\cos \pi x - \int -\frac{1}{x}\cos \pi x\, dx = -\frac{1}{\pi}(x-1)\cos \pi x + \frac{1}{\pi}\int \cos \pi x\, dx$$
$$= -\frac{1}{\pi}(x-1)\cos \pi x + \frac{1}{\pi^2}\sin \pi x + C$$

7. Tout d'abord, posons $u = x^2 + 2x$, $dv = \cos x\, dx \;\Rightarrow\; du = (2x+2)\, dx$, $v = \sin x$. Alors, selon la formule 2,

$I = \int (x^2 + 2x)\cos x\, dx = (x^2 + 2x)\sin x - \int (2x+2)\sin x\, dx$.

Ensuite, posons $U = 2x + 2$, $dV = \sin x\, dx \;\Rightarrow\; dU = 2\, dx$, $V = -\cos x$, donc

$\int (2x+2)\sin x\, dx = -(2x+2)\cos x - \int -2\cos x\, dx = -(2x+2)\cos x + 2\sin x + C$.

Par conséquent, $I = (x^2 + 2x)\sin x + (2x + 2)\cos x - 2\sin x + C$.

8. Tout d'abord, posons $u = t^2$, $dv = \sin \beta t\, dt \;\Rightarrow\; du = 2t\, dt$, $v = -\frac{1}{\beta}\cos \beta t$. Alors, selon la formule 2,

$\mathrm{I} = \int t^2 \sin \beta t\, dt = -\frac{1}{\beta}t^2 \cos \beta t - \int -\frac{2}{\beta}t\cos \beta t\, dt$. Ensuite, posons $U = t$, $dV = \cos \beta t\, dt \;\Rightarrow\; dU = dt$, $V = \frac{1}{\beta}\sin \beta t$, donc

$\int t\cos \beta t\, dt = \frac{1}{\beta}t\sin \beta t - \int \frac{1}{\beta}\sin \beta t\, dt = \frac{1}{\beta}t\sin \beta t + \frac{1}{\beta^2}\cos \beta \mathrm{t} + C$. Par conséquent,

$$I = -\frac{1}{\beta}t^2\cos \beta t + \frac{2}{\beta}\left(\frac{1}{\beta}t\sin \beta t + \frac{1}{\beta^2}\cos \beta t\right) + C = -\frac{1}{\beta}t^2\cos \beta t + \frac{2}{\beta^2}t\sin \beta t + \frac{2}{\beta^3}\cos \beta t + C.$$

9. Posons $u = \ln \sqrt[3]{x}$, $dv = dx \;\Rightarrow\; du = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\left(\frac{1}{3}x^{-2/3}\right)dx = \frac{1}{3x}dx$, $v = x$. Alors,

$\int \ln \sqrt[3]{x}\, dx = x\ln \sqrt[3]{x} - \int x \cdot \frac{1}{3x}dx = x\ln \sqrt[3]{x} - \frac{1}{3}x + C$.

Deuxième solution : Réécrire $\int \ln \sqrt[3]{x}\, dx = \frac{1}{3}\int \ln x\, dx$, et s'inspirer de l'exemple 2.

Troisième solution : Effectuer le changement de variable $y = \sqrt[3]{x}$ dans l'intégrande, ce qui donne $\int \ln \sqrt[3]{x}\, dx = 3\int y^2 \ln y\, dy$, et s'inspirer de l'exercice 1.

10. Posons $u = \arcsin x$, $dv = dx \;\Rightarrow\; du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $v = x$. Alors, $\int \arcsin x\, dx = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$. En posant $t = 1 - x^2$, nous obtenons $dt = -2x\, dx$, ainsi $-\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int t^{-1/2}(-\frac{1}{2}dt) = \frac{1}{2}(2t^{1/2}) + C = t^{1/2} + C = \sqrt{1-x^2} + C$.

Par conséquent, $\int \arcsin x\, dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$.

11. Posons $u = \arctan 4t$, $dv = dt \;\Rightarrow\; du = \frac{4}{1+(4t)^2}dt = \frac{4}{1+16t^2}dt$, $v = t$. Alors,

 © Groupe Modulo inc., 2013

$\int \arctan\ 4t\ dt = t\ \arctan\ 4t - \int \frac{4t}{1+16t^2}\,dt = t\ \arctan\ 4t - \frac{1}{8}\int \frac{32t}{1+16t^2}\,dt = t\ \arctan\ 4t - \frac{1}{8}\ln(1+16t^2) + C$.

12. Posons $u = \ln p,\ dv = p^5 dp \ \Rightarrow\ du = \frac{1}{p}dp\ ,\ v = \frac{1}{6}p^6$. Alors, $\int p^5 \ln p\ dp = \frac{1}{6}p^6 \ln p - \frac{1}{6}\int p^5 dp = \frac{1}{6}p^6 \ln p - \frac{1}{36}p^6 + C$.

13. Posons u = t, $dv = \sec^2 2t\ dt \ \Rightarrow\ du = dt\ ,\ v = \frac{1}{2}\tan 2t$. Alors,

$\int t\sec^2 2t\ dt = \frac{1}{2}t\tan 2t - \frac{1}{2}\int \tan 2t\ dt = \frac{1}{2}t\tan 2t - \frac{1}{4}\ln\left|\sec 2t\right| + C$.

14. Posons $u = s,\ dv = 2^s\ ds \ \Rightarrow\ du = ds\ ,\ v = \frac{1}{\ln 2}2^s$. Alors,

$\int s\ 2^s\ ds = \frac{1}{\ln 2}s\ 2^s - \frac{1}{\ln 2}\int 2^s\ ds = \frac{1}{\ln 2}s\ 2^s - \frac{1}{(\ln 2)^2}2^s + C\left[\text{ou } \frac{2^s}{(\ln 2)^2}(s\ln 2 - 1) + C\right]$.

15. Tout d'abord, posons $u = (\ln x)^2,\ dv = dx \ \Rightarrow\ du = 2\ln x \cdot \frac{1}{x}dx\ ,\ v = x$. Alors, selon la formule 2,

$I = \int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - 2\int x\ln x \cdot \frac{1}{x}dx = x(\ln x)^2 - 2\int \ln x\ dx$. Ensuite, posons $U = \ln x,\ dV = dx \ \Rightarrow\ dU = 1/x\ dx\ ,\ V = x$, ce qui donne $\int \ln x\ dx = x\ln x - \int x\cdot(1/x)dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C_1$.

Par conséquent, $I = x(\ln x)^2 - 2(x\ln x - x + C_1) = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C$, où $C = -2C_1$.

16. Posons $u = t,\ dv = \sin mt\ dt \ \Rightarrow\ du = dt\ ,\ v = \frac{-1}{m}\cos mt$. Alors,

$\int t\ \sin mt\ dt = \frac{-1}{m}t\ \cos mt + \int \frac{1}{m}\cos mt\ dt = \frac{-1}{m}t\ \cos mt + \frac{1}{m^2}\sin mt + C\ [m \neq 0]$.

17. Tout d'abord, posons $u = \sin 3\theta,\ dv = e^{2\theta}d\theta \ \Rightarrow\ du = 3\cos 3\theta\, d\theta\ ,\ v = \frac{1}{2}e^{2\theta}$. Alors,

$I = \int e^{2\theta}\sin 3\theta\ d\theta = \frac{1}{2}e^{2\theta}\sin 3\theta - \frac{3}{2}\int e^{2\theta}\cos 3\theta\ d\theta$. Ensuite, posons $U = \cos 3\theta,\ dV = e^{2\theta}\ d\theta \ \Rightarrow\ dU = -3\sin 3\theta\ d\theta\ , V = \frac{1}{2}e^{2\theta}$, ce qui donne $\int e^{2\theta}\cos 3\theta\ d\theta = \frac{1}{2}e^{2\theta}\cos 3\theta + \frac{3}{2}\int e^{2\theta}\sin 3\theta\ d\theta$. En substituant ce résultat dans la formule précédente, nous obtenons

$I = \frac{1}{2}e^{2\theta}\sin 3\theta - \frac{3}{4}e^{2\theta}\cos 3\theta - \frac{9}{4}\int e^{2\theta}\sin 3\theta\ d\theta = \frac{1}{2}e^{2\theta}\sin 3\theta - \frac{3}{4}e^{2\theta}\cos 3\theta - \frac{9}{4}I \ \Rightarrow\ \frac{13}{4}I = \frac{1}{2}e^{2\theta}\sin 3\theta - \frac{3}{4}e^{2\theta}\cos 3\theta + C_1$.

Par conséquent, $I = \frac{1}{13}e^{2\theta}(2\sin 3\theta - 3\cos 3\theta) + C$, où $C = \frac{4}{13}C_1$.

18. Tout d'abord, posons $u = e^{-\theta},\ dv = \cos 2\theta\ d\theta \ \Rightarrow\ du = -e^{-\theta}d\theta\ ,\ v = \frac{1}{2}\sin 2\theta$. Alors,

$I = \int e^{-\theta}\cos 2\theta\ \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}e^{-\theta}\sin 2\theta - \int \frac{1}{2}\sin 2\theta\ (-e^{-\theta}d\theta) = \frac{1}{2}e^{-\theta}\sin 2\theta + \frac{1}{2}\int e^{-\theta}\sin 2\theta\ d\theta$.

Ensuite, posons $U = e^{-\theta},\ dV = \sin 2\theta\ d\theta \ \Rightarrow\ dU = -e^{-\theta}\ d\theta\ ,\ V = -\frac{1}{2}\cos 2\theta$, donc

 © Groupe Modulo inc., 2013

$\int e^{-\theta}\sin 2\theta\ d\theta = -\frac{1}{2}e^{-\theta}\cos 2\theta - \int(-\frac{1}{2})\cos 2\theta(-e^{-\theta}\ d\theta) = -\frac{1}{2}e^{-\theta}\cos 2\theta - \frac{1}{2}\int e^{-\theta}\cos 2\theta\ d\theta$.

Par conséquent,

$I = \frac{1}{2}e^{-\theta}\sin 2\theta + \frac{1}{2}[(-\frac{1}{2}e^{-\theta}\cos 2\theta) - \frac{1}{2}I] = \frac{1}{2}e^{-\theta}\sin 2\theta - \frac{1}{4}e^{-\theta}\cos 2\theta - \frac{1}{4}I \quad \Rightarrow$
$\frac{5}{4}I = \frac{1}{2}e^{-\theta}\sin 2\theta - \frac{1}{4}e^{-\theta}\cos 2\theta + C_1 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{4}{5}(\frac{1}{2}e^{-\theta}\sin 2\theta - \frac{1}{4}e^{-\theta}\cos 2\theta + C_1) = \frac{2}{5}e^{-\theta}\sin 2\theta - \frac{1}{5}e^{-\theta}\cos 2\theta + C$.

19. Tout d'abord, posons $u = z^3,\ dv = e^z dz \quad \Rightarrow \quad du = 3z^2 dz\ ,\ v = e^z$. Alors, $I_1 = \int z^3 e^z dz = z^3 e^z - 3\int z^2 e^z dz$. Ensuite, posons $u_1 = z^2$,

$dv_1 = e^z dz \quad \Rightarrow \quad du_1 = 2z\ dz\ ,\ v_1 = e^z$. Alors, $I_2 = z^2 e^z - 2\int z e^z dz$. Finalement, posons $u_2 = z,\ dv_2 = e^z dz \quad \Rightarrow \quad du_2 = dz\ ,\ v_2 = e_z$.

Alors, $\int z e^z dz = z e^z - \int e^z dz = z e^z - e^z + C_1$. En substituant ce résultat dans l'expression qui représente I_2, nous

obtenons $I_2 = z^2 e^z - 2(z e^z - e^z + C_1) = z^2 e^z - 2z e^z + 2e^z - 2C_1$. En substituant ce dernier résultat pour I_2 dans l'expression pour I_1,

nous obtenons $I_1 = z^3 e^z - 3(z^2 e^z - 2z e^z + 2e^z - 2C_1) = z^3 e^z - 3z^2 e^z + 6z e^z - 6e^z + C$, où $C = 6C_1$.

20. $\int x\tan^2 x\ dx = \int x(\sec^2 x - 1)dx = \int x\sec^2 x\ dx - \int x\ dx$. Posons $u = x\ dv = \sec^2 x\ dx \quad \Rightarrow \quad du = dx\ ,\ v = \tan x$. Alors, selon la formule

2, $\int x\sec^2 x\ dx = x\tan x - \int \tan x\ dx = x\tan x - \ln|\sec x|$, et, par conséquent, $\int x\tan^2 x\ dx = x\tan x - \ln|\sec x| - \frac{1}{2}x^2 + C$.

21. Posons $u = xe^{2x},\ dv = \dfrac{1}{(1+2x)^2}dx \quad \Rightarrow \quad du = (x\cdot 2e^{2x} + e^{2x}\cdot 1)dx = e^{2x}(2x+1)dx\ ,\ v = -\dfrac{1}{2(1+2x)}$ Alors, selon la formule 2,

$$\int \frac{xe^{2x}}{(1+2x)^2}dx = -\frac{xe^{2x}}{2(1+2x)} + \frac{1}{2}\int \frac{e^{2x}(2x+1)}{1+2x}dx = -\frac{xe^{2x}}{2(1+2x)} + \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = -\frac{xe^{2x}}{2(1+2x)} + \frac{1}{4}e^{2x} + C\ .$$

La réponse peut aussi être formulée ainsi : $\dfrac{e^{2x}}{4(2x+1)} + C$.

22. Tout d'abord, posons $u = (\arcsin x)^2,\ dv = dx \quad \Rightarrow \quad du = 2\arcsin x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\ ,\ v = x$. Alors,

$I = \int(\arcsin x)^2 dx = x(\arcsin x)^2 - 2\int \dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$. Dans le but de simplifier la dernière intégrale, posons $t = \arcsin x$ [$x = \sin t$],

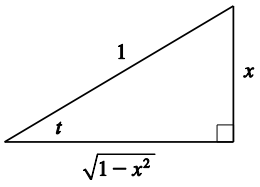
donc $dt = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ et $\int \dfrac{x\ \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int t\sin t\ dt$. Pour calculer seulement la dernière intégrale, posons maintenant que $U = t$,

$dV = \sin t\ dt \quad \Rightarrow \quad dU = dt\ ,\ V = -\cos t$. Par conséquent,

$$\int t\sin t\ dt = -t\cos t + \int \cos t\ dt = -t\cos t + \sin t + C$$
$$= -\arcsin x\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}}{1} + x + C_1 \quad \text{[se référer à la figure]}$$

Pour ce qui est de I, nous obtenons $I = x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\ \arcsin x - 2x + C$, où $C = -2C_1$.

 © Groupe Modulo inc., 2013



23. Posons $u = \ln(\sin x)$, $dv = \cos x\ dx \quad \Rightarrow \quad du = \dfrac{\cos x}{\sin x}dx$, $v = \sin x$.

Alors, $I = \int \cos x \ln(\sin x)dx = \sin x \ln(\sin x) - \int \cos x\ dx = \sin x \ln(\sin x) - \sin x + C$.

Autre méthode : Poser $t = \sin x$, donc $dt = \cos x\ dx$. Alors, $I = \int \ln t\ dt = t\ln t - t + C$ (se référer à l'exemple 2) et donc,

$I = \sin x\ (\ln \sin x - 1) + C$.

24. Posons $u = x$, $dv = \cos \pi x\ dx \quad \Rightarrow \quad du = dx$, $v = \frac{1}{\pi}\sin \pi x$. Alors,

$$\int_0^{1/2} x\cos \pi x\ dx = \left[\frac{1}{\pi}x\sin \pi x\right]_0^{1/2} - \int_0^{1/2}\frac{1}{\pi}\sin \pi x\ dx = \frac{1}{2\pi} - 0 - \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{\pi}\cos \pi x\right]_0^{1/2}$$
$$= \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi^2}(0-1) = \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{\pi^2} \text{ ou } \frac{\pi - 2}{2\pi^2}$$

25. Tout d'abord, posons $u = x^2 + 1$, $dv = e^{-x}\ dx \quad \Rightarrow \quad du = 2x\ dx$, $v = -e^{-x}$. Selon la formule 6,

$$\int_0^1 (x^2+1)e^{-x}\ dx = [-(x^2+1)e^{-x}]_0^1 + \int_0^1 2xe^{-x}dx = -2e^{-1} + 1 + 2\int_0^1 xe^{-x}\ dx.$$

Ensuite, posons $U = x$, $dV = e^{-x}\ dx \quad \Rightarrow \quad dU = dx$, $V = -e^{-x}$. De nouveau, selon la formule 6,

$$\int_0^1 xe^{-x}\ dx = [-xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\ dx = -e^{-1} + [-e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} - e^{-1} + 1 = -2e^{-1} + 1.$$

Donc, $\int_0^1 (x^2+1)e^{-x}\ dx = -2e^{-1} + 1 + 2(-2e^{-1} + 1) = -2e^{-1} + 1 - 4e^{-1} + 2 = -6e^{-1} + 3 = \dfrac{-6}{e} + 3$.

26. Posons $u = t$, $dv = \cos t\ dt \quad \Rightarrow \quad du = dt$, $v = \sin t$. Alors,

$$\int_0^1 t\cos t\ dt = \left[t\sin t\right]_0^1 - \int_0^1 \sin t\ dt = \left[\sin 1 - 0\right] - \left[-\cos t\right]_0^1$$
$$= \sin 1 + (\cos 1 - 1) = \sin 1 + \cos 1 - 1$$

27. Posons $u = \ln y$, $dv = \dfrac{1}{\sqrt{y}}dy = y^{-1/2}dy \quad \Rightarrow \quad du = \dfrac{1}{y}dy$, $v = 2y^{1/2}$. Alors,

$$\int_4^9 \frac{\ln y}{\sqrt{y}}dy = \left[2\sqrt{y}\ln y\right]_4^9 - \int_4^9 2y^{-1/2}dy = (6\ln 9 - 4\ln 4) - \left[4\sqrt{y}\right]_4^9 = 6\ln 9 - 4\ln 4 - (12 - 8)$$
$$= 6\ln 9 - 4\ln 4 - 4$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

28. Posons $u = \ln r, dv = r^3\ dr \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{r}dr\ ,\ v = \frac{1}{4}r^4$. Alors,

$\int_1^3 r^3 \ln r\ dr = [\frac{1}{4}r^4 \ln r]_1^3 - \int_1^3 \frac{1}{4}r^3 dr = \frac{81}{4}\ln 3 - 0 - \frac{1}{4}[\frac{1}{4}r^4]_1^3 = \frac{81}{4}\ln 3 - \frac{1}{16}(81-1) = \frac{81}{4}\ln 3 - 5$.

29. Tout d'abord, posons $u = t^2,\ dv = \sin 2t\ dt \quad \Rightarrow \quad du = 2t\ dt\ ,\ v = -\frac{1}{2}\cos 2t$. Selon la formule 6,

$\int_0^{2\pi} t^2 \sin 2t\ dt = [-\frac{1}{2}t^2 \cos 2t]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} t\cos 2t\ dt = -2\pi^2 + \int_0^{2\pi} t\cos 2t\ dt$. Ensuite, posons $U = t,\ dV = \cos 2t\ dt \quad \Rightarrow \quad dU = dt\ ,$

$V = \frac{1}{2}\sin 2t$. De nouveau, selon la formule 6, $\int_0^{2\pi} t\cos 2t\ dt = [\frac{1}{2}\sin 2t]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\sin 2t\ dt = 0 - [-\frac{1}{4}\cos 2t]_0^{2\pi} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$.

Par conséquent, $\int_0^{2\pi} t^2 \sin 2t\ dt = -2\pi^2$.

30. Posons $u = y, dv = \dfrac{dy}{e^{2y}} = e^{-2y}dy \quad \Rightarrow \quad du = dy\ ,\ v = -\frac{1}{2}e^{-2y}$. Alors,

$\int_0^1 \dfrac{y}{e^{2y}}dy = \left[-\frac{1}{2}ye^{-2y}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-2y}dy = (-\frac{1}{2}e^{-2} + 0) - \frac{1}{4}[e^{-2y}]_0^1 = -\frac{1}{2}e^{-2} - \frac{1}{4}e^{-2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}e^{-2} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4e^2}$.

31. Posons $u = \arctan(1/x),\ dv = dx \quad \Rightarrow \quad du = \dfrac{1}{1+(1/x)^2}\cdot\dfrac{-1}{x^2}dx = \dfrac{-dx}{x^2+1}\ \ v = x.$ Alors,

$$\int_1^{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{x}\right)dx = \left[x\ \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right]_1^{\sqrt{3}} + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x\ dx}{x^2+1} = \sqrt{3}\frac{\pi}{6} - 1\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_1^{\sqrt{3}}$$
$$= \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(\ln 4 - \ln 2) = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$$

32. Posons $u = \arccos x, dv = dx \quad \Rightarrow \quad du = -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $v = x.$ Alors,

$I = \int_0^{1/2} \arccos x\ dx = [x\arccos x]_0^{1/2} + \int_0^{1/2} \dfrac{x\ dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3} + \int_1^{3/4} t^{-1/2}[-\frac{1}{2}dt]$, où $t = 1 - x^2 \quad \Rightarrow \quad dt = -2xdx$.

Par conséquent, $I = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\int_{3/4}^1 t^{-1/2}\ dt = \frac{\pi}{6} + [\sqrt{t}]_{3/4}^1 = \frac{\pi}{6} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{6}(\pi + 6 - 3\sqrt{3})$.

33. Posons $u = (\ln x)^2,\ dv = x^{-3}\ dx \quad \Rightarrow \quad du = \dfrac{2\ln x}{x}dx\ , v = -\frac{1}{2}x^{-2}$. Alors,

$I = \int_1^2 \dfrac{(\ln x)^2}{x^3}dx = \left[-\dfrac{(\ln x)^2}{2x^2}\right]_1^2 + \int_1^2 \dfrac{\ln x}{x^3}dx$. Maintenant, posons $U = \ln x,\ dV = x^{-3}\ dx \quad \Rightarrow \quad dU = \dfrac{1}{x}dx\ ,\ V = -\frac{1}{2}x^{-2}$.

Alors, $\int_1^2 \dfrac{\ln x}{x^3}dx = \left[-\dfrac{\ln x}{2x^2}\right]_1^2 + \frac{1}{2}\int_1^2 x^{-3}dx = -\frac{1}{8}\ln 2 + 0 + \frac{1}{2}[-\frac{1}{2x^2}]_1^2 = -\frac{1}{8}\ln 2 + \frac{1}{2}(-\frac{1}{8} + \frac{1}{2}) = \frac{3}{16} - \frac{1}{8}\ln 2$.

Par conséquent, $I = (-\frac{1}{8}(\ln 2)^2 + 0) + (\frac{3}{16} - \frac{1}{8}\ln 2) = -\frac{1}{8}(\ln 2)^2 - \frac{1}{8}\ln 2 + \frac{3}{16}$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

34. Posons $u = r^2, dv = \dfrac{r}{\sqrt{4+r^2}}dr \quad \Rightarrow \quad du = 2r\ dr\ ,\ v = \sqrt{4+r^2}$. Selon la formule 6,

$$\int_0^1 \frac{r^3}{\sqrt{4+r^2}}dr = \left[r^2\sqrt{4+r^2}\right]_0^1 - 2\int_0^1 r\sqrt{4+r^2}\,dr = \sqrt{5} - \tfrac{2}{3}\left[(4+r^2)^{3/2}\right]_0^1$$
$$= \sqrt{5} - \tfrac{2}{3}(5)^{3/2} + \tfrac{2}{3}(8) = \sqrt{5}(1-\tfrac{10}{3}) + \tfrac{16}{3} = \tfrac{16}{3} - \tfrac{7}{3}\sqrt{5}$$

35. Posons $u = (\ln x)^2, dv = x^4\ dx \quad \Rightarrow \quad du = 2\dfrac{\ln x}{x}dx\ ,\ v = \dfrac{x^5}{5}$. Selon la formule 6,

$$\int_1^2 x^4(\ln x)^2\,dx = \left[\frac{x^5}{5}(\ln x)^2\right]_1^2 - 2\int_1^2 \frac{x^4}{5}\ln x\ dx = \tfrac{32}{5}(\ln 2)^2 - 0 - 2\int_1^2 \frac{x^4}{5}\ln x\ dx\ .$$

Soit $U = \ln x, dV = \dfrac{x^4}{5}dx \quad \Rightarrow \quad dU = \dfrac{1}{x}dx\ ,\ V = \dfrac{x^5}{25}$.

Alors, $\int_1^2 \dfrac{x^4}{5}\ln x\ dx = \left[\dfrac{x^5}{25}\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \dfrac{x^4}{25}dx = \tfrac{32}{25}\ln 2 - 0 - \left[\dfrac{x^5}{125}\right]_1^2 = \tfrac{32}{25}\ln 2 - (\tfrac{32}{125} - \tfrac{1}{125})$.

Donc, $\int_1^2 x^4(\ln x)^2\,dx = \tfrac{32}{5}(\ln 2)^2 - 2(\tfrac{32}{25}\ln 2 - \tfrac{31}{125}) = \tfrac{32}{5}(\ln 2)^2 - \tfrac{64}{25}\ln 2 + \tfrac{62}{125}$.

36. Posons $u = \sin(t-s), dv = e^s\ ds \quad \Rightarrow \quad du = -\cos(t-s)ds\ ,\ v = e^s$. Alors,

$I = \int_0^t e^s \sin(t-s)ds = \left[e^s\sin(t-s)\right]_0^t + \int_0^t e^s\cos(t-s)ds = e^t\sin 0 - e^0\sin t + I_1$. Pour I_1, posons $U = \cos(t-s)$,

$dV = e^s\ ds \quad \Rightarrow \quad dU = \sin(t-s)ds\ ,\ V = e^s$. Donc, $I_1 = \left[e^s\cos(t-s)\right]_0^t - \int_0^t e^s\sin(t-s)ds = e^t\cos 0 - e^0\cos t - I$. Par

conséquent, $I = -\sin t + e^t - \cos t - I \quad \Rightarrow \quad 2I = e^t - \cos t - \sin t + C \quad \Rightarrow \quad I = \tfrac{1}{2}(e^t - \cos t - \sin t) + \mathrm{C}$.

37. Posons $y = \sqrt{x}$, alors $dy = \tfrac{1}{2}x^{-1/2}\ dx = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx = \dfrac{1}{2y}dx$. Par conséquent, $\int \cos\sqrt{x}\ dx = \int \cos y(2y\ dy) = 2\int y\ \cos y\ dy$. Intégrons

maintenant par parties en posant $u = y,\ dv = \cos y\ dy,\ du = dy,\ v = \sin y$, ce qui

donnera $\int y\cos y\ dy = y\sin y - \int \sin y\ dy = y\sin y + \cos y + C_1$, donc $\int \cos\sqrt{x}\ dx = 2y\sin y + 2\cos y + C = 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + C$.

38. Posons $x = -t^2$, alors $dx = -2t\ dt$. Par conséquent, $\int t^3e^{-t^2}\ dt = \int(-t^2)e^{-t^2}(\tfrac{1}{2})(-2t\ dt) = \tfrac{1}{2}\int xe^x\ dx$. Intégrons maintenant par parties en

posant $u = x,\ dv = e^x\ dx,\ du = dx,\ v = e^x$, ce qui donnera

$\tfrac{1}{2}\int xe^x\ dx = \tfrac{1}{2}(xe^x - \int e^x\ dx) = \tfrac{1}{2}xe^x - \tfrac{1}{2}e^x + C = -\tfrac{1}{2}(1-x)e^x + C = -\tfrac{1}{2}(1+t^2)e^{-t^2} + C$.

39. Posons $x = \theta^2$, alors $dx = 2\theta\ d\theta$. Par conséquent, $\int_{\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{\pi}} \theta^3\cos(\theta^2)\ d\theta = \int_{\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{\pi}} \theta^2\cos(\theta^2)\cdot\tfrac{1}{2}(2\theta\ d\theta) = \tfrac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi} x\cos x\ dx$. Intégrons

maintenant par parties en posant $u = x,\ dv = \cos x\ dx,\ du = dx,\ v = \sin x$, ce qui donnera

 © Groupe Modulo inc., 2013

$$\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi} x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\left([x\sin x]_{\pi/2}^{\pi} - \int_{\pi/2}^{\pi}\sin x\,dx\right) = \frac{1}{2}[x\sin x+\cos x]_{\pi/2}^{\pi}$$
$$= \frac{1}{2}(\pi\sin\pi+\cos\pi) - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}(\pi\cdot 0-1) - \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}\cdot 1+0) = -\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$$

40. Posons $x = \cos t$, alors $dx = -\sin t\,dt$. Par conséquent, $\int_0^{\pi} e^{\cos t}\sin 2t\,dt = \int_0^{\pi} e^{\cos t}(2\sin t\cos t)dt = \int_1^{-1} e^x\cdot 2x(-dx) = 2\int_{-1}^{1} xe^x\,dx$. Intégrons maintenant par parties en posant $u = x$, $dv = e^x\,dx$, $du = dx$, $v = e^x$, ce qui donnera

$$2\int_{-1}^{1} xe^x\,dx = 2\left([xe^x]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^x\,dx\right) = 2\left(e^1+e^{-1}-[e^x]_{-1}^{1}\right) = 2(e+e^{-1}-[e^1-e^{-1}]) = 2(2e^{-1}) = 4/e\,.$$

41. Posons $y = 1 + x$, alors $dy = dx$. Par conséquent, $\int x\ln(1+x)dx = \int (y-1)\ln y\,dy$. Intégrons maintenant par parties avec en posant $u = \ln y$, $dv = (y-1)dy$, $du = \frac{1}{y}dy$, $v = \frac{1}{2}y^2 - y$, ce qui donnera

$$\int (y-1)\ln y\,dy = (\tfrac{1}{2}y^2-y)\ln y - \int(\tfrac{1}{2}y-1)dy = \tfrac{1}{2}y(y-2)\ln y - \tfrac{1}{4}y^2 + y + C$$
$$= \tfrac{1}{2}(1+x)(x-1)\ln(1+x) - \tfrac{1}{4}(1+x)^2 + 1 + x + C$$

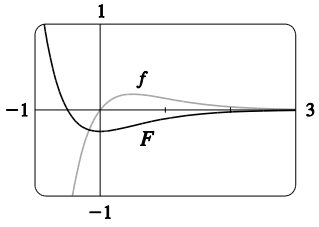
qui peut être exprimé comme suit : $\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(1+x) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} + C$.

42. Posons $y = \ln x$, alors $dy = \frac{1}{x}dx \;\Rightarrow\; dx = x\,dy = e^y\,dy$. Par conséquent,

$$\int \sin(\ln x)dx = \int \sin y\; e^y dy = \tfrac{1}{2}e^y(\sin y - \cos y) + C \quad \text{[voir l'exemple 4]} \quad = \tfrac{1}{2}x[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C\,.$$

43. Posons $u = x$, $dv = e^{-2x}dx \;\Rightarrow\; du = dx$, $v = -\frac{1}{2}e^{-2x}$. Alors,

$\int xe^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}xe^{-2x} + \int \frac{1}{2}e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C$. Le graphique montre que cette réponse est vraisemblable, puisque la fonction F atteint un minimum à l'endroit où la valeur de f change de négative à positive. De plus, la fonction F est croissante là où la valeur de f est positive et décroissante là où la valeur de f est négative.

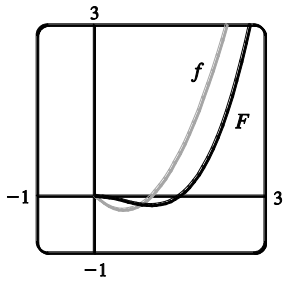


44. Posons $u = \ln x$, $dv = x^{3/2}dx \;\Rightarrow\; du = \frac{1}{x}dx$, $v = \frac{2}{5}x^{5/2}$. Alors,

$$\int x^{3/2}\ln x\,dx = \tfrac{2}{5}x^{5/2}\ln x - \tfrac{2}{5}\int x^{3/2}dx = \tfrac{2}{5}x^{5/2}\ln x - (\tfrac{2}{5})^2 x^{5/2} + C$$
$$= \tfrac{2}{5}x^{5/2}\ln x - \tfrac{4}{25}x^{5/2} + C$$

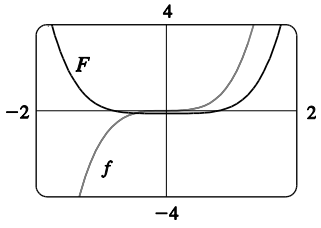
 © Groupe Modulo inc., 2013

Le graphique montre que cette réponse est vraisemblable, puisque la fonction F atteint un minimum à l'endroit où la valeur de f change de négative à positive.



45. Posons $u = \frac{1}{2}x^2$, $dv = 2x\sqrt{1+x^2}\,dx \;\Rightarrow\; du = x\,dx$, $v = \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2}$. Alors,

$$\begin{aligned}\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx &= \tfrac{1}{2}x^2\left[\tfrac{2}{3}(1+x^2)^{3/2}\right] - \tfrac{2}{3}\int x(1+x^2)^{3/2}\,dx \\ &= \tfrac{1}{3}x^2(1+x^2)^{3/2} - \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{2}{5}\cdot\tfrac{1}{2}(1+x^2)^{5/2} + C \\ &= \tfrac{1}{3}x^2(1+x^2)^{3/2} - \tfrac{2}{15}(1+x^2)^{5/2} + C\end{aligned}$$



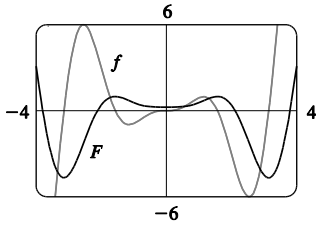
Le graphique montre que cette réponse est vraisemblable, puisque la fonction F est croissante là où la valeur de f est positive et décroissante là où la valeur de f est négative. Remarquez également que f est une fonction impaire et que F est une fonction paire.

Autre méthode : En posant $u = 1 + x^2$, nous obtenons $\frac{1}{5}(1+x^2)^{5/2} - \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} + C$.

46. Tout d'abord, posons $u = x^2, dv = \sin 2x\,dx \;\Rightarrow\; du = 2x\,dx$, $v = -\frac{1}{2}\cos 2x$. Alors, $I = \int x^2 \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \int x\cos 2x\,dx$.

Ensuite, posons $U = x,\ dV = \cos 2x\,dx \;\Rightarrow\; dU = dx$, $V = \frac{1}{2}\sin 2x$,

donc $\int x\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}x\sin 2x - \int \frac{1}{2}\sin 2x\,dx = \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$. Par conséquent, $I = -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$.



Le graphique montre que cette réponse est vraisemblable, puisque la fonction F est croissante là où la valeur de f est positive et décroissante là où la valeur de f est négative. Remarquez également que f est une fonction impaire et que F est une fonction paire.

 © Groupe Modulo inc., 2013

47. a) En posant $n = 2$ dans la formule de l'exemple 6, nous obtenons $\int \sin^2 x\,dx = -\frac{1}{2}\cos x \sin x + \frac{1}{2}\int 1\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$.

b) $\int \sin^4 x\,dx = -\frac{1}{4}\cos x \sin^3 x + \frac{3}{4}\int \sin^2 x\,dx = -\frac{1}{4}\cos x \sin^3 x + \frac{3}{8}x - \frac{3}{16}\sin 2x + C$.

48. a) Posons $u = \cos^{n-1} x$, $dv = \cos x\,dx \quad \Rightarrow \quad du = -(n-1)\cos^{n-2} x \sin x\,dx$, $v = \sin x$ selon la formule 2 :

$$\begin{aligned}\int \cos^n x\,dx &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x \sin^2 x\,dx \\ &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x(1-\cos^2 x)dx \\ &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\,dx - (n-1)\int \cos^n x\,dx\end{aligned}$$

En isolant $\int \cos^n x\,dx$, nous obtenons $n\int \cos^n x\,dx = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)\int \cos^{n-2} x\,dx$ d'où

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$$

b) En posant $n = 2$ à la sous-question a), nous obtenons $\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\cos x \sin x + \frac{1}{2}\int 1\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$.

c) $\int \cos^4 x\,dx = \frac{1}{4}\cos^3 x \sin x + \frac{3}{4}\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{4}\cos^3 x \sin x + \frac{3}{8}x + \frac{3}{16}\sin 2x + C$

49. a) Selon la formule de l'exemple 6, $\int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx$. Selon la fromule 6,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx &= \left[-\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n}\right]_0^{\pi/2} + \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\,dx \\ &= (0-0) + \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\,dx\end{aligned}$$

b) En posant $n = 3$ à la sous-question a), nous obtenons $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\,dx = \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = [-\frac{2}{3}\cos x]_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}$.

En posant $n = 5$ à la sous-question a), nous obtenons $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x\,dx = \frac{4}{5}\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\,dx = \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{15}$.

c) Selon la sous-question b), la formule est vraie pour $n = 1$ (c'est-à-dire $2n + 1 = 3$). Supposons qu'elle soit vérifiée pour une valeur $k \geq 1$. Alors, $\int_0^{\pi/2} \sin^{2k+1} x\,dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2k)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2k+1)}$. Selon la formule de l'exemple 6,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin^{2k+3} x\,dx &= \frac{2k+2}{2k+3}\int_0^{\pi/2} \sin^{2k+1} x\,dx = \frac{2k+2}{2k+3}\cdot\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2k)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2k+1)} \\ &= \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2k)[2(k+1)]}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2k+1)[2(k+1)+1]},\end{aligned}$$

Ce qui montre que la formule est vérifiée pour $n = k + 1$. Par l'axiome d'induction, nous concluons que la formule est valide pour tout $n \geq 1$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

50. En utilisant la sous-question 49 a), la formule est vérifiée pour $n = 1$, puisque $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} 1\, dx = \frac{1}{2}[x]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$. Supposons maintenant qu'elle soit vérifiée pour une valeur $k \geq 1$. Alors, $\int_0^{\pi/2} \sin^{2k} x\, dx = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2k)}\dfrac{\pi}{2}$. Selon la sous-question 49 a),

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin^{2(k+1)} x\, dx &= \frac{2k+1}{2k+2}\int_0^{\pi/2} \sin^{2k} x\, dx = \frac{2k+1}{2k+2}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2k)}\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2k-1)(2k+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2k)(2k+2)}\cdot\frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

Cela montre que la formule est vérifiée pour $n = k + 1$. Par l'axiome d'induction, nous concluons que la formule est valide pour tout $n \geq 1$.

51. Posons $u = (\ln x)^n$, $dv = dx \;\Rightarrow\; du = n(\ln x)^{n-1}(dx/x)$, $v = x$. Selon la formule 2,

$$\int (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - \int nx(\ln x)^{n-1}(dx/x) = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1} dx.$$

52. Posons $u = x^n$, $dv = e^x dx \;\Rightarrow\; du = nx^{n-1}dx$, $v = e^x$. Selon la formule 2, $\int x^n e^x dx = x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x dx$

53. $$\begin{aligned}\int \tan^n x\, dx &= \int \tan^{n-2} x \tan^2 x dx = \int \tan^{n-2} x(\sec^2 x - 1)dx = \int \tan^{n-2} x \sec^2 x\, dx - \int \tan^{n-2} x\, dx \\ &= I - \int \tan^{n-2} x\, dx.\end{aligned}$$

Posons $u = \tan^{n-2} x, dv = \sec^2 x\, dx \;\Rightarrow\; du = (n-2)\tan^{n-3} x \sec^2 x\, dx$, $v = \tan x$. Alors, selon la formule 2,

$$\begin{aligned} I &= \tan^{n-1} x - (n-2)\int \tan^{n-2} x \sec^2 x\, dx \\ 1I &= \tan^{n-1} x - (n-2)I \\ (n-1)I &= \tan^{n-1} x \\ I &= \frac{\tan^{n-1} x}{n-1}\end{aligned}$$

Si nous retournons à l'intégrale initiale, $\int \tan^n x\, dx = \dfrac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x\, dx$.

54. Posons $u = \sec^{n-2} x, dv = \sec^2 x\, dx \;\Rightarrow\; du = (n-2)\sec^{n-3} x \sec x \tan x\, dx$, $v = \tan x$. Alors, selon la formule 2,

$$\begin{aligned}\int \sec^n x\, dx &= \tan x \sec^{n-2} x - (n-2)\int \sec^{n-2} x \tan^2 x\, dx \\ &= \tan x \sec^{n-2} x - (n-2)\int \sec^{n-2} x(\sec^2 x - 1)dx \\ &= \tan x \sec^{n-2} x - (n-2)\int \sec^n x\, dx + (n-2)\int \sec^{n-2} x\, dx\end{aligned}$$

donc $(n-1)\int \sec^n x\, dx = \tan x \sec^{n-2} x + (n-2)\int \sec^{n-2} x\, dx$. Si $n - 1 \neq 0$, alors, $\int \sec^n x\, dx = \dfrac{\tan x \sec^{n-2} x}{n-1} + \dfrac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x dx$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

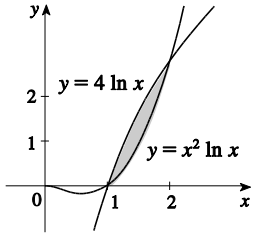
55. En appliquant à plusieurs reprises la formule de réduction utilisée dans l'exercice 51, nous obtenons

$$\begin{aligned}\int (\ln x)^3 dx &= x(\ln x)^3 - 3\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^3 - 3[x(\ln x)^2 - 2\int (\ln x)^1 dx] \\ &= x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6[x(\ln x)^1 - 1\int (\ln x)^0 dx] \\ &= x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6x\ln x - 6\int 1\, dx = x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6x\ln x - 6x + C\end{aligned}$$

56. En appliquant à plusieurs reprises la formule de réduction utilisée dans l'exercice 52, nous obtenons

$$\begin{aligned}\int x^4 e^x dx &= x^4 e^x - 4\int x^3 e^x dx = x^4 e^x - 4\left(x^3 e^x - 3\int x^2 e^x dx\right) \\ &= x^4 e^x - 4x^3 e^x + 12\left(x^2 e^x - 2\int x^1 e^x dx\right) = x^4 e^x - 4x^3 e^x + 12x^2 e^x - 24\left(x^1 e^x - \int x^0 e^x dx\right) \\ &= x^4 e^x - 4x^3 e^x + 12x^2 e^x - 24xe^x + 24e^x + C \quad [\text{ou } e^x(x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + C]\end{aligned}$$

57. Les courbes $y = x^2 \ln x$ et $y = 4\ln x$ se croisent lorsque $x^2 \ln x = 4\ln x \iff x^2 \ln x - 4\ln x = 0 \iff (x^2 - 4)\ln x = 0 \iff x = 1$ ou 2 [puisque $x > 0$]. Pour $1 < x < 2$, $4 \ln x > x^2 \ln x$. Par conséquent, aire $= \int_1^2 (4\ln x - x^2 \ln x)dx = \int_1^2 [(4 - x^2)\ln x]dx$. Soit $u = \ln x$, $dv = (4 - x^2)dx \implies du = \frac{1}{x}dx, v = 4x - \frac{1}{3}x^3$. Alors,



$$\begin{aligned}\text{aire} &= [(\ln x)(4x - \tfrac{1}{3}x^3)]_1^2 - \int_1^2 \left[(4x - \tfrac{1}{3}x^3)\frac{1}{x}\right]dx = (\ln 2)(\tfrac{16}{3}) - 0 - \int_1^2 (4 - \tfrac{1}{3}x^2)dx \\ &= \tfrac{16}{3}\ln 2 - [4x - \tfrac{1}{9}x^3]_1^2 = \tfrac{16}{3}\ln 2 - (\tfrac{64}{9} - \tfrac{35}{9}) = \tfrac{16}{3}\ln 2 - \tfrac{29}{9}\end{aligned}$$

58. Les courbes $y = x^2 e^{-x}$ et $y = xe^{-x}$ se croisent lorsque $x^2 e^{-x} = xe^{-x} \iff x^2 - x = 0 \iff x(x-1) = 0 \iff x = 0$ ou 1.

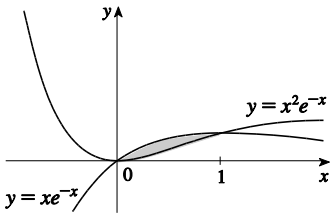
Pour $0 < x < 1$, $xe^{-x} > x^2 e^{-x}$. Par conséquent, aire $= \int_0^1 (xe^{-x} - x^2 e^{-x})dx = \int_0^1 (x - x^2)e^{-x}dx$.

Soit $u = x - x^2$, $dv = e^{-x}dx \implies du = (1 - 2x)dx$, $v = -e^{-x}$. Alors, aire $= [(x - x^2)(-e^{-x})]_0^1 - \int_0^1 [-e^{-x}(1 - 2x)]dx = 0 + \int_0^1 (1 - 2x)e^{-x}dx$.

Maintenant, soit $U = 1 - 2x$, $dV = e^{-x}dx \implies dU = -2dx$, $V = -e^{-x}$. Donc,

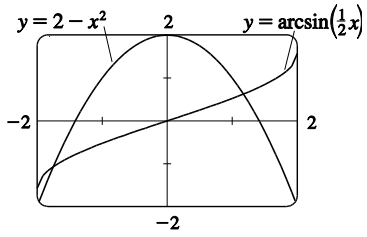
$$\text{aire} = [(1 - 2x)(-e^{-x})]_0^1 - \int_0^1 2e^{-x}dx = e^{-1} + 1 - [-2e^{-x}]_0^1 = e^{-1} + 1 + 2(e^{-1} - 1) = 3e^{-1} - 1 = \frac{3}{e} - 1.$$

 © Groupe Modulo inc., 2013



59. Les courbes $y = \arcsin(\frac{1}{2}x)$ et $y = 2 - x^2$ se croisent en $x = a \approx -1{,}751\ 19$ et en $x = b \approx 1{,}172\ 10$. Le graphique montre que l'aire de la région délimitée par les courbes est donnée par $A = \int_a^b [(2 - x^2) - \arcsin(\frac{1}{2}x)]dx = [2x - \frac{1}{3}x^3]_a^b - \int_a^b \arcsin(\frac{1}{2}x)dx$.

Soit $u = \arcsin(\frac{1}{2}x)$, $dv = dx \quad \Rightarrow \quad du = \dfrac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{2}x)^2}} \cdot \dfrac{1}{2}dx$, $v = x$.

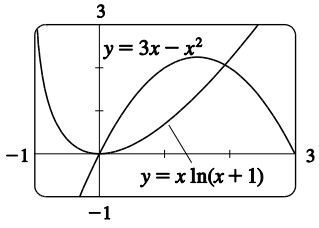


Alors,

$$A = \left[2x - \frac{1}{3}x^3\right]_a^b - \left\{\left[x\arcsin\left(\frac{1}{2}x\right)\right]_a^b - \int_a^b \frac{x}{2\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}}dx\right\}$$
$$= \left[2x - \tfrac{1}{3}x^3 - x\arcsin(\tfrac{1}{2}x) - 2\sqrt{1-\tfrac{1}{4}x^2}\right]_a^b \approx 3{,}999\ 26$$

60. Les courbes $y = x\ln(x+1)$ et $y = 3x - x^2$ se croisent en $x = 0$ et en $x = a \approx 1{,}926\ 27$. Le graphique montre que l'aire de la région délimitée par les courbes est donnée par $A = \int_0^a [(3x - x^2) - x\ln(x+1)]dx = [\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3]_0^a - \int_0^a x\ln(x+1)dx$. Soit $u = \ln(x+1)$,

$dv = xdx \quad \Rightarrow \quad du = \dfrac{1}{x+1}dx, v = \frac{1}{2}x^2$.



Alors,

$$A = \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^a - \left\{\left[\frac{1}{2}x^2\ln(x+1)\right]_0^a - \frac{1}{2}\int_0^a \frac{x^2}{x+1}dx\right\}$$
$$= \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^a - \left[\frac{1}{2}x^2\ln(x+1)\right]_0^a + \frac{1}{2}\int_0^a \left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$= [\tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2\ln(x+1) + \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}\ln|x+1|]_0^a \approx 1,692\ 60$$

61. $V = \int_0^1 2\pi x\cos(\pi x/2)dx$. Soit $u = x, dv = \cos(\pi x/2)dx \Rightarrow du = dx$, $v = \frac{2}{\pi}\sin(\pi x/2)$.

$$V = 2\pi\left[\frac{2}{\pi}x\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]_0^1 - 2\pi\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx = 2\pi\left(\frac{2}{\pi}-0\right) - 4\left[-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]_0^1 = 4 + \frac{8}{\pi}(0-1) = 4 - \frac{8}{\pi}.$$

62. Volume $= \int_0^1 2\pi x(e^x - e^{-x})dx = 2\pi\int_0^1 (xe^x - xe^{-x})dx = 2\pi\left[\int_0^1 xe^x dx - \int_0^1 xe^{-x}dx\right]$ [en intégrant par parties chaque intégrale]
$= 2\pi[(xe^x - e^x) - (-xe^{-x} - e^{-x})]_0^1 = 2\pi[2/e - 0] = 4\pi/e$

63. Volume $= \int_{-1}^0 2\pi(1-x)e^{-x}dx$. Soit $u = 1-x, dv = e^{-x}dx \Rightarrow du = -dx$, $v = -e^{-x}$.

$$V = 2\pi[(1-x)(-e^{-x})]_{-1}^0 - 2\pi\int_{-1}^0 e^{-x}dx = 2\pi[(x-1)(e^{-x}) + e^{-x}]_{-1}^0 = 2\pi[xe^{-x}]_{-1}^0 = 2\pi(0+e) = 2\pi e$$

64. a) En utilisant la méthode des coquilles cylindriques autour de l'axe des y :

$$V = \int_1^2 2\pi x\ln x\ dx \quad \begin{bmatrix} u = \ln x, & dv = x\ dx \\ du = \frac{1}{x}dx, & v = \frac{1}{2}x^2 \end{bmatrix}$$
$$= 2\pi\left\{[\tfrac{1}{2}x^2\ln x]_1^2 - \int_1^2 \tfrac{1}{2}x\ dx\right\} = 2\pi\{(2\ln 2 - 0) - [\tfrac{1}{4}x^2]_1^2\} = 2\pi(2\ln 2 - \tfrac{3}{4})$$

b) En utilisant la méthode des disques autour de l'axe des x :

$$V = \int_1^2 \pi(\ln x)^2 dx \quad \begin{bmatrix} u = (\ln x)^2, & dv = dx \\ du = 2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx, & v = x \end{bmatrix}$$
$$= \pi\left\{[x(\ln x)^2]_1^2 - \int_1^2 2\ln x\ dx\right\} \quad \begin{bmatrix} u = \ln x, & dv = dx \\ du = \frac{1}{x}dx, & v = x \end{bmatrix}$$
$$= \pi\left\{2(\ln 2)^2 - 2\left([x\ln x]_1^2 - \int_1^2 dx\right)\right\} = \pi\{2(\ln 2)^2 - 4\ln 2 + 2[x]_1^2\}$$
$$= \pi[2(\ln 2)^2 - 4\ln 2 + 2] = 2\pi[(\ln 2)^2 - 2\ln 2 + 1]$$

65. $f_{moy} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{\pi/4-0}\int_0^{\pi/4} x\sec^2 x\ dx \quad \begin{bmatrix} u = x, & dv = \sec^2 x\ dx \\ du = dx, & v = \tan x \end{bmatrix}$
$$= \frac{4}{\pi}\left\{[x\tan x]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4}\tan x\ dx\right\} = \frac{4}{\pi}\left\{\frac{\pi}{4} - [\ln|\sec x|]_0^{\pi/4}\right\} = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}\right)$$
$$= 1 - \tfrac{4}{\pi}\ln\sqrt{2} \text{ ou } 1 - \tfrac{2}{\pi}\ln 2$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

66. Puisque $v(t) > 0$, la fusée atteindra une altitude de $A = \int_0^{60} v(t)dt$ après 60 secondes.

$$A = \int_0^{60}\left[-gt - v_e \ln\left(\frac{m-rt}{m}\right)\right]dt = -g[\tfrac{1}{2}t^2]_0^{60} - v_e\left[\int_0^{60}\ln(m-rt)dt - \int_0^{60}\ln m\ dt\right]$$
$$= -g(1800) + v_e(\ln m)(60) - v_e\int_0^{60}\ln(m-rt)dt$$

Soit $u = \ln(m - rt)$, $dv = dt \quad \Rightarrow \quad du = \dfrac{1}{m-rt}(-r)dt$, $v = t$. Alors,

$$\int_0^{60}\ln(m-rt)dt = [t\ln(m-rt)]_0^{60} + \int_0^{60}\frac{rt}{m-rt}dt = 60\ln(m-60r) + \int_0^{60}\left(-1 + \frac{m}{m-rt}\right)dt$$
$$= 60\ln(m-60r) + \left[-t - \frac{m}{r}\ln(m-rt)\right]_0^{60} = 60\ln(m-60r) - 60 - \frac{m}{r}\ln(m-60r) + \frac{m}{r}\ln m$$

Donc, $A = -1800g + 60v_e \ln m - 60v_e \ln(m-60r) + 60v_e + \dfrac{m}{r}v_e \ln(m-60r) - \dfrac{m}{r}v_e \ln m$. En substituant $g = 9{,}8$, $m = 30\ 000$, $r = 160$ et $v_e = 3000$, nous obtenons $A \approx 14\ 844$ m.

67. Puisque $v(t) > 0$ pour tout t, la distance recherchée est $s(t) = \int_0^t v(w)dw = \int_0^t w^2 e^{-w}dw$.

Tout d'abord, soit $u = w^2$, $dv = e^{-w}dw \quad \Rightarrow \quad du = 2w\ dw$, $v = -e^{-w}$. Alors, $s(t) = [-w^2e^{-w}]_0^t + 2\int_0^t we^{-w}dw$.

Ensuite, soit $U = w$, $dV = e^{-w}dw \quad \Rightarrow \quad dU = dw$, $V = -e^{-w}$. Alors,

$$s(t) = -t^2e^{-t} + 2\left([-we^{-w}]_0^t + \int_0^t e^{-w}dw\right) = -t^2e^{-t} + 2(-te^{-t} + 0 + [-e^{-w}]_0^t)$$
$$= -t^2e^{-t} + 2(-te^{-t} - e^{-t} + 1) = -t^2e^{-t} - 2te^{-t} - 2e^{-t} + 2 = 2 - e^{-t}(t^2 + 2t + 2) = 2 - \frac{t^2+2t+2}{e^t} \text{ mètres}$$

68. Considérons que $f(0) = g(0) = 0$. Posons $u = f(x)$ et $dv = g''(x)dx \quad \Rightarrow \quad du = f'(x)\ dx, v = g'(x)$.

Alors, $\int_0^a f(x)g''(x)dx = [f(x)g'(x)]_0^a - \int_0^a f'(x)g'(x)dx = f(a)g'(a) - \int_0^a f'(x)g'(x)dx$.

Maintenant, posons $U = f'(x)$ et $dV = g'(x)dx \quad \Rightarrow \quad dU = f''(x)dx$ et $V = g(x)$;

donc, $\int_0^a f'(x)g'(x)dx = [f'(x)g(x)]_0^a - \int_0^a f''(x)g(x)dx = f'(a)g(a) - \int_0^a f''(x)g(x)dx$. En combinant ces deux résultats, nous obtenons $\int_0^a f(x)g''(x)dx = f(a)g'(a) - f'(a)g(a) + \int_0^a f''(x)g(x)dx$.

69. Pour $I = \int_1^4 xf''(x)dx$, posons $u = x$, $dv = f''(x)dx \quad \Rightarrow \quad du = dx$, $v = f'(x)$.

Alors, $I = [xf'(x)]_1^4 - \int_1^4 f'(x)dx = 4 \cdot f'(4) - 1 \cdot f'(1) - [f(4) - f(1)] = 4 \cdot 3 - 1 \cdot 5 - (7 - 2) = 12 - 5 - 5 = 2$.

Le fait que la fonction f'' soit continue assure l'existence de I.

 © Groupe Modulo inc., 2013

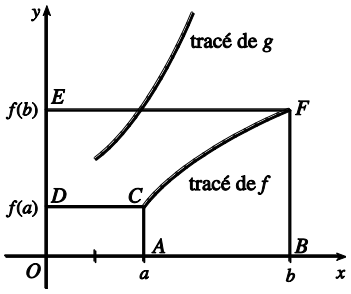
70. a) Posons $g(x) = x$ et $g'(x) = 1$ dans la formule 1.

b) Selon la sous-question a), $\int_a^b f(x)dx = bf(b) - af(a) - \int_a^b xf'(x)dx$. Maintenant, posons $y = f(x)$, de sorte que $x = g(y)$ et $dy = f'(x)\,dx$. Alors, $\int_a^b xf'(x)dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)dy$. Ce qui complète la preuve demandée.

c) Le résultat en b) permet de poser que l'aire A de la région $ABFC$ est

$$A = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)dy$$

= (aire du rectangle $OBFE$) − (aire du rectangle $OACD$) − (aire de la région $DCFE$)



d) Nous avons $f(x) = \ln x$, donc $f^{-1}(x) = e^x$, et puisque $g = f^{-1}$, nous avons $g(y) = e^y$.

Selon le résultat b), $\int_1^e \ln x\,dx = e\ln e - 1\ln 1 - \int_{\ln 1}^{\ln e} e^y dy = e - \int_0^1 e^y dy = e - [e^y]_0^1 = e - (e-1) = 1$.

71. En utilisant la formule qui s'applique aux volumes de révolution ainsi que le graphique, nous énonçons

que $\text{Volume} = \int_0^d \pi b^2 dy - \int_0^c \pi a^2 dy - \int_c^d \pi[g(y)]^2 dy = \pi b^2 d - \pi a^2 c - \int_c^d \pi[g(y)]^2 dy$.

Soit $y = f(x)$, ce qui donne $dy = f'(x)\,dx$ et $g(y) = x$, de sorte que $V = \pi b^2 d - \pi a^2 c - \pi\int_a^b x^2 f'(x)dx$.

Maintenant, effectuons une intégration par parties avec $u = x^2$ et $dv = f'(x)dx \;\Rightarrow\; du = 2x\,dx$, $v = f(x)$

et $\int_a^b x^2 f'(x)dx = [x^2 f(x)]_a^b - \int_a^b 2x f(x)dx = b^2 f(b) - a^2 f(a) - \int_a^b 2x f(x)dx$,

mais $f(a) = c$ et $f(b) = d \;\Rightarrow\; V = \pi b^2 d - \pi a^2 c - \pi\left[b^2 d - a^2 c - \int_a^b 2xf(x)dx\right] = \int_a^b 2\pi\, xf(x)dx$.

72. a) Puisque pour $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \sin x \le 1$, donc $\sin^{2n+2} x \le \sin^{2n+1} x \le \sin^{2n} x$. Par conséquent, selon la deuxième propriété de l'intégrale, $I_{2n+2} \le I_{2n+1} \le I_{2n}$.

b) En substituant le résultat de la sous-question a) directement dans le résultat de l'exercice 50, nous obtenons

$$\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} = \frac{\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot[2(n+1)-1]}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot[2(n+1)]}\dfrac{\pi}{2}}{\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}\dfrac{\pi}{2}} = \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} = \frac{2n+1}{2n+2}$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

c) Divisons le résultat de la sous-question a) par I_{2n}. Les inégalités sont préservées puisque la valeur de I_{2n} est positive :

$\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} \le \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \le \frac{I_{2n}}{I_{2n}}$. Maintenant, selon la sous-question b), le terme du membre de gauche de l'égalité est égal à $\frac{2n+1}{2n+2}$;

l'expression devient donc $\frac{2n+1}{2n+2} \le \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \le 1$. Or, $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n+2} \overset{\text{H}}{=} \lim_{n\to\infty} 1 = 1$, donc, selon le théorème du sandwich, $\lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$.

d) En substituant les résultats des exercices 49 et 50 directement dans le résultat de la sous-question c), nous obtenons

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2n+1)}}{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}\frac{\pi}{2}} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2n+1)}\right]\left[\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}\left(\frac{2}{\pi}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2}{\pi} \quad \text{[après avoir transformé l'égalité]}$$

En multipliant les deux membres de l'égalité par $\frac{\pi}{2}$, nous obtenons le *produit de Wallis* :

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots$$

e) L'aire du $k^{\text{ème}}$ rectangle est k. À la $2n^{\text{ème}}$ étape, l'aire est augmentée de $2n - 1$ à $2n$ en multipliant la largeur par $\frac{2n}{2n-1}$ et, à la $(2n + 1)^{\text{ème}}$ étape, l'aire est augmentée de $2n$ à $2n + 1$ en multipliant la longueur par $\frac{2n+1}{2n}$. Ces deux étapes multiplient le rapport de la largeur et de la longueur par $\frac{2n}{2n-1}$ et par $\frac{1}{(2n+1)/(2n)} = \frac{2n}{2n+1}$ respectivement. Donc, selon la sous-question d), la limite des rapports est $\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots = \frac{\pi}{2}$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

3.2 Les intégrales de fonctions trigonométriques

Les symboles $\overset{\sin}{=}$ et $\overset{\cos}{=}$ dénotent respectivement l'utilisation des substitutions $\{u = \sin x,\ du = \cos x\,dx\}$ et $\{u = \cos x,\ du = -\sin x\,dx\}$.

Les symboles $\overset{\tan}{=}$ et $\overset{\sec}{=}$ dénotent respectivement l'utilisation des substitutions $\{u = \tan x,\ du = \sec^2 x\,dx\}$ et $\{u = \sec x,\ du = \sec x \tan x\,dx\}$.

Les symboles $\overset{\cot}{=}$ et $\overset{\csc}{=}$ dénotent respectivement l'utilisation des substitutions $\{u = \cot x,\ du = -\csc^2 x\,dx\}$ et $\{u = \csc x,\ du = -\csc x \cot x\,dx\}$.

1. $$\int \sin^2 x \cos^3 x\,dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x\,dx = \int \sin^2 x(1-\sin^2 x)\cos x\,dx$$
$$\overset{\sin}{=} \int u^2(1-u^2)du = \int (u^2-u^4)du = \tfrac{1}{3}u^3 - \tfrac{1}{5}u^5 + C = \tfrac{1}{3}\sin^3 x - \tfrac{1}{5}\sin^5 x + C$$

2. $$\int \sin^3\theta \cos^4\theta\,d\theta = \int \sin^2\theta \cos^4\theta \sin\theta\,d\theta = \int (1-\cos^2\theta)\cos^4\theta \sin\theta\,d\theta$$
$$\overset{\cos}{=} \int (1-u^2)u^4(-du) = \int (u^6-u^4)du = \tfrac{1}{7}u^7 - \tfrac{1}{5}u^5 + C = \tfrac{1}{7}\cos^7\theta - \tfrac{1}{5}\cos^5\theta + C$$

3. $$\int_0^{\pi/2} \sin^7\theta\cos^5\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^7\theta\cos^4\theta\cos\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^7\theta(1-\sin^2\theta)^2\cos\theta\,d\theta$$
$$\overset{\sin}{=} \int_0^1 u^7(1-u^2)^2\,du = \int_0^1 u^7(1-2u^2+u^4)du = \int_0^1 (u^7-2u^9+u^{11})du$$
$$= \left[\frac{1}{8}u^8 - \frac{1}{5}u^{10} + \frac{1}{12}u^{12}\right]_0^1 = \left(\frac{1}{8}-\frac{1}{5}+\frac{1}{12}\right) - 0 = \frac{15-24+10}{120} = \frac{1}{120}$$

4. $$\int_0^{\pi/2} \sin^5 x\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin^4 x \sin x\,dx = \int_0^{\pi/2} (1-\cos^2 x)^2 \sin x\,dx \overset{\cos}{=} \int_1^0 (1-u^2)^2(-du)$$
$$= \int_0^1 (1-2u^2+u^4)du = \left[u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5\right]_0^1 = \left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right) - 0 = \frac{15-10+3}{15} = \frac{8}{15}$$

5. Posons $y = \pi x$, donc $dy = \pi\,dx$ et

$$\int \sin^2(\pi x)\cos^5(\pi x)dx = \tfrac{1}{\pi}\int \sin^2 y \cos^5 y\,dy = \tfrac{1}{\pi}\int \sin^2 y \cos^4 y \cos y\,dy$$
$$= \tfrac{1}{\pi}\int \sin^2 y(1-\sin^2 y)^2 \cos y\,dy \overset{\sin}{=} \tfrac{1}{\pi}\int u^2(1-u^2)^2\,du = \tfrac{1}{\pi}\int (u^2-2u^4+u^6)du$$
$$= \tfrac{1}{\pi}(\tfrac{1}{3}u^3 - \tfrac{2}{5}u^5 + \tfrac{1}{7}u^7) + C = \tfrac{1}{3\pi}\sin^3 y - \tfrac{2}{5\pi}\sin^5 y + \tfrac{1}{7\pi}\sin^7 y + C$$
$$= \tfrac{1}{3\pi}\sin^3(\pi x) - \tfrac{2}{5\pi}\sin^5(\pi x) + \tfrac{1}{7\pi}\sin^7(\pi x) + C$$

6. Posons $y = \sqrt{x}$, de sorte que $dy = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx$ et $dx = 2y\,dy$. Alors,

$$\int \frac{\sin^3\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{\sin^3 y}{y}(2y\,dy) = 2\int \sin^3 y\,dy = 2\int \sin^2 y \sin y\,dy = 2\int (1-\cos^2 y)\sin y\,dy$$
$$\overset{\cos}{=} 2\int (1-u^2)(-du) = 2\int (u^2-1)du = 2(\tfrac{1}{3}u^3 - u) + C = \tfrac{2}{3}\cos^3 y - 2\cos y + C$$
$$= \tfrac{2}{3}\cos^3\left(\sqrt{x}\right) - 2\cos\sqrt{x} + C$$

7. $$\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\theta)d\theta \quad \text{[formule de bissection]}$$
$$= \tfrac{1}{2}[\theta + \tfrac{1}{2}\sin 2\theta]_0^{\pi/2} = \tfrac{1}{2}[(\tfrac{\pi}{2}+0) - (0+0)] = \tfrac{\pi}{4}$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

8. $\int_0^{2\pi} \sin^2(\frac{1}{3}\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}[1-\cos(2\cdot\frac{1}{3}\theta)]d\theta$ [formule de bissection]

$$= \frac{1}{2}\left[\theta - \frac{3}{2}\sin\left(\frac{2}{3}\theta\right)\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left[\left(2\pi - \frac{3}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) - 0\right] = \pi + \frac{3}{8}\sqrt{3}$$

9. $\int_0^{\pi} \cos^4(2t)dt = \int_0^{\pi} [\cos^2(2t)]^2 dt = \int_0^{\pi} [\frac{1}{2}(1+\cos(2\cdot 2t))]^2 dt$ [formule de bissection]

$$= \tfrac{1}{4}\int_0^{\pi} [1+2\cos 4t + \cos^2(4t)]dt = \tfrac{1}{4}\int_0^{\pi} [1+2\cos 4t + \tfrac{1}{2}(1+\cos 8t)]dt$$

$$= \tfrac{1}{4}\int_0^{\pi} (\tfrac{3}{2} + 2\cos 4t + \tfrac{1}{2}\cos 8t)dt = \tfrac{1}{4}[\tfrac{3}{2}t + \tfrac{1}{2}\sin 4t + \tfrac{1}{16}\sin 8t]_0^{\pi} = \tfrac{1}{4}[(\tfrac{3}{2}\pi + 0 + 0) - 0] = \tfrac{3}{8}\pi$$

10. $\int_0^{\pi} \sin^2 t \cos^4 t dt = \tfrac{1}{4}\int_0^{\pi} (4\sin^2 t\cos^2 t)\cos^2 t dt = \tfrac{1}{4}\int_0^{\pi} (2\sin t\cos t)^2 \tfrac{1}{2}(1+\cos 2t)dt$

$$= \tfrac{1}{8}\int_0^{\pi} (\sin 2t)^2(1+\cos 2t)dt = \tfrac{1}{8}\int_0^{\pi} (\sin^2 2t + \sin^2 2t\cos 2t)dt$$

$$= \tfrac{1}{8}\int_0^{\pi} \sin^2 2t\ dt + \tfrac{1}{8}\int_0^{\pi} \sin^2 2t\cos 2t\ dt = \tfrac{1}{8}\int_0^{\pi} \tfrac{1}{2}(1-\cos 4t)dt + \tfrac{1}{8}[\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}\sin^3 2t]_0^{\pi}$$

$$= \tfrac{1}{16}[t - \tfrac{1}{4}\sin 4t]_0^{\pi} + \tfrac{1}{8}(0-0) = \tfrac{1}{16}[(\pi - 0) - 0] = \tfrac{\pi}{16}$$

11. $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\cos^2 x\ dx = \int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{4}(4\sin^2 x\cos^2 x)dx = \int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{4}(2\sin x\cos x)^2 dx = \tfrac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \sin^2 2x\ dx$

$$= \tfrac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{2}(1-\cos 4x)dx = \tfrac{1}{8}\int_0^{\pi/2} (1-\cos 4x)dx = \tfrac{1}{8}[x - \tfrac{1}{4}\sin 4x]_0^{\pi/2} = \tfrac{1}{8}(\tfrac{\pi}{2}) = \tfrac{\pi}{16}$$

12. $\int_0^{\pi/2} (2-\sin\theta)^2 d\theta = \int_0^{\pi/2} (4 - 4\sin\theta + \sin^2\theta)d\theta = \int_0^{\pi/2} [4 - 4\sin\theta + \tfrac{1}{2}(1-\cos 2\theta)]d\theta$

$$= \int_0^{\pi/2} (\tfrac{9}{2} - 4\sin\theta - \tfrac{1}{2}\cos 2\theta)d\theta = [\tfrac{9}{2}\theta + 4\cos\theta - \tfrac{1}{4}\sin 2\theta]_0^{\pi/2}$$

$$= (\tfrac{9\pi}{4} + 0 - 0) - (0 + 4 - 0) = \tfrac{9}{4}\pi - 4$$

13. $\int t\sin^2 t\ dt = \int t[\tfrac{1}{2}(1-\cos 2t)]dt = \tfrac{1}{2}\int (t - t\cos 2t)dt = \tfrac{1}{2}\int t\ dt - \tfrac{1}{2}\int t\cos 2t\ dt$

$$= \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}t^2) - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}t\sin 2t - \int \tfrac{1}{2}\sin 2t\ dt\right) \quad \begin{bmatrix} u = t, & dv = \cos 2t\ dt \\ du = dt, & v = \frac{1}{2}\sin 2t \end{bmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{4}t^2 - \tfrac{1}{4}t\sin 2t + \tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{4}\cos 2t) + C = \tfrac{1}{4}t^2 - \tfrac{1}{4}t\sin 2t - \tfrac{1}{8}\cos 2t + C$$

14. Posons $u = \sin\theta$. Alors, $du = \cos\theta\, d\theta$ et

$$\int \cos\theta\cos^5(\sin\theta)d\theta = \int \cos^5 u\ du = \int (\cos^2 u)^2\cos u\ du = \int (1-\sin^2 u)^2\cos u\ du$$

$$= \int (1 - 2\sin^2 u + \sin^4 u)\cos u\ du = I$$

Maintenant, posons $x = \sin u$. Alors, $dx = \cos u\, du$ et

$$I = \int (1 - 2x^2 + x^4)dx = x - \tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + C = \sin u - \tfrac{2}{3}\sin^3 u + \tfrac{1}{5}\sin^5 u + C$$

$$= \sin(\sin\theta) - \tfrac{2}{3}\sin^3(\sin\theta) + \tfrac{1}{5}\sin^5(\sin\theta) + C$$

15. $\int \frac{\cos^5\alpha}{\sqrt{\sin\alpha}}d\alpha = \int \frac{\cos^4\alpha}{\sqrt{\sin\alpha}}\cos\alpha\, d\alpha = \int \frac{(1-\sin^2\alpha)^2}{\sqrt{\sin\alpha}}\cos\alpha\, d\alpha \overset{\sin}{=} \frac{(1-u^2)^2}{\sqrt{u}}du$

$$= \int \frac{1 - 2u^2 + u^4}{u^{1/2}}du = \int (u^{-1/2} - 2u^{3/2} + u^{7/2})du = 2u^{1/2} - \tfrac{4}{5}u^{5/2} + \tfrac{2}{9}u^{9/2} + C$$

$$= \tfrac{2}{45}u^{1/2}(45 - 18u^2 + 5u^4) + C = \tfrac{2}{45}\sqrt{\sin\alpha}(45 - 18\sin^2\alpha + 5\sin^4\alpha) + C$$

16. $I = \int x\sin^3 x\ dx$. Calculons tout d'abord

 © Groupe Modulo inc., 2013

$$\int \sin^3 x\, dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x\, dx \overset{\cos}{=} \int (1-u^2)(-du) = \int (u^2-1)du = \tfrac{1}{3}u^3 - u + C_1 = \tfrac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C_1 .$$

Maintenant, pour I, posons $u = x$, $dv = \sin^3 x \;\Rightarrow\; du = dx$, $v = \tfrac{1}{3}\cos^3 x - \cos x$, donc

$$\begin{aligned} I &= \tfrac{1}{3}x\cos^3 x - x\cos x - \int (\tfrac{1}{3}\cos^3 x - \cos x)dx = \tfrac{1}{3}x\cos^3 x - x\cos x - \tfrac{1}{3}\int \cos^3 x\, dx + \sin x \\ &= \tfrac{1}{3}x\cos^3 x - x\cos x - \tfrac{1}{3}(\sin x - \tfrac{1}{3}\sin^3 x) + \sin x + C \quad \text{[voir l'exemple 1]} \\ &= \tfrac{1}{3}x\cos^3 x - x\cos x + \tfrac{2}{3}\sin x + \tfrac{1}{9}\sin^3 x + C \end{aligned}$$

17. $$\begin{aligned} \int \cos^2 x \tan^3 x\, dx &= \int \frac{\sin^3 x}{\cos x}dx \overset{\cos}{=} \int \frac{(1-u^2)(-du)}{u} = \int \left[\frac{-1}{u} + u\right]du \\ &= -\ln|u| + \tfrac{1}{2}u^2 + C = \tfrac{1}{2}\cos^2 x - \ln|\cos x| + C \end{aligned}$$

18. $$\begin{aligned} \int \cot^5\theta \sin^4\theta d\theta &= \int \frac{\cos^5\theta}{\sin^5\theta}\sin^4\theta d\theta = \int \frac{\cos^5\theta}{\sin\theta}d\theta = \int \frac{\cos^4\theta}{\sin\theta}\cos\theta d\theta = \int \frac{(1-\sin^2\theta)^2}{\sin\theta}\cos\theta d\theta \\ &\overset{\sin}{=} \int \frac{(1-u^2)^2}{u}du = \int \frac{1-2u^2+u^4}{u}du = \int \left(\frac{1}{u} - 2u + u^3\right)du \\ &= \ln|u| - u^2 + \tfrac{1}{4}u^4 + C = \ln|\sin\theta| - \sin^2\theta + \tfrac{1}{4}\sin^4\theta + C \end{aligned}$$

19. $$\begin{aligned} \int \frac{\cos x + \sin 2x}{\sin x}dx &= \int \frac{\cos x + 2\sin x\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx + \int 2\cos x\, dx \overset{\sin}{=} \int \frac{1}{u}du + 2\sin x \\ &= \ln|u| + 2\sin x + C = \ln|\sin x| + 2\sin x + C \end{aligned}$$

Ou : Utilisons la formule $\int \cot x\, dx = \ln|\sin x| + C$.

20. $$\int \cos^2 x \sin 2x\, dx = 2\int \cos^3 x \sin x\, dx \overset{\cos}{=} -2\int u^3 du = -\tfrac{1}{2}u^4 + C = -\tfrac{1}{2}\cos^4 x + C$$

21. $$\int \tan x \sec^3 x\, dx = \int \tan x \sec x \sec^2 x\, dx \overset{\sec}{=} \int u^2 du = \tfrac{1}{3}u^3 + C = \tfrac{1}{3}\sec^3 x + C$$

22. $$\begin{aligned} \int \tan^2\theta \sec^4\theta d\theta &= \int \tan^2\theta \sec^2\theta \sec^2\theta d\theta = \int \tan^2\theta(\tan^2\theta + 1)\sec^2\theta d\theta \\ &\overset{\tan}{=} \int u^2(u^2+1)du = \int (u^4+u^2)du = \tfrac{1}{5}u^5 + \tfrac{1}{3}u^3 + C = \tfrac{1}{5}\tan^5\theta + \tfrac{1}{3}\tan^3\theta + C \end{aligned}$$

23. $$\int \tan^2 x\, dx = \int (\sec^2 x - 1)dx = \tan x - x + C$$

24. $$\int (\tan^2 x + \tan^4 x)dx = \int \tan^2 x(1+\tan^2 x)dx = \int \tan^2 x \sec^2 x\, dx \overset{\tan}{=} \int u^2 du = \tfrac{1}{3}u^3 + C = \tfrac{1}{3}\tan^3 x + C$$

25. Posons $u = \tan x$. Alors, $du = \sec^2 x\, dx$, donc

$$\begin{aligned} \int \tan^4 x \sec^6 x\, dx &= \int \tan^4 x \sec^4 x(\sec^2 x\, dx) = \int \tan^4 x(1+\tan^2 x)^2(\sec^2 x\, dx) \\ &= \int u^4(1+u^2)^2 du = \int (u^8 + 2u^6 + u^4)du \\ &= \tfrac{1}{9}u^9 + \tfrac{2}{7}u^7 + \tfrac{1}{5}u^5 + C = \tfrac{1}{9}\tan^9 x + \tfrac{2}{7}\tan^7 x + \tfrac{1}{5}\tan^5 x + C \end{aligned}$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

26. $\int_0^{\pi/4} \sec^4\theta \tan^4\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/4} (\tan^2\theta + 1)\tan^4\theta \sec^2\theta\, d\theta \overset{\tan}{=} \int_0^1 (u^2+1)u^4\, du$

$= \int_0^1 (u^6 + u^4)\, du = [\frac{1}{7}u^7 + \frac{1}{5}u^5]_0^1 = \frac{1}{7} + \frac{1}{5} = \frac{12}{35}$

27. $\int_0^{\pi/3} \tan^5 x \sec^4 x\, dx = \int_0^{\pi/3} \tan^5 x(\tan^2 x + 1)\sec^2 x\, dx \overset{\tan}{=} \int_0^{\sqrt{3}} u^5(u^2+1)\, du$

$= \int_0^{\sqrt{3}} (u^7 + u^5)\, du = [\frac{1}{8}u^8 + \frac{1}{6}u^6]_0^{\sqrt{3}} = \frac{81}{8} + \frac{27}{6} = \frac{81}{8} + \frac{9}{2} = \frac{81}{8} + \frac{36}{8} = \frac{117}{8}$

Autre solution :

$\int_0^{\pi/3} \tan^5 x \sec^4 x\, dx = \int_0^{\pi/3} \tan^4 x \sec^3 x \sec x \tan x\, dx = \int_0^{\pi/3} (\sec^2 x - 1)^2 \sec^3 x \sec x \tan x\, dx$

$\overset{\sec}{=} \int_1^2 (u^2-1)^2 u^3\, du = \int_1^2 (u^4 - 2u^2 + 1)u^3\, du$

$= \int_1^2 (u^7 - 2u^5 + u^3)\, du = [\frac{1}{8}u^8 - \frac{1}{3}u^6 + \frac{1}{4}u^4]_1^2 = (32 - \frac{64}{3} + 4) - (\frac{1}{8} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}) = \frac{117}{8}$

28. Posons $u = \sec x$, donc $du = \sec x \tan x\, dx$. Par conséquent,

$\int \tan^5 x \sec^3 x\, dx = \int \tan^4 x \sec^2 x(\sec x \tan x)\, dx = \int (\sec^2 x - 1)^2 \sec^2 x(\sec x \tan x\, dx)$

$= \int (u^2-1)^2 u^2\, du = \int (u^6 - 2u^4 + u^2)\, du$

$= \frac{1}{7}u^7 - \frac{2}{5}u^5 + \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{7}\sec^7 x - \frac{2}{5}\sec^5 x + \frac{1}{3}\sec^3 x + C$

29. $\int \tan^3 x \sec x\, dx = \int \tan^2 x \sec x \tan x\, dx = \int (\sec^2 x - 1)\sec x \tan x\, dx \overset{\sec}{=} \int (u^2 - 1)\, du$

$= \frac{1}{3}u^3 - u + C = \frac{1}{3}\sec^3 x - \sec x + C$

30. $\int_0^{\pi/4} \tan^4 t\, dt = \int_0^{\pi/4} \tan^2 t(\sec^2 t - 1)\, dt = \int_0^{\pi/4} \tan^2 t \sec^2 t\, dt - \int_0^{\pi/4} \tan^2 t\, dt$

$\overset{\tan}{=} \int_0^1 u^2\, du - \int_0^{\pi/4} (\sec^2 t - 1)\, dt = [\frac{1}{3}u^3]_0^1 - [\tan t - t]_0^{\pi/4}$

$= \frac{1}{3} - [(1 - \frac{\pi}{4}) - 0] = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$

31. $\int \tan^5 x\, dx = \int (\sec^2 x - 1)^2 \tan x\, dx = \int \sec^4 x \tan x\, dx - 2\int \sec^2 x \tan x\, dx + \int \tan x\, dx$

$= \int \sec^3 x \sec x \tan x\, dx - 2\int \tan x \sec^2 x\, dx + \int \tan x\, dx$

$= \frac{1}{4}\sec^4 x - \tan^2 x + \ln|\sec x| + C \quad [\text{ou } \frac{1}{4}\sec^4 x - \sec^2 x + \ln|\sec x| + C]$

32. $\int \tan^2 x \sec x\, dx = \int (\sec^2 x - 1)\sec x\, dx = \int \sec^3 x\, dx - \int \sec x\, dx$

$= \frac{1}{2}(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|) - \ln|\sec x + \tan x| + C$ [le résultat à l'exemple 8 et la formule 1]

$= \frac{1}{2}(\sec x \tan x - \ln|\sec x + \tan x|) + C$

33. Posons $u = x,\ dv = \sec x \tan x\, dx \ \Rightarrow\ du = dx$, $v = \sec x$. Alors, $\int x \sec x \tan x\, dx = x\sec x - \int \sec x\, dx = x\sec x - \ln|\sec x + \tan x| + C$.

34. $\int \frac{\sin\phi}{\cos^3\phi}\, d\phi = \int \frac{\sin\phi}{\cos\phi} \cdot \frac{1}{\cos^2\phi}\, d\phi = \int \tan\phi \sec^2\phi\, d\phi \overset{\tan}{=} \int u\, du = \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2}\tan^2\phi + C$

Autre solution : Posons $u = \cos\phi$, ce qui donne $\frac{1}{2}\sec^2\phi + C$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

35. $\int_{\pi/6}^{\pi/2}\cot^2 x\,dx=\int_{\pi/6}^{\pi/2}(\csc^2 x-1)dx=[-\cot x-x]_{\pi/6}^{\pi/2}=(0-\frac{\pi}{2})-\left(-\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$

36. $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cot^3 x\,dx=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cot x(\csc^2 x-1)dx=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cot x\csc^2 x\,dx-\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\cos x}{\sin x}dx$

$=[-\frac{1}{2}\cot^2 x-\ln|\sin x|]_{\pi/4}^{\pi/2}=(0-\ln 1)-\left[-\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{\sqrt{2}}\right]=\frac{1}{2}+\ln\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}(1-\ln 2)$

37. $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cot^5\csc^3\phi d\phi=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\cot^4\phi\csc^2\csc\phi\cot\phi d\phi=\int_{\pi/4}^{\pi/2}(\csc^2\phi-1)^2\csc^2\phi\csc\phi\cot\phi d\phi$

$\overset{\csc}{=}\int_{\sqrt{2}}^{1}(u^2-1)^2u^2(-du)=\int_1^{\sqrt{2}}(u^6-2u^4+u^2)\,du=[\frac{1}{7}u^7-\frac{2}{5}u^5+\frac{1}{3}u^3]_1^{\sqrt{2}}$

$=\left(\frac{8}{7}\sqrt{2}-\frac{8}{5}\sqrt{2}+\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)-(\frac{1}{7}-\frac{2}{5}+\frac{1}{3})=\frac{120-168+70}{105}\sqrt{2}-\frac{15-42+35}{105}=\frac{22}{105}\sqrt{2}-\frac{8}{105}$

38. $\int\csc^4 x\cot^6 x\,dx=\int\cot^6 x(\cot^2 x+1)\csc^2 x\,dx\overset{\cot}{=}\int u^6(u^2+1)\cdot(-du)$

$=\int(-u^8-u^6)du=-\frac{1}{9}u^9-\frac{1}{7}u^7+C=-\frac{1}{9}\cot^9 x-\frac{1}{7}\cot^7 x+C$

39. $I=\int\csc x\,dx=\int\frac{\csc x(\csc x-\cot x)}{\csc x-\cot x}dx=\int\frac{-\csc x\cot x+\csc^2 x}{\csc x-\cot x}dx$. Posons $u=\csc x-\cot x\ \Rightarrow\ du=(-\csc x\cot x+\csc^2 x)dx$.

Alors, $I=\int du/u=\ln|u|=\ln|\csc x-\cot x|+C$.

40. Posons $u=\csc x$, $dv=\csc^2 x\,dx$. Alors, $du=-\csc x\cot x\,dx$, $v=-\cot x\ \Rightarrow$

$$\int\csc^3 x\,dx=-\csc x\cot x-\int\csc x\cot^2 x\,dx=-\csc x\cot x-\int\csc x(\csc^2 x-1)dx$$
$$=-\csc x\cot x+\int\csc x\,dx-\int\csc^3 x\,dx$$

En trouvant $\int\csc^3 x\,dx$ et à l'aide du résultat de l'exercice 39, nous obtenons

$\int\csc^3 x\,dx=-\frac{1}{2}\csc x\cot x+\frac{1}{2}\int\csc x\,dx=-\frac{1}{2}\csc x\cot x+\frac{1}{2}\ln|\csc x-\cot x|+C$. Par conséquent,

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3}\csc^3 x\,dx=[-\tfrac{1}{2}\csc x\cot x+\tfrac{1}{2}\ln|\csc x-\cot x|]_{\pi/6}^{\pi/3}$$
$$=-\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{2}\ln\left|\tfrac{2}{\sqrt{3}}-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right|+\tfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{3}-\tfrac{1}{2}\ln\left|2-\sqrt{3}\right|$$
$$=-\tfrac{1}{3}+\sqrt{3}+\tfrac{1}{2}\ln\tfrac{1}{\sqrt{3}}-\tfrac{1}{2}\ln\left(2-\sqrt{3}\right)\approx 1,782\,5$$

41. $\int\sin 8x\cos 5x\,dx\overset{2a}{=}\int\frac{1}{2}[\sin(8x-5x)+\sin(8x+5x)]dx=\frac{1}{2}\int\sin 3x\,dx+\frac{1}{2}\int\sin 13x\,dx$

$=-\frac{1}{6}\cos 3x-\frac{1}{26}\cos 13x+C$

42. $\int\cos\pi x\cos\,4\pi x\,dx\overset{2c}{=}\int\frac{1}{2}[\cos(\pi x-4\pi x)+\cos(\pi x+4\pi x)]dx=\frac{1}{2}\int\cos(-3\pi x)dx+\frac{1}{2}\int\cos(5\pi x)dx$

$=\frac{1}{2}\int\cos 3\pi x\,dx+\frac{1}{2}\int\cos 5\pi x\,dx=\frac{1}{6\pi}\sin 3\pi x+\frac{1}{10\pi}\sin 5\pi x+C$

43. $\int\sin 5\theta\sin\theta d\theta\overset{2b}{=}\int\frac{1}{2}[\cos(5\theta-\theta)-\cos(5\theta+\theta)]d\theta=\frac{1}{2}\int\cos 4\theta d\theta-\frac{1}{2}\int\cos 6\theta d\theta=\frac{1}{8}\sin 4\theta-\frac{1}{12}\sin 6\theta+C$

 © Groupe Modulo inc., 2013

44. $\displaystyle\int\frac{\cos x+\sin x}{\sin 2x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{\cos x+\sin x}{\sin x\cos x}dx=\tfrac{1}{2}\int(\csc x+\sec x)dx$

$=\tfrac{1}{2}(\ln|\csc x-\cot x|+\ln|\sec x+\tan x|)+C$ [selon le résultat à l'exercice 39 et la formule 1]

45. $\displaystyle\int_0^{\pi/6}\sqrt{1+\cos 2x}\;dx=\int_0^{\pi/6}\sqrt{1+(2\cos^2 x-1)}dx=\int_0^{\pi/6}\sqrt{2\cos^2 x}\;dx=\sqrt{2}\int_0^{\pi/6}\sqrt{\cos^2 x}\;dx$

$=\sqrt{2}\int_0^{\pi/6}|\cos x|dx=\sqrt{2}\int_0^{\pi/6}\cos x\;dx$ [puisque $\cos x>0$ pour $0\le x\le\pi/6$]

$=\sqrt{2}[\sin x]_0^{\pi/6}=\sqrt{2}(\tfrac{1}{2}-0)=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$

46. $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\sqrt{1-\cos 4\theta}d\theta=\int_0^{\pi/4}\sqrt{1-(1-2\sin^2(2\theta))}d\theta=\int_0^{\pi/4}\sqrt{2\sin^2(2\theta)}d\theta=\sqrt{2}\int_0^{\pi/4}\sqrt{\sin^2(2\theta)}d\theta$

$=\sqrt{2}\int_0^{\pi/4}|\sin 2\theta|d\theta=\sqrt{2}\int_0^{\pi/4}\sin 2\theta d\theta$ [puisque $\sin 2\theta\ge 0$ pour $0\le\theta\le\pi/4$]

$=\sqrt{2}[-\tfrac{1}{2}\cos 2\theta]_0^{\pi/4}=-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}(0-1)=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$

47. $\displaystyle\int\frac{1-\tan^2 x}{\sec^2 x}dx=\int(\cos^2 x-\sin^2 x)dx=\int\cos 2x\;dx=\tfrac{1}{2}\sin 2x+C$

48. $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos x-1}=\int\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x+1}{\cos x+1}dx=\int\frac{\cos x+1}{\cos^2 x-1}dx=\int\frac{\cos x+1}{-\sin^2 x}dx$

$=\displaystyle\int(-\cot x\csc x-\csc^2 x)dx=\csc x+\cot x+C$

49. $\displaystyle\int x\tan^2 x\;dx=\int x(\sec^2 x-1)dx=\int x\sec^2 x\;dx-\int x\;dx$

$=x\tan x-\displaystyle\int\tan x\;dx-\tfrac{1}{2}x^2\quad\begin{bmatrix}u=x, & dv=\sec^2 x\;dx\\ du=dx, & v=\tan x\end{bmatrix}$

$=x\tan x-\ln|\sec x|-\tfrac{1}{2}x^2+C$

50. Posons $u=\tan^7 x$, $dv=\sec x\tan x\;dx$ $\Rightarrow$ $du=7\tan^6 x\sec^2 x\;dx$, $v=\sec x$. Alors,

$$\begin{aligned}\int\tan^8 x\sec x\;dx&=\int\tan^7 x\cdot\sec x\tan x\;dx=\tan^7 x\sec x-\int 7\tan^6 x\sec^2 x\sec x\;dx\\&=\tan^7 x\sec x-7\int\tan^6 x(\tan^2 x+1)\sec x\;dx\\&=\tan^7 x\sec x-7\int\tan^8 x\sec x\;dx-7\int\tan^6 x\sec x\;dx.\end{aligned}$$

Par conséquent, $8\displaystyle\int\tan^8 x\sec x\;dx=\tan^7 x\sec x-7\int\tan^6 x\sec x\;dx$ et

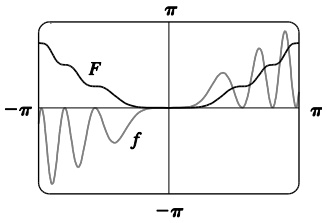
$$\int_0^{\pi/4}\tan^8 x\sec x\;dx=\frac{1}{8}[\tan^7 x\sec x]_0^{\pi/4}-\frac{7}{8}\int_0^{\pi/4}\tan^6 x\sec x\;dx=\frac{\sqrt{2}}{8}-\frac{7}{8}I\,.$$

Aux exercices 51 à 54, considérons que $f(x)$ représente l'intégrande et $F(x)$ sa primitive (avec $C=0$).

51. Posons $u=x^2$, de sorte que $du=2x\;dx$. Alors,

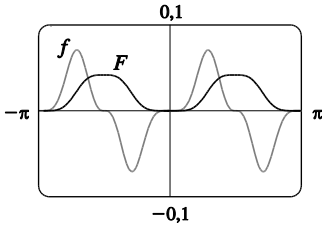
$$\begin{aligned}\int x\sin^2(x^2)dx&=\int\sin^2 u(\tfrac{1}{2}du)=\tfrac{1}{2}\int\tfrac{1}{2}(1-\cos 2u)du\\&=\tfrac{1}{4}(u-\tfrac{1}{2}\sin 2u)+C=\tfrac{1}{4}u-\tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2}\cdot 2\sin u\cos u)+C\\&=\tfrac{1}{4}x^2-\tfrac{1}{4}\sin(x^2)\cos(x^2)+C\end{aligned}$$

 © Groupe Modulo inc., 2013



Le graphique montre que cette réponse est vraisemblable, puisque la fonction F est croissante là où la valeur de f est positive et décroissante là où la valeur de f est négative. Remarquez également que f est une fonction impaire et que F est une fonction paire.

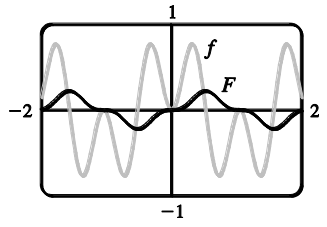
52. $$\begin{aligned}\int \sin^5 x\cos^3 x\,dx &= \int \sin^5 x\cos^2 x\cos x\,dx \\ &= \int \sin^5 x(1-\sin^2 x)\cos x\,dx \\ &\overset{\sin}{=} \int u^5(1-u^2)du = \int (u^5-u^7)du \\ &= \tfrac{1}{6}\sin^6 x - \tfrac{1}{8}\sin^8 x + C\end{aligned}$$



Le graphique montre que cette réponse est vraisemblable, puisque la fonction F est croissante là où la valeur de f est positive et décroissante là où la valeur de f est négative. Remarquez également que f est une fonction impaire et que F est une fonction paire.

53. $$\begin{aligned}\int \sin 3x\sin 6x\,dx &= \int \tfrac{1}{2}[\cos(3x-6x)-\cos(3x+6x)]dx \\ &= \tfrac{1}{2}\int (\cos 3x - \cos 9x)dx \\ &= \tfrac{1}{6}\sin 3x - \tfrac{1}{18}\sin 9x + C\end{aligned}$$

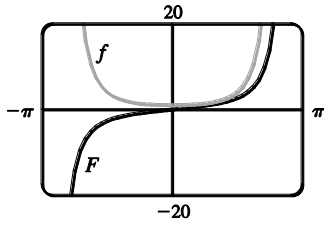
53. Remarquez que $f(x) = 0$ chaque fois que F a une tangente horizontale.



54. $$\begin{aligned}\int \sec^4 \tfrac{x}{2}\,dx &= \int (\tan^2 \tfrac{x}{2}+1)\sec^2 \tfrac{x}{2}\,dx \\ &\overset{\tan}{=} \int (u^2+1)2du = \tfrac{2}{3}u^3 + 2u + C = \tfrac{2}{3}\tan^3 \tfrac{x}{2} + 2\tan \tfrac{x}{2} + C\end{aligned}$$

Remarquez que la fonction F est croissante et que la valeur de f est positive sur les intervalles où les deux fonctions sont définies. De plus, F n'a pas de tangente horizontale, et la valeur de f n'est jamais égale à zéro.

 © Groupe Modulo inc., 2013



55. $f_{moy} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \cos^3 x\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x(1-\sin^2 x)\cos x\, dx$

$\overset{\sin}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^0 u^2(1-u^2)du = 0$

56. a) Posons $u = \cos x$. Alors, $du = -\sin x\, dx \Rightarrow \int \sin x\cos x\, dx = \int u(-du) = -\frac{1}{2}u^2 + C = -\frac{1}{2}\cos^2 x + C_1$.

b) Posons $u = \sin x$. Alors, $du = \cos x\, dx \Rightarrow \int \sin x\cos x\, dx = \int u\, du = \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2}\sin^2 x + C_2$.

c) $\int \sin x\cos x\, dx = \int \frac{1}{2}\sin 2x\, dx = -\frac{1}{4}\cos 2x + C_3$

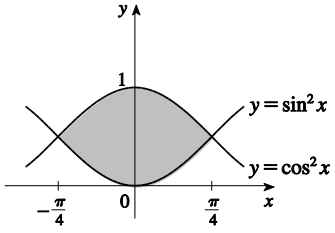
d) Posons $u = \sin x$ et $dv = \cos x\, dx$. Alors, $du = \cos x\, dx$, $v = \sin x$, donc $\int \sin x\cos x\, dx = \sin^2 x - \int \sin x\cos x\, dx$, selon la formule 3.1.2, donc $\int \sin x\cos x\, dx = \frac{1}{2}\sin^2 x + C_4$.

Puisque $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ et $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, nous voyons que la seule différence entre les deux réponses est une constante.

57. $A = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}(\cos^2 x - \sin^2 x)dx = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2x\, dx$

$= 2\int_0^{\pi/4} \cos 2x\, dx = 2[\frac{1}{2}\sin 2x]_0^{\pi/4} = [\sin 2x]_0^{\pi/4}$

$= 1 - 0 = 1$



58. $A = \int_{\pi/4}^{5\pi/4}(\sin^3 x - \cos^3 x)dx = \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \sin^3 x\, dx - \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \cos^3 x\, dx$

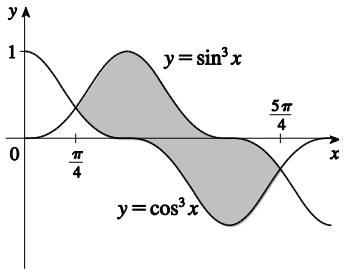
$= \int_{\pi/4}^{5\pi/4}(1-\cos^2 x)\sin x\, dx - \int_{\pi/4}^{5\pi/4}(1-\sin^2 x)\cos x\, dx$

$\overset{\cos,\sin}{=} \int_{\sqrt{2}/2}^{-\sqrt{2}/2}(1-u^2)(-du) - \int_{\sqrt{2}/2}^{-\sqrt{2}/2}(1-u^2)du$

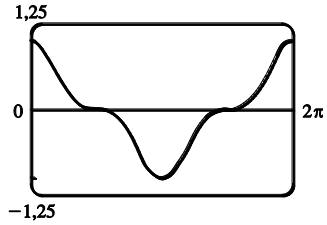
$= 2\int_0^{\sqrt{2}/2}(1-u^2)du + 2\int_0^{\sqrt{2}/2}(1-u^2)du = 4[u - \frac{1}{3}u^3]_0^{\sqrt{2}/2}$

$= 4\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}\right) - 0\right] = 2\sqrt{2} - \frac{1}{3}\sqrt{2} = \frac{5}{3}\sqrt{2}$

 © Groupe Modulo inc., 2013

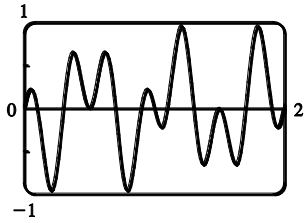


59.



Le graphique semble montrer que $\int_0^{2\pi} \cos^3 x\, dx = 0$, puisque l'aire sous l'axe des x et au-dessus de la courbe semble être égale à l'aire au-dessus de l'axe des x et sous la courbe. Selon l'exemple 1, l'intégrale est $[\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x]_0^{2\pi} = 0$. Il est à noter qu'à cause de la symétrie, l'intégrale de toute puissance impaire de sin x ou de cos x entre des bornes qui diffèrent de $2n\pi$ (n étant tout nombre entier) est nulle.

60.



Le graphique semble montrer que $\int_0^2 \sin 2\pi x \cos 5\pi x\, dx = 0$, puisque chaque portion de surface au-dessus de l'axe des x semble correspondre à celle sous l'axe des x. Nous utilisons une identité trigonométrique pour évaluer l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sin 2\pi x \cos 5\pi x\, dx &= \tfrac{1}{2}\int_0^2 [\sin(2\pi x - 5\pi x) + \sin(2\pi x + 5\pi x)]dx \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^2 [\sin(-3\pi x) + \sin 7\pi x]dx \\ &= \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{3\pi}\cos(-3\pi x) - \tfrac{1}{7\pi}\cos 7\pi x]_0^2 \\ &= \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{3\pi}(1-1) - \tfrac{1}{7\pi}(1-1)] = 0\end{aligned}$$

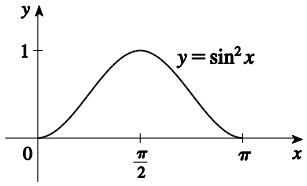
61. En utilisant la méthode des disques, nous obtenons

$$V = \int_{\pi/2}^{\pi} \pi \sin^2 x\, dx = \pi \int_{\pi/2}^{\pi} \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)dx = \pi[\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\sin 2x]_{\pi/2}^{\pi} = \pi(\tfrac{\pi}{2} - 0 - \tfrac{\pi}{4} + 0) = \tfrac{\pi^2}{4}$$

62. En utilisant la méthode des disques, nous obtenons

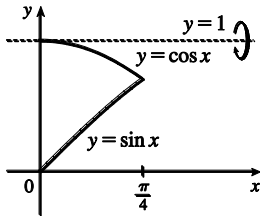
 © Groupe Modulo inc., 2013

$$V = \int_0^{\pi} \pi(\sin^2 x)^2\,dx = 2\pi\int_0^{\pi/2} [\tfrac{1}{2}(1-\cos 2x)]^2\,dx$$
$$= \tfrac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2} (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\,dx$$
$$= \tfrac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2} [1 - 2\cos 2x + \tfrac{1}{2}(1-\cos 4x)]\,dx$$
$$= \tfrac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2} (\tfrac{3}{2} - 2\cos 2x - \tfrac{1}{2}\cos 4x)\,dx = \tfrac{\pi}{2}[\tfrac{3}{2}x - \sin 2x + \tfrac{1}{8}\sin 4x]_0^{\pi/2}$$
$$= \tfrac{\pi}{2}[(\tfrac{3\pi}{4} - 0 + 0) - (0 - 0 + 0)] = \tfrac{3}{8}\pi^2$$



63. En utilisant la méthode des disques troués, nous obtenons

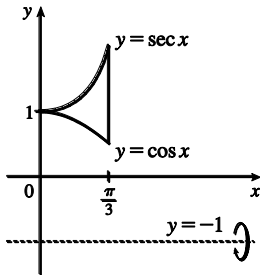
$$V = \int_0^{\pi/4} \pi[(1-\sin x)^2 - (1-\cos x)^2]\,dx$$
$$= \pi\int_0^{\pi/4} [(1 - 2\sin x + \sin^2 x) - (1 - 2\cos x + \cos^2 x)]\,dx$$
$$= \pi\int_0^{\pi/4} (2\cos x - 2\sin x + \sin^2 x - \cos^2 x)\,dx$$
$$= \pi\int_0^{\pi/4} (2\cos x - 2\sin x - \cos 2x)\,dx = \pi[2\sin x + 2\cos x - \tfrac{1}{2}\sin 2x]_0^{\pi/4}$$
$$= \pi\left[\left(\sqrt{2} + \sqrt{2} - \tfrac{1}{2}\right) - (0 + 2 - 0)\right] = \pi\left(2\sqrt{2} - \tfrac{5}{2}\right)$$



64. En utilisant la méthode des disques troués, nous obtenons

$$V = \int_0^{\pi/3} \pi\{[\sec x - (-1)]^2 - [\cos x - (-1)]^2\}\,dx$$
$$= \pi\int_0^{\pi/3} [(\sec^2 x + 2\sec x + 1) - (\cos^2 x + 2\cos x + 1)]\,dx$$
$$= \pi\int_0^{\pi/3} [\sec^2 x + 2\sec x - \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x) - 2\cos x]\,dx$$
$$= \pi[\tan x + 2\ln|\sec x + \tan x| - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\sin 2x - 2\sin x]_0^{\pi/3}$$
$$= \pi\left[\left(\sqrt{3} + 2\ln\left(2 + \sqrt{3}\right) - \tfrac{\pi}{6} - \tfrac{1}{8}\sqrt{3} - \sqrt{3}\right) - 0\right]$$
$$= 2\pi\ln\left(2 + \sqrt{3}\right) - \tfrac{1}{6}\pi^2 - \tfrac{1}{8}\pi\sqrt{3}$$

 © Groupe Modulo inc., 2013



65. $s = f(t) = \int_0^t \sin wu \cos^2 wu \; du$. Posons $y = \cos wu \;\Rightarrow\; dy = -w \sin wu \; du$. Alors,

$s = -\frac{1}{w}\int_1^{\cos wt} y^2 dy = -\frac{1}{w}[\frac{1}{3}y^3]_1^{\cos wt} = \frac{1}{3w}(1 - \cos^3 wt)$.

66. a) Nous désirons évaluer la racine carrée de la valeur moyenne de $[E(t)]^2 = [155 \sin(120\pi t)]^2 = 155^2 \sin^2(120\pi t)$. Nous allons évaluer tout d'abord la valeur moyenne elle-même, en effectuant l'intégration de $[E(t)]^2$ durant un cycle (entre $t = 0$ et $t = \frac{1}{60}$, puisqu'il y a 60 cycles par seconde) et en divisant par $(\frac{1}{60} - 0)$:

$$[E(t)]^2_{moy} = \frac{1}{1/60}\int_0^{1/60} [155^2 \sin^2(120\pi t)]dt = 60 \cdot 155^2 \int_0^{1/60} \tfrac{1}{2}[1 - \cos(240\pi t)]dt$$
$$= 60 \cdot 155^2 (\tfrac{1}{2})[t - \tfrac{1}{240\pi}\sin(240\pi t)]_0^{1/60} = 60 \cdot 155^2 (\tfrac{1}{2})[(\tfrac{1}{60} - 0) - (0 - 0)] = \tfrac{155^2}{2}$$

La tension efficace est simplement la racine carrée de cette valeur, c'est-à-dire $\frac{155}{\sqrt{2}} \approx 110$ V .

b) $220 = \sqrt{[E(t)]^2_{moy}} \;\Rightarrow$

$$220^2 = [E(t)]^2_{moy} = \frac{1}{1/60}\int_0^{1/60} A^2 \sin^2(120\pi t)dt = 60A^2 \int_0^{1/60} \tfrac{1}{2}[1 - \cos(240\pi t)]dt$$
$$= 30A^2[t - \tfrac{1}{240\pi}\sin(240\pi t)]_0^{1/60} = 30A^2[(\tfrac{1}{60} - 0) - (0 - 0)] = \tfrac{1}{2}A^2$$

Par conséquent, $220^2 = \frac{1}{2}A^2 \;\Rightarrow\; A = 220\sqrt{2} \approx 311$ V .

67. Nous constatons que l'intégrande est impaire [$f(-x) = -f(x)$].

Ou : Si $m \neq n$, calculons

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \; dx = \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{1}{2}[\sin(m-n)x + \sin(m+n)x]dx = \tfrac{1}{2}\left[-\frac{\cos(m-n)x}{m-n} - \frac{\cos(m+n)x}{m+n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Si $m = n$, alors le premier terme de chaque ensemble de parenthèses est zéro.

68. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \; dx = \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]dx$.

Si $m \neq n$, ceci est égal à $\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

Si $m = n$, nous obtenons $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}[1-\cos(m+n)x]dx = \frac{1}{2}x]_{-\pi}^{\pi} - \left[\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi - 0 = \pi$.

69. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]dx$.

Si $m \neq n$, ceci est égal à $\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$.

Si $m = n$, nous obtenons $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}[1+\cos(m+n)x]dx = [\frac{1}{2}x]_{-\pi}^{\pi} + \left[\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi + 0 = \pi$.

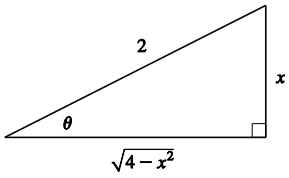
70. $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx \, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\left(\sum_{n=1}^{m} a_n \sin nx\right)\sin mx\right]dx = \sum_{n=1}^{m}\frac{a_n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx \sin nx \, dx$. Selon le résultat de l'exercice 68, chaque terme est nulle, à l'exception du $m^{\text{ème}}$ terme, qui est $\frac{a_m}{\pi}\cdot\pi = a_m$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

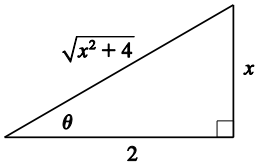
3.3 La substitution trigonométrique

1. Posons $x = 2\sin\theta$, où $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$. Alors, $dx = 2\cos\theta\, d\theta$ et $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\sin^2\theta} = \sqrt{4\cos^2\theta} = 2|\cos\theta| = 2\cos\theta$. Par conséquent,

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{2\cos\theta}{4\sin^2\theta(2\cos\theta)}\,d\theta = \frac{1}{4}\int \csc^2\theta\, d\theta$$
$$= -\frac{1}{4}\cot\theta + C = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x} + C$$



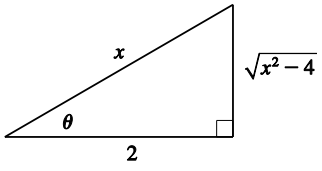
2. Posons $x = 2\tan\theta$, où $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Alors, $dx = 2\sec^2\theta\, d\theta$ et $\sqrt{x^2+4} = \sqrt{4\tan^2\theta+4} = \sqrt{4(\tan^2\theta+1)} = \sqrt{4\sec^2\theta} = 2|\sec\theta|$
$= 2\sec\theta$ pour les valeurs restreintes de θ.



$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+4}}\,dx = \int \frac{8\tan^3\theta}{2\sec\theta} 2\sec^2\theta\, d\theta = 8\int \tan^2\theta\sec\theta\tan\theta\, d\theta$$
$$= 8\int (\sec^2\theta - 1)\sec\theta\tan\theta\, d\theta = 8\int (u^2-1)\,du \quad [u = \sec\theta]$$
$$= 8\left(\frac{1}{3}u^3 - u\right) + C = \frac{8}{3}\sec^3\theta - 8\sec\theta + C = \frac{8}{3}\left(\frac{\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^3 - 8\left(\frac{\sqrt{x^2+4}}{2}\right) + C$$
$$= \tfrac{1}{3}(x^2+4)^{3/2} - 4\sqrt{x^2+4} + C$$

3. Posons $x = 2\sec\theta$, où $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi \le \theta < \frac{3\pi}{2}$. Alors, $dx = 2\sec\theta\tan\theta\, d\theta$ et

$$\sqrt{x^2-4} = \sqrt{4\sec^2\theta - 4} = \sqrt{4(\sec^2\theta - 1)}$$
$$= \sqrt{4\tan^2\theta} = 2|\tan\theta| = 2\tan\theta \quad \text{pour les valeurs restreintes de } \theta$$



 © Groupe Modulo inc., 2013

$$\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx = \int \frac{2\tan\theta}{2\sec\theta} 2\sec\theta\tan\theta d\theta = 2\int \tan^2\theta d\theta$$
$$= 2\int(\sec^2\theta - 1)d\theta = 2(\tan\theta - \theta) + C = 2\left[\frac{\sqrt{x^2-4}}{2} - \operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{2}\right)\right] + C$$
$$= \sqrt{x^2-4} - 2\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

4. Posons $x = \sin\theta$, donc $dx = \cos\theta\, d\theta$, $x = 0 \Rightarrow \theta = 0$ et $x = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$. Alors,

$$I = \int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\sqrt{\cos^2\theta}\cos\theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\ \sin\theta\ \cos^2\theta d\theta$$
$$= \int_0^{\pi/2} (1-\cos^2\theta)\sin\theta\ \cos^2\theta\ d\theta \overset{c}{=} \int_1^0 (1-u^2)u^2(-du) = \int_0^1 (u^2-u^4)du$$
$$= [\tfrac{1}{3}u^3 - \tfrac{1}{5}u^5]_0^1 = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5} = \tfrac{5-3}{15} = \tfrac{2}{15}$$

Autre méthode : Posons $u = 1 - x^2$, donc $du = -2x\,dx$. Alors,

$$I = \int_1^0 (1-u)\sqrt{u}(-\tfrac{1}{2}du) = \tfrac{1}{2}\int_0^1 (u^{1/2} - u^{3/2})du = \tfrac{1}{2}[\tfrac{2}{3}u^{3/2} - \tfrac{2}{5}u^{5/2}]_0^1 = \tfrac{1}{2}(\tfrac{2}{3} - \tfrac{2}{5}) = \tfrac{1}{2}(\tfrac{4}{15}) = \tfrac{2}{15}.$$

5. Posons $t = \sec\theta$, donc $dt = \sec\theta\tan\theta\, d\theta$, $t = \sqrt{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$, et $t = 2 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$. Alors,

$$\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{t^3\sqrt{t^2-1}}dt = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{\sec^3\theta\tan\theta}\sec\theta\ \tan\theta d\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{\sec^2\theta}d\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos^2\theta d\theta$$
$$= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \tfrac{1}{2}(1+\cos\ 2\theta)d\theta = \tfrac{1}{2}[\theta + \tfrac{1}{2}\sin 2\theta]_{\pi/4}^{\pi/3}$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[\left(\tfrac{\pi}{3} + \tfrac{1}{2}\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) - (\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2}\cdot 1)\right] = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\pi}{12} + \tfrac{\sqrt{3}}{4} - \tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{\pi}{24} + \tfrac{\sqrt{3}}{8} - \tfrac{1}{4}$$

6. Posons $u = 36 - x^2$, donc $du = -2x\,dx$. Lorsque $x = 0$, $u = 36$; lorsque $x = 3$, $u = 27$. Par conséquent,

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{36-x^2}}dx = \int_{36}^{27} \frac{1}{\sqrt{u}}\left(-\frac{1}{2}du\right) = -\frac{1}{2}\left[2\sqrt{u}\right]_{36}^{27} = -\left(\sqrt{27} - \sqrt{36}\right) = 6 - 3\sqrt{3}$$

Autre méthode : Posons $x = 6\sin\theta$, donc $dx = 6\cos\theta\, d\theta$, $x = 0 \Rightarrow \theta = 0$ et $x = 3 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$. Alors,

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{36-x^2}}dx = \int_0^{\pi/6} \frac{6\sin\theta}{\sqrt{36(1-\sin^2\theta)}}6\cos\theta d\theta = \int_0^{\pi/6} \frac{6\sin\theta}{6\cos\theta}6\cos\theta d\theta = 6\int_0^{\pi/6} \sin\theta d\theta$$
$$= 6[-\cos\theta]_0^{\pi/6} = 6\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) = 6 - 3\sqrt{3}$$

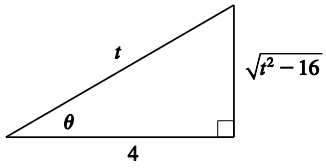
7. Posons $x = a\tan\theta$, où $a > 0$ et $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Alors, $dx = a\sec^2\theta\, d\theta$, $x = 0 \Rightarrow \theta = 0$ et $x = a \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$. Par conséquent,

$$\int_0^a \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \int_0^{\pi/4} \frac{a\sec^2\theta d\theta}{[a^2(1+\tan^2\theta)]^{3/2}} = \int_0^{\pi/4} \frac{a\sec^2\theta d\theta}{a^3\sec^3\theta} = \frac{1}{a^2}\int_0^{\pi/4} \cos\theta d\theta = \frac{1}{a^2}[\sin\theta]_0^{\pi/4}$$
$$= \frac{1}{a^2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 0\right) = \frac{1}{\sqrt{2}a^2}.$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

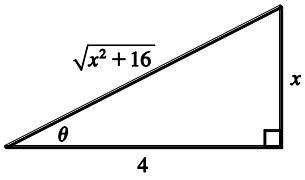
8. Posons $t = 4\sec\theta$, où $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi \le \theta < \frac{3\pi}{2}$. Alors, $dt = 4\sec\theta\tan\theta\,d\theta$ et $\sqrt{t^2-16} = \sqrt{16\sec^2\theta - 16} = \sqrt{16\tan^2\theta} = 4\tan\theta$ pour les valeurs restreintes de θ, donc

$$\int \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2-16}} = \int \frac{4\sec\theta\tan\theta\,d\theta}{16\sec^2\theta\cdot 4\tan\theta} = \frac{1}{16}\int \frac{1}{\sec\theta}\,d\theta = \frac{1}{16}\int \cos\theta\,d\theta$$
$$= \frac{1}{16}\sin\theta + C = \frac{1}{16}\frac{\sqrt{t^2-16}}{t} + C = \frac{\sqrt{t^2-16}}{16t} + C$$



9. Posons $x = 4\tan\theta$, où $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Alors, $dx = 4\sec^2\theta\,d\theta$ et

$$\sqrt{x^2+16} = \sqrt{16\tan^2\theta + 16} = \sqrt{16(\tan^2\theta + 1)}$$
$$= \sqrt{16\sec^2\theta} = 4\,|\sec\theta|$$
$$= 4\sec\theta \quad \text{pour les valeurs restreintes de } \theta.$$

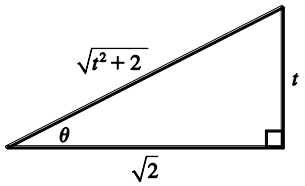


$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+16}} = \int \frac{4\sec^2\theta\,d\theta}{4\sec\theta} = \int \sec\theta\,d\theta = \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C_1 = \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+16}}{4} + \frac{x}{4}\right| + C_1$$
$$= \ln|\sqrt{x^2+16} + x| - \ln|4| + C_1 = \ln(\sqrt{x^2+16} + x) + C, \text{ où } C = C_1 - \ln 4.$$

(Puisque $\sqrt{x^2+16} + x > 0$, cela justifie la simplification de la valeur absolue.)

10. Posons $t = \sqrt{2}\tan\theta$, où $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Alors, $dt = \sqrt{2}\sec^2\theta\,d\theta$ et

$$\sqrt{t^2+2} = \sqrt{2\tan^2\theta + 2} = \sqrt{2(\tan^2\theta + 1)} = \sqrt{2\sec^2\theta}$$
$$= \sqrt{2}\,|\sec\theta| = \sqrt{2}\sec\theta \text{ pour les valeurs restreintes de } \theta.$$

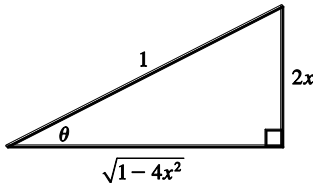


 © Groupe Modulo inc., 2013

$$\int \frac{t^5}{\sqrt{t^2+2}}dt = \int \frac{4\sqrt{2}\tan^5\theta}{\sqrt{2}\sec\theta}\sqrt{2}\sec^2\theta d\theta = 4\sqrt{2}\int \tan^5\theta\sec\theta d\theta$$
$$= 4\sqrt{2}\int (\sec^2\theta - 1)^2 \sec\theta\tan\theta d\theta = 4\sqrt{2}\int (u^2-1)^2\,du \quad [u=\sec\theta,\ du=\sec\theta\tan\theta\ d\theta]$$
$$= 4\sqrt{2}\int (u^4 - 2u^2 + 1)du = 4\sqrt{2}(\tfrac{1}{5}u^5 - \tfrac{2}{3}u^3 + u) + C$$
$$= \frac{4\sqrt{2}}{15}u(3u^4 - 10u^2 + 15) + C = \frac{4\sqrt{2}}{15}\cdot\frac{\sqrt{t^2+2}}{\sqrt{2}}\left[3\cdot\frac{(t^2+2)^2}{2^2} - 10\frac{t^2+2}{2} + 15\right] + C$$
$$= \tfrac{4}{15}\sqrt{t^2+2}\cdot\tfrac{1}{4}[3(t^4+4t^2+4) - 20(t^2+2) + 60] + C = \tfrac{1}{15}\sqrt{t^2+2}(3t^4 - 8t^2 + 32) + C$$

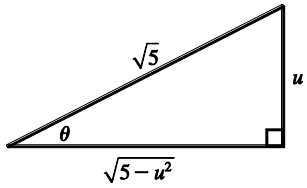
11. Posons $2x = \sin\theta$, où $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. Alors, $x = \frac{1}{2}\sin\theta$, $dx = \frac{1}{2}\cos\theta\ d\theta$ et $\sqrt{1-4x^2} = \sqrt{1-(2x)^2} = \cos\theta$.

$$\int \sqrt{1-4x^2}\,dx = \int \cos\theta\left(\tfrac{1}{2}\cos\theta\right)d\theta = \tfrac{1}{4}\int (1+\cos 2\theta)d\theta$$
$$= \tfrac{1}{4}\left(\theta + \tfrac{1}{2}\sin 2\theta\right) + C = \tfrac{1}{4}(\theta + \sin\theta\cos\theta) + C$$
$$= \tfrac{1}{4}\left[\arcsin(2x) + 2x\sqrt{1-4x^2}\right] + C$$



12. Posons $u = \sqrt{5}\sin\theta$, donc $du = \sqrt{5}\cos\theta\ d\theta$. Alors,

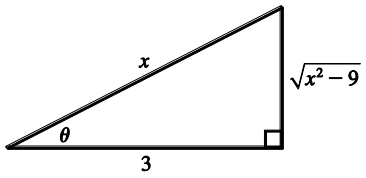
$$\int \frac{du}{u\sqrt{5-u^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{5}\sin\theta\cdot\sqrt{5}\cos\theta}\sqrt{5}\cos\theta d\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}\int \csc\theta d\theta$$
$$= \tfrac{1}{\sqrt{5}}\ln|\csc\theta - \cot\theta| + C \quad \text{[selon le résultat de l'exercice 3.2.39]}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}}{u} - \frac{\sqrt{5-u^2}}{u}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{5}-\sqrt{5-u^2}}{u}\right| + C$$



13. Posons $x = 3\sec\theta$, où $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi \le \theta < \frac{3\pi}{2}$. Alors, $dx = 3\sec\theta\tan\theta\ d\theta$ et $\sqrt{x^2-9} = 3\tan\theta$, donc

$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^3}dx = \int \frac{3\tan\theta}{27\sec^3\theta}3\sec\theta\tan\theta d\theta = \frac{1}{3}\int \frac{\tan^2\theta}{\sec^2\theta}d\theta$$
$$= \tfrac{1}{3}\int \sin^2\theta d\theta = \tfrac{1}{3}\int \tfrac{1}{2}(1-\cos 2\theta)d\theta = \tfrac{1}{6}\theta - \tfrac{1}{12}\sin 2\theta + C = \tfrac{1}{6}\theta - \tfrac{1}{6}\sin\theta\cos\theta + C$$
$$= \frac{1}{6}\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{1}{6}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\frac{3}{x} + C = \frac{1}{6}\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{\sqrt{x^2-9}}{2x^2} + C$$

 © Groupe Modulo inc., 2013



14. Posons $x = \tan\theta$, donc $dx = \sec^2\theta\, d\theta$, $x = 0 \Rightarrow \theta = 0$ et $x = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$. Alors,

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2\theta d\theta}{(\tan^2\theta+1)^2} = \int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2\theta d\theta}{(\sec^2\theta)^2} = \int_0^{\pi/4} \cos^2\theta d\theta = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)d\theta$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[\theta + \tfrac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/4} = \tfrac{1}{2}\left[(\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{1}{2}) - 0\right] = \tfrac{\pi}{8} + \tfrac{1}{4}$$

15. Posons $x = a\sin\theta$, $dx = a\cos\theta\, d\theta$, $x = 0 \Rightarrow \theta = 0$ et $x = a \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$. Alors,

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx = \int_0^{\pi/2} a^2\sin^2\theta(a\cos\theta)a\cos\theta d\theta = a^4\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\cos^2\theta d\theta$$
$$= a^4\int_0^{\pi/2}\left[\tfrac{1}{2}(2\sin\theta\cos\theta)\right]^2 d\theta = \frac{a^4}{4}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2\theta d\theta = \frac{a^4}{4}\int_0^{\pi/2}\tfrac{1}{2}(1-\cos 4\theta)d\theta$$
$$= \frac{a^4}{8}\left[\theta - \tfrac{1}{4}\sin 4\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{a^4}{8}\left[\left(\frac{\pi}{2}-0\right)-0\right] = \frac{\pi}{16}a^4$$

16. Posons $x = \frac{1}{3}\sec\theta$, donc $dx = \frac{1}{3}\sec\theta\tan\theta d\theta$, $x = \sqrt{2}/3 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$. Alors,

$$\int_{\sqrt{2}/3}^{2/3} \frac{dx}{x^5\sqrt{9x^2-1}} = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\frac{1}{3}\sec\theta\tan\theta d\theta}{\left(\frac{1}{3}\right)^5\sec^5\theta\tan\theta} = 3^4\int_{\pi/4}^{\pi/3}\cos^4\theta d\theta = 81\int_{\pi/4}^{\pi/3}\left[\tfrac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\right]^2 d\theta$$
$$= \tfrac{81}{4}\int_{\pi/4}^{\pi/3}(1+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta)d\theta = \tfrac{81}{4}\int_{\pi/4}^{\pi/3}[1+2\cos 2\theta+\tfrac{1}{2}(1+\cos 4\theta)]\, d\theta$$
$$= \tfrac{81}{4}\int_{\pi/4}^{\pi/3}\left(\tfrac{3}{2}+2\cos 2\theta+\tfrac{1}{2}\cos 4\theta\right)d\theta = \tfrac{81}{4}\left[\tfrac{3}{2}\theta+\sin 2\theta+\tfrac{1}{8}\sin 4\theta\right]_{\pi/4}^{\pi/3}$$
$$= \tfrac{81}{4}\left[\left(\tfrac{\pi}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}-\tfrac{\sqrt{3}}{16}\right)-\left(\tfrac{3\pi}{8}+1+0\right)\right] = \tfrac{81}{4}\left(\tfrac{\pi}{8}+\tfrac{7}{16}\sqrt{3}-1\right)$$

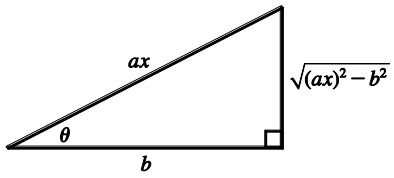
17. Posons $u = x^2 - 7$, donc $du = 2x\, dx$. Alors, $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2-7}}dx = \frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{u}}du = \tfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{u} + C = \sqrt{x^2-7} + C$.

18. Posons $ax = b\sec\theta$, donc $(ax)^2 = b^2\sec^2\theta \Rightarrow (ax)^2 - b^2 = b^2\sec^2\theta - b^2 = b^2(\sec^2\theta - 1) = b^2\tan^2\theta$.

Donc, $\sqrt{(ax)^2-b^2} = b\tan\theta$, $dx = \dfrac{b}{a}\sec\theta\tan\theta\, d\theta$ et

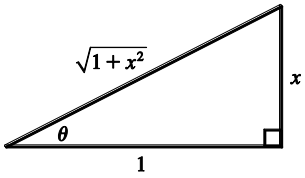
$$\int\frac{dx}{[(ax)^2-b^2]^{3/2}} = \int\frac{\frac{b}{a}\sec\theta\tan\theta}{b^3\tan^3\theta}d\theta = \frac{1}{ab^2}\int\frac{\sec\theta}{\tan^2\theta}d\theta = \frac{1}{ab^2}\int\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta = \frac{1}{ab^2}\int\csc\theta\cot\theta d\theta$$
$$= -\frac{1}{ab^2}\csc\theta + C = -\frac{1}{ab^2}\frac{ax}{\sqrt{(ax)^2-b^2}} + C = -\frac{x}{b^2\sqrt{(ax)^2-b^2}} + C$$

 © Groupe Modulo inc., 2013



19. Posons $x = \tan\theta$, où $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Alors, $dx = \sec^2\theta\, d\theta$ et $\sqrt{1+x^2} = \sec\theta$, donc

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx &= \int \frac{\sec\theta}{\tan\theta}\sec^2\theta d\theta = \int \frac{\sec\theta}{\tan\theta}(1+\tan^2\theta)d\theta \\ &= \int (\csc\theta + \sec\theta\tan\theta)d\theta \\ &= \ln|\csc\theta - \cot\theta| + \sec\theta + C \quad \left[\text{selon le résultat de l'exercice 3.2.39}\right] \\ &= \ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{1}{x}\right| + \frac{\sqrt{1+x^2}}{1} + C = \ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right| + \sqrt{1+x^2} + C\end{aligned}$$

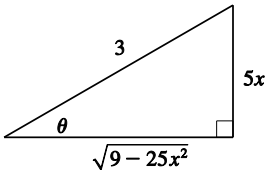


20. Posons $u = 1 + x^2$, donc $du = 2x\,dx$. Alors,

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}}\left(\frac{1}{2}du\right) = \frac{1}{2}\int u^{-1/2}du = \frac{1}{2}\cdot 2u^{1/2} + C = \sqrt{1+x^2} + C$$

21. Posons $x = \frac{3}{5}\sin\theta$, donc $dx = \frac{3}{5}\cos\theta\, d\theta$, $x = 0 \;\Rightarrow\; \theta = 0$ et $x = 0{,}6 \;\Rightarrow\; \theta = \frac{\pi}{2}$. Alors,

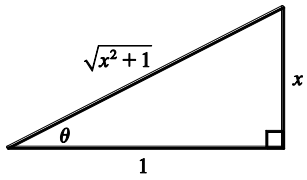
$$\begin{aligned}\int_0^{0,6} \frac{x^2}{\sqrt{9-25x^2}}dx &= \int_0^{\pi/2} \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^2\sin^2\theta}{3\cos\theta}\left(\tfrac{3}{5}\cos\theta\, d\theta\right) = \tfrac{9}{125}\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\, d\theta \\ &= \tfrac{9}{125}\int_0^{\pi/2}\tfrac{1}{2}(1-\cos 2\theta)d\theta = \tfrac{9}{250}\left[\theta - \tfrac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/2} \\ &= \tfrac{9}{250}\left[\left(\tfrac{\pi}{2}-0\right)-0\right] = \tfrac{9}{500}\pi\end{aligned}$$



22. Posons $x = \tan\theta$, où $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Alors, $dx = \sec^2\theta\, d\theta$, $\sqrt{x^2+1} = \sec\theta$ et $x = 0 \;\Rightarrow\; \theta = 0$, $x = 1 \;\Rightarrow\; \theta = \frac{\pi}{4}$, donc

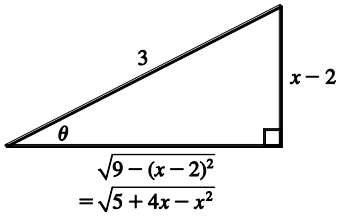
 © Groupe Modulo inc., 2013

$$\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx = \int_0^{\pi/4} \sec\theta \sec^2\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/4} \sec^3\theta\, d\theta$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[\sec\theta\tan\theta + \ln|\sec\theta+\tan\theta|\right]_0^{\pi/4} \quad \text{[selon le résultat de l'exemple 3.2.8]}$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{2}\cdot 1 + \ln(1+\sqrt{2}) - 0 - \ln(1+0)\right] = \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})\right]$$



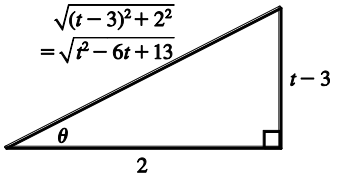
23. Puisque, $5 + 4x - x^2 = -(x^2 - 4x + 4) + 9 = -(x-2)^2 + 9$, posons $x - 2 = 3\sin\theta, -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, donc $dx = 3\cos\theta\, d\theta$. Alors,

$$\int \sqrt{5+4x-x^2}\,dx = \int \sqrt{9-(x-2)^2}\,dx = \int \sqrt{9-9\sin^2\theta}\,3\cos\theta\, d\theta$$
$$= \int \sqrt{9\cos^2\theta}\,3\cos\theta\, d\theta = \int 9\cos^2\theta\, d\theta$$
$$= \tfrac{9}{2}\int (1+\cos 2\theta)\, d\theta = \tfrac{9}{2}(\theta + \tfrac{1}{2}\sin 2\theta) + C$$
$$= \tfrac{9}{2}\theta + \tfrac{9}{4}\sin 2\theta + C = \tfrac{9}{2}\theta + \tfrac{9}{4}(2\sin\theta\cos\theta) + C$$
$$= \frac{9}{2}\arcsin\left(\frac{x-2}{3}\right) + \frac{9}{2}\cdot\frac{x-2}{3}\cdot\frac{\sqrt{5+4x-x^2}}{3} + C$$
$$= \frac{9}{2}\arcsin\left(\frac{x-2}{3}\right) + \frac{1}{2}(x-2)\sqrt{5+4x-x^2} + C$$



24. Puisque $t^2 - 6t + 13 = (t^2 - 6t + 9) + 4 = (t-3)^2 + 2^2$, osons $t - 3 = 2\tan\theta$, donc $dt = 2\sec^2\theta\, d\theta$. Alors,

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-6t+13}} = \int \frac{1}{\sqrt{(2\tan\theta)^2+2^2}}\,2\sec^2\theta\, d\theta$$
$$= \int \frac{2\sec^2\theta}{2\sec\theta}\,d\theta = \int \sec\theta\, d\theta = \ln|\sec\theta+\tan\theta| + C_1 \quad \text{[selon la formule 3.2.1]}$$
$$= \ln\left|\frac{\sqrt{t^2-6t+13}}{2} + \frac{t-3}{2}\right| + C_1$$
$$= \ln|\sqrt{t^2-6t+13} + t - 3| + C \quad \text{où } C = C_1 - \ln 2$$

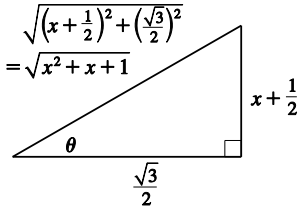


 © Groupe Modulo inc., 2013

25. Puisque $x^2+x+1=(x^2+x+\frac{1}{4})+\frac{3}{4}=(x+\frac{1}{2})^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$, posons $x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta$, donc $dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2\theta\,d\theta$ et $\sqrt{x^2+x+1}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sec\theta$.

Alors,

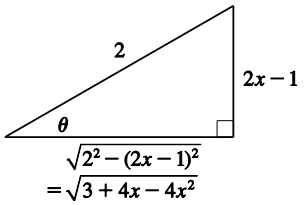
$$\begin{aligned}
\int\frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}dx &= \int\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sec\theta}\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2\theta\,d\theta\\
&= \int\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta-\tfrac{1}{2}\right)\sec\theta\,d\theta=\int\tfrac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta\sec\theta d\theta-\int\tfrac{1}{2}\sec\theta\,d\theta\\
&= \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sec\theta-\tfrac{1}{2}\ln|\sec\theta+\tan\theta|+C_1\\
&= \sqrt{x^2+x+1}-\tfrac{1}{2}\ln\left|\tfrac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2+x+1}+\tfrac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\tfrac{1}{2}\right)\right|+C_1\\
&= \sqrt{x^2+x+1}-\tfrac{1}{2}\ln\left|\tfrac{2}{\sqrt{3}}\left[\sqrt{x^2+x+1}+\left(x+\tfrac{1}{2}\right)\right]\right|+C_1\\
&= \sqrt{x^2+x+1}-\tfrac{1}{2}\ln\tfrac{2}{\sqrt{3}}-\tfrac{1}{2}\ln\left(\sqrt{x^2+x+1}+x+\tfrac{1}{2}\right)+C_1\\
&= \sqrt{x^2+x+1}-\tfrac{1}{2}\ln\left(\sqrt{x^2+x+1}+x+\tfrac{1}{2}\right)+C,\ \text{où } C=C_1-\tfrac{1}{2}\ln\tfrac{2}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$



26. Puisque $3+4x-4x^2=-(4x^2-4x+1)+4=2^2-(2x-1)^2$, posons $2x-1=2\sin\theta$, donc $2\,dx=2\cos\theta\,d\theta$

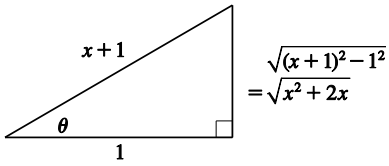
$$\begin{aligned}
\int\frac{x^2}{(3+4x-4x^2)^{3/2}}dx &= \int\frac{\left[\frac{1}{2}(1+2\sin\theta)\right]^2}{(2\cos\theta)^3}\cos\theta d\theta\\
&= \frac{1}{32}\int\frac{1+4\sin\theta+4\sin^2\theta}{\cos^2\theta}d\theta=\frac{1}{32}\int(\sec^2\theta+4\tan\theta\sec\theta+4\tan^2\theta)\,d\theta\\
&= \tfrac{1}{32}\int[\sec^2\theta+4\tan\theta\sec\theta+4(\sec^2\theta-1)]\,d\theta\\
&= \tfrac{1}{32}\int(5\sec^2\theta+4\tan\theta\sec\theta-4)\,d\theta=\tfrac{1}{32}(5\tan\theta+4\sec\theta-4\theta)+C\\
&= \frac{1}{32}\left[5\cdot\frac{2x-1}{\sqrt{3+4x-4x^2}}+4\cdot\frac{2}{\sqrt{3+4x-4x^2}}-4\cdot\arcsin\left(\frac{2x-1}{2}\right)\right]+C\\
&= \frac{10x+3}{32\sqrt{3+4x-4x^2}}-\frac{1}{8}\arcsin\left(\frac{2x-1}{2}\right)+C
\end{aligned}$$

et $\sqrt{3+4x-4x^2}=2\cos\theta$. Alors,



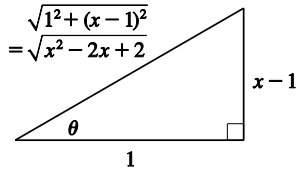
27. Puisque $x^2+2x=(x^2+2x+1)-1=(x+1)^2-1$, posons $x+1=1\sec\theta$, donc $dx=\sec\theta\tan\theta\,d\theta$ et $\sqrt{x^2+2x}=\tan\theta$. Alors,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+2x}\,dx &= \int \tan\theta(\sec\theta\tan\theta\,d\theta) = \int \tan^2\theta\sec\theta\,d\theta \\ &= \int (\sec^2\theta - 1)\sec\theta\,d\theta = \int \sec^3\theta\,d\theta - \int \sec\theta\,d\theta \\ &= \tfrac{1}{2}\sec\theta\tan\theta + \tfrac{1}{2}\ln|\sec\theta+\tan\theta| - \ln|\sec\theta+\tan\theta| + C \\ &= \tfrac{1}{2}\sec\theta\tan\theta - \tfrac{1}{2}\ln|\sec\theta+\tan\theta| + C = \tfrac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x} - \tfrac{1}{2}\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x}| + C\end{aligned}$$



28. Puisque $x^2 - 2x + 2 = (x^2 - 2x + 1) + 1 = (x-1)^2 + 1$, posons $x - 1 = 1\tan\theta$, donc $dx = \sec^2\theta\,d\theta$ et $\sqrt{x^2-2x+2} = \sec\theta$. Alors,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+1}{(x^2-2x+2)^2}\,dx &= \int \frac{(\tan\theta+1)^2+1}{\sec^4\theta}\sec^2\theta\,d\theta \\ &= \int \frac{\tan^2\theta + 2\tan\theta + 2}{\sec^2\theta}\,d\theta \\ &= \int (\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + 2\cos^2\theta)\,d\theta = \int (1 + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta \\ &= \int [1 + 2\sin\theta\cos\theta + \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\theta)]\,d\theta = \int \left(\tfrac{3}{2} + 2\sin\theta\cos\theta + \tfrac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta \\ &= \tfrac{3}{2}\theta + \sin^2\theta + \tfrac{1}{4}\sin 2\theta + C = \tfrac{3}{2}\theta + \sin^2\theta + \tfrac{1}{2}\sin\theta\cos\theta + C \\ &= \frac{3}{2}\arctan\left(\frac{x-1}{1}\right) + \frac{(x-1)^2}{x^2-2x+2} + \frac{1}{2}\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}} + C \\ &= \frac{3}{2}\arctan(x-1) + \frac{2(x^2-2x+1)+x-1}{2(x^2-2x+2)} + C = \frac{3}{2}\arctan(x-1) + \frac{2x^2-3x+1}{2(x^2-2x+2)} + C\end{aligned}$$



Nous pouvons simplifier cette réponse comme suit :

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}\arctan(x-1) + \frac{(2x^2-4x+4)+x-3}{2(x^2-2x+2)} + C &= \frac{3}{2}\arctan(x-1) + 1 + \frac{x-3}{2(x^2-2x+2)} + C \\ &= \frac{3}{2}\arctan(x-1) + \frac{x-3}{2(x^2-2x+2)} + C_1, \text{ où } C_1 = 1 + C\end{aligned}$$

29. Posons $u = x^2$, $du = 2x\,dx$. Alors,

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{1-x^4}\,dx &= \int \sqrt{1-u^2}\left(\tfrac{1}{2}du\right) = \tfrac{1}{2}\int \cos\theta\cdot\cos\theta\,d\theta \quad \left[\begin{array}{c}\text{où } u = \sin\theta, du = \cos\theta\,d\theta, \\ \text{et } \sqrt{1-u^2} = \cos\theta\end{array}\right] \\ &= \tfrac{1}{2}\int \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta = \tfrac{1}{4}\theta + \tfrac{1}{8}\sin 2\theta + C = \tfrac{1}{4}\theta + \tfrac{1}{4}\sin\theta\cos\theta + C \\ &= \tfrac{1}{4}\arcsin u + \tfrac{1}{4}u\sqrt{1-u^2} + C = \tfrac{1}{4}\arcsin(x^2) + \tfrac{1}{4}x^2\sqrt{1-x^4} + C\end{aligned}$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t}{1+\sin^2 t}\,dt=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\,du=\int_0^{\pi/4}\frac{1}{\sec\theta}\sec^2\theta\,d\theta \quad \left[\begin{array}{c}\text{où } u=\tan\theta, du=\sec^2\theta\,d\theta,\\ \text{et } \sqrt{1+u^2}=\sec\theta\end{array}\right]$$

30. Posons $u = \sin t$, $du = \cos t\,dt$. Alors,
$$=\int_0^{\pi/4}\sec\theta d\theta=\left[\ln|\sec\theta+\tan\theta|\right]_0^{\pi/4} \quad \text{[selon la formule 1 de la section 3.2]}$$
$$=\ln(\sqrt{2}+1)-\ln(1+0)=\ln(\sqrt{2}+1)$$

31. Posons $x = a\tan\theta$, où $a > 0$ et $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$. Alors, $\sqrt{x^2+a^2}=a\sec\theta$ et

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\int\frac{a\sec^2\theta d\theta}{a\sec\theta}=\int\sec\theta d\theta=\ln|\sec\theta+\tan\theta|+C_1=\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}+\frac{x}{a}\right|+C_1$$
$$=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C \quad \text{où } C=C_1-\ln|a|$$

32. Posons $x = a\tan\theta$, où $a > 0$ et $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$. Alors,

$$I=\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^{3/2}}dx=\int\frac{a^2\tan^2\theta}{a^3\sec^3\theta}a\sec^2\theta d\theta=\int\frac{\tan^2\theta}{\sec\theta}d\theta=\int\frac{\sec^2\theta-1}{\sec\theta}d\theta$$
$$=\int(\sec\theta-\cos\theta)d\theta=\ln|\sec\theta+\tan\theta|-\sin\theta+C_1$$
$$=\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}+\frac{x}{a}\right|-\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}+C_1=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)-\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}+C_1$$

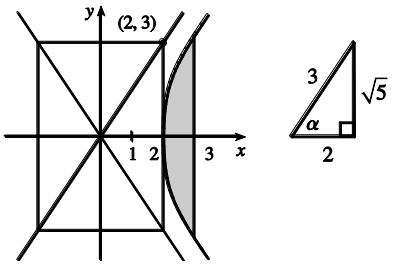
33. La valeur moyenne de $f(x)=\sqrt{x^2-1}/x$ sur l'intervalle [1, 7] est

$$\frac{1}{7-1}\int_1^7\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx=\frac{1}{6}\int_0^\alpha\frac{\tan\theta}{\sec\theta}\cdot\sec\theta\tan\theta d\theta \quad \left[\begin{array}{c}\text{où } x=\sec\theta, dx=\sec\theta\tan\theta d\theta,\\ \sqrt{x^2-1}=\tan\theta, \text{ et } \alpha=\operatorname{arcsec}7\end{array}\right]$$
$$=\tfrac{1}{6}\int_0^\alpha\tan^2\theta\,d\theta=\tfrac{1}{6}\int_0^\alpha(\sec^2\theta-1)d\theta=\tfrac{1}{6}\left[\tan\theta-\theta\right]_0^\alpha$$
$$=\tfrac{1}{6}(\tan\alpha-\alpha)=\tfrac{1}{6}(\sqrt{48}-\operatorname{arcsec}7)$$

34. $9x^2-4y^2=36 \;\Rightarrow\; y=\pm\frac{3}{2}\sqrt{x^2-4}$, alors

$$\text{aire}=2\int_2^3\tfrac{3}{2}\sqrt{x^2-4}dx=3\int_2^3\sqrt{x^2-4}dx$$
$$=3\int_0^\alpha 2\tan\theta 2\sec\theta\tan\theta d\theta \quad \left[\begin{array}{l}\text{où } x=2\sec\theta,\\ dx=2\sec\theta\tan\theta d\theta,\\ \alpha=\operatorname{arcsec}\left(\frac{3}{2}\right)\end{array}\right]$$
$$=12\int_0^\alpha(\sec^2\theta-1)\sec\theta d\theta=12\int_0^\alpha(\sec^3\theta-\sec\theta)d\theta$$
$$=12\left[\tfrac{1}{2}(\sec\theta\tan\theta+\ln|\sec\theta+\tan\theta|)-\ln|\sec\theta+\tan\theta|\right]_0^\alpha$$
$$=6\left[\sec\theta\tan\theta-\ln|\sec\theta+\tan\theta|\right]_0^\alpha=6\left[\tfrac{3\sqrt{5}}{4}-\ln\left(\tfrac{3}{2}+\tfrac{\sqrt{5}}{2}\right)\right]=\tfrac{9\sqrt{5}}{2}-6\ln\left(\tfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$$

 © Groupe Modulo inc., 2013



35. Aire du $\Delta POQ = \frac{1}{2}(r\cos\theta)(r\sin\theta) = \frac{1}{2}r^2\sin\theta\cos\theta$. Aire de la région $PQR = \int_{r\cos\theta}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx$. Posons

$x = r\cos u \quad \Rightarrow \quad dx = -r\sin u\,du$ pour $r > 0$ et $\theta \le u \le \frac{\pi}{2}$. Alors, nous obtenons

$$\int\sqrt{r^2-x^2}\,dx = \int r\sin u(-r\sin u)du = -r^2\int\sin^2 u\,du = -\tfrac{1}{2}r^2(u-\sin u\cos u)+C$$
$$= -\tfrac{1}{2}r^2\arccos(x/r) + \tfrac{1}{2}x\sqrt{r^2-x^2}+C$$

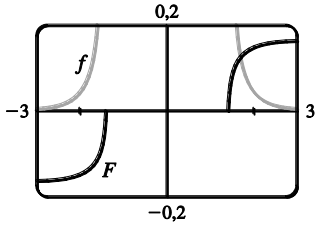
donc,

$$\text{aire de la région } PQR = \tfrac{1}{2}\left[-r^2\arccos(x/r) + x\sqrt{r^2-x^2}\right]_{r\cos\theta}^{r}$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[0-(-r^2\theta + r\cos\theta r\sin\theta)\right] = \tfrac{1}{2}r^2\theta - \tfrac{1}{2}r^2\sin\theta\cos\theta$$

et, par conséquent, (aire du secteur POR) = (aire du ΔPOQ) + (aire de la région PQR) $= \frac{1}{2}r^2\theta$.

36. Posons $x = \sqrt{2}\sec\theta$, où $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi \le \theta < \frac{3\pi}{2}$, donc $dx = \sqrt{2}\sec\theta\tan\theta\,d\theta$. Alors,

$$\int\frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-2}} = \int\frac{\sqrt{2}\sec\theta\tan\theta d\theta}{4\sec^4\theta\sqrt{2}\tan\theta}$$
$$= \tfrac{1}{4}\int\cos^3\theta d\theta = \tfrac{1}{4}\int(1-\sin^2\theta)\cos\theta d\theta$$
$$= \tfrac{1}{4}\left[\sin\theta - \tfrac{1}{3}\sin^3\theta\right]+C \quad \text{[avec le changement de variable } u = \sin\theta\text{]}$$
$$= \frac{1}{4}\left[\frac{\sqrt{x^2-2}}{x} - \frac{(x^2-2)^{3/2}}{3x^3}\right]+C$$



Le graphique semble montrer que cette réponse est vraisemblable. [On constate que la valeur de $f(x)$ est grande lorsque F augmente rapidement et petite lorsque F se rapproche de l'horizontale.]

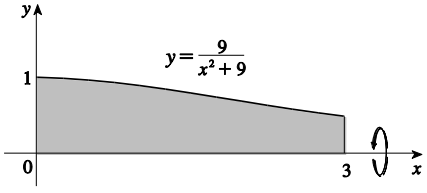
 © Groupe Modulo inc., 2013

37. En utilisant la méthode des disques (perpendiculaire à l'axe des x) :

$$V = \int_0^3 \pi\left(\frac{9}{x^2+9}\right)^2 dx = 81\pi\int_0^3 \frac{1}{(x^2+9)^2}\,dx\,.$$

Posons $x = 3\tan\theta$, donc $dx = 3\sec^2\theta\,d\theta$, $x=0 \;\Rightarrow\; \theta = 0$ et $x = 3 \;\Rightarrow\; \theta = \frac{\pi}{4}$. Par conséquent,

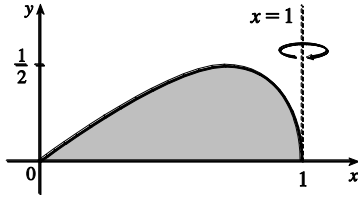
$$\begin{aligned} V &= 81\pi\int_0^{\pi/4} \frac{1}{(9\sec^2\theta)^2}\,3\sec^2\theta\,d\theta = 3\pi\int_0^{\pi/4}\cos^2\theta\,d\theta = 3\pi\int_0^{\pi/4}\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta \\ &= \tfrac{3\pi}{2}\left[\theta + \tfrac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/4} = \tfrac{3\pi}{2}\left[\left(\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{1}{2}\right)-0\right] = \tfrac{3}{8}\pi^2 + \tfrac{3}{4}\pi \end{aligned}$$



38. En utilisant la méthode des coquilles cylindriques (autour de la droite $x = 1$) :

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 2\pi(1-x)x\sqrt{1-x^2}\,dx \\ &= 2\pi\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx - 2\pi\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx = 2\pi V_1 - 2\pi V_2 \end{aligned}$$

Pour V_1, Posons $u = 1-x^2$, donc $du = -2x\,dx$ et $V_1 = \int_1^0 \sqrt{u}\left(-\tfrac{1}{2}du\right) = \tfrac{1}{2}\int_0^1 u^{1/2}du = \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{2}{3}u^{3/2}\right]_0^1 = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2}{3}\right) = \tfrac{1}{3}$.



Pour V_2, Posons $x = \sin\theta$, donc $dx = \cos\theta\,d\theta$ et

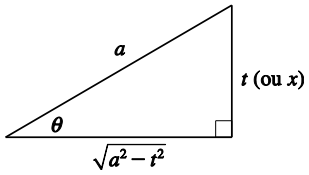
$$\begin{aligned} V_2 &= \int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\sqrt{\cos^2\theta}\cos\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\tfrac{1}{4}(2\sin\theta\cos\theta)^2\,d\theta \\ &= \tfrac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2\theta\,d\theta = \tfrac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\tfrac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\,d\theta = \tfrac{1}{8}\left[\theta - \tfrac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/2} = \tfrac{1}{8}\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = \tfrac{\pi}{16} \end{aligned}$$

Par conséquent, $V = 2\pi\left(\tfrac{1}{3}\right) - 2\pi\left(\tfrac{\pi}{16}\right) = \tfrac{2}{3}\pi - \tfrac{1}{8}\pi^2$.

39. a) Posons $t = a\sin\theta$, $dt = a\cos\theta\,d\theta$, $t=0 \;\Rightarrow\; \theta = 0$ et $t = x \;\Rightarrow\; \theta = \arcsin(x/a)$. Alors,

$$\begin{aligned} \int_0^x \sqrt{a^2-t^2}\,dt &= \int_0^{\arcsin(x/a)} a\cos\theta(a\cos\theta\,d\theta) = a^2\int_0^{\arcsin(x/a)}\cos^2\theta\,d\theta \\ &= \frac{a^2}{2}\int_0^{\arcsin(x/a)}(1+\cos 2\theta)\,d\theta = \frac{a^2}{2}\left[\theta + \tfrac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\arcsin(x/a)} = \frac{a^2}{2}\left[\theta + \sin\theta\cos\theta\right]_0^{\arcsin(x/a)} \\ &= \frac{a^2}{2}\left[\left(\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right) - 0\right] = \tfrac{1}{2}a^2\arcsin(x/a) + \tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} \end{aligned}$$

 © Groupe Modulo inc., 2013



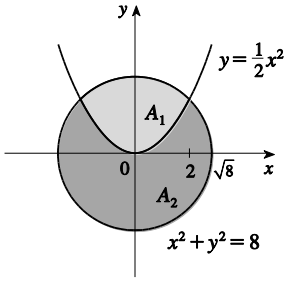
b) L'intégrale $\int_0^x \sqrt{a^2-t^2}\,dt$ représente l'aire située sous la courbe $y=\sqrt{a^2-t^2}$ entre les droites verticales $t = 0$ et $t = x$. La figure montre que cette surface est composée d'une région triangulaire et d'un secteur du cercle $t^2 + y^2 = a^2$. La région triangulaire est de base x et de hauteur $\sqrt{a^2-x^2}$, donc son aire est $\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}$. L'aire du secteur est $\frac{1}{2}a^2\theta = \frac{1}{2}a^2 \arcsin(x/a)$.

40. Les courbes se croisent lorsque $x^2+\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 = 8 \iff x^2+\frac{1}{4}x^4 = 8 \iff x^4+4x^2-32=0 \iff (x^2+8)(x^2-4)=0 \iff x=\pm 2$.

L'aire à l'intérieur du cercle et au-dessus de la parabole est donnée par

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-2}^{2}\left(\sqrt{8-x^2}-\tfrac{1}{2}x^2\right)dx = 2\int_0^2\sqrt{8-x^2}\,dx - 2\int_0^2 \tfrac{1}{2}x^2\,dx \\ &= 2\left[\tfrac{1}{2}(8)\arcsin\left(\tfrac{2}{\sqrt{8}}\right)+\tfrac{1}{2}(2)\sqrt{8-2^2}-\tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^2\right] \qquad \text{[selon le résultat de l'exercice 39]} \\ &= 8\arcsin\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)+2\sqrt{4}-\tfrac{8}{3} = 8\left(\tfrac{\pi}{4}\right)+4-\tfrac{8}{3} = 2\pi+\tfrac{4}{3} \end{aligned}$$

Puisque l'aire du disque est $\pi(\sqrt{8})^2 = 8\pi$, l'aire à l'intérieur du cercle et sous la parabole est $A_2 = 8\pi - \left(2\pi+\frac{4}{3}\right) = 6\pi - \frac{4}{3}$.



41. Utilisons la méthode des coquilles cylindriques. Considérons évidemment que $R > r$.

Puisque $x^2 = r^2-(y-R)^2 \implies x = \pm\sqrt{r^2-(y-R)^2}$, posons $g(y) = 2\sqrt{r^2-(y-R)^2}$ et ainsi

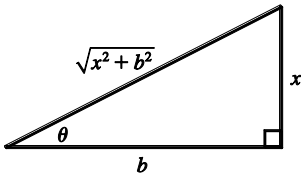
$$\begin{aligned} V &= \int_{R-r}^{R+r} 2\pi y \cdot 2\sqrt{r^2-(y-R)^2}\,dy = \int_{-r}^{r} 4\pi(u+R)\sqrt{r^2-u^2}\,du \qquad [\text{où } u = y-R] \\ &= 4\pi\int_{-r}^{r} u\sqrt{r^2-u^2}\,du + 4\pi R\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-u^2}\,du \quad \left[\begin{array}{c}\text{où } u = r\sin\theta, du = r\cos\theta d\theta \\ \text{dans la seconde intégrale}\end{array}\right] \\ &= 4\pi\left[-\tfrac{1}{3}(r^2-u^2)^{3/2}\right]_{-r}^{r} + 4\pi R\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2\cos^2\theta\,d\theta = -\tfrac{4\pi}{3}(0-0)+4\pi Rr^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta \\ &= 2\pi Rr^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta = 2\pi Rr^2\left[\theta+\tfrac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2\pi^2 Rr^2 \end{aligned}$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

Autre méthode : Si nous utilisons des disques troués plutôt que des coquilles cylindriques, alors $V = 8\pi R\int_0^r \sqrt{r^2 - y^2}\,dy$ comme à l'exercice 2.2.61 a); pour évaluer l'intégrale, il faut toutefois poser $y = r \sin \theta$.

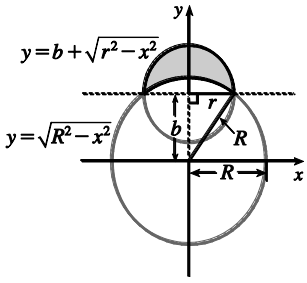
42. Posons $x = b \tan \theta$, de sorte que $dx = b \sec^2 \theta\, d\theta$ et $\sqrt{x^2 + b^2} = b\sec\theta$.

$$\begin{aligned} E(P) &= \int_{-a}^{L-a} \frac{\lambda b}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + b^2)^{3/2}}\,dx = \frac{\lambda b}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{(b\sec\theta)^3} b\sec^2\theta d\theta \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 b}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{\sec\theta}\,d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 b}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos\theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 b}\left[\sin\theta\right]_{\theta_1}^{\theta_2} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 b}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + b^2}}\right]_{-a}^{L-a} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 b}\left(\frac{L-a}{\sqrt{(L-a)^2 + b^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) \end{aligned}$$



43. Sachant que l'équation du grand cercle est $x^2 + y^2 = R^2$. Alors, l'équation du petit cercle sera $x^2 + (y - b)^2 = r^2$, où $b = \sqrt{R^2 - r^2}$ est la distance entre les centres des deux cercles. L'aire A qu'il faut trouver est donnée par

$$\begin{aligned} A &= \int_{-r}^{r}\left[b + \sqrt{r^2 - x^2} - \sqrt{R^2 - x^2}\right]dx \\ &= 2\int_0^r \left(b + \sqrt{r^2 - x^2} - \sqrt{R^2 - x^2}\right)dx \\ &= 2\int_0^r b\,dx + 2\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx - 2\int_0^r \sqrt{R^2 - x^2}\,dx \end{aligned}$$



La première intégrale est simplement $2br = 2r\sqrt{R^2 - r^2}$. La seconde intégrale représente l'aire d'un quart de cercle de rayon r, sa valeur est donc $\frac{1}{4}\pi r^2$. Pour évaluer la dernière intégrale, on calcule d'abord que

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx &= \int a^2\cos^2\theta d\theta \quad [x = a\sin\theta, dx = a\cos\theta d\theta] = \left(\tfrac{1}{2}a^2\right)\int (1 + \cos 2\theta)d\theta \\ &= \tfrac{1}{2}a^2(\theta + \tfrac{1}{2}\sin 2\theta) + C = \tfrac{1}{2}a^2(\theta + \sin\theta\cos\theta) + C \\ &= \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{a^2}{2}\left(\frac{x}{a}\right)\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} + C = \frac{a^2}{2}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C \end{aligned}$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

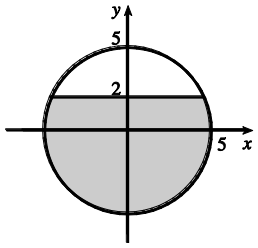
Par conséquent, l'aire A qu'il faut trouver est

$$A = 2r\sqrt{R^2 - r^2} + 2\left(\tfrac{1}{4}\pi r^2\right) - \left[R^2 \arcsin(x/R) + x\sqrt{R^2 - x^2}\right]_0^r$$
$$= 2r\sqrt{R^2 - r^2} + \tfrac{1}{2}\pi r^2 - \left[R^2 \arcsin(r/R) + r\sqrt{R^2 - r^2}\right] = r\sqrt{R^2 - r^2} + \tfrac{\pi}{2}r^2 - R^2 \arcsin(r/R)$$

44. Puisque le cylindre repose sur le côté, les sections circulaires du réservoir sont toutes identiques. Par conséquent, le pourcentage de la capacité totale qui est utilisé correspond au pourcentage de l'aire de n'importe quelle section circulaire qui est sous la surface de l'eau. L'aire A de la partie immergée est

$$A = 2\int_{-5}^{2} \sqrt{25 - y^2}\, dy$$
$$= \left[25 \arcsin(y/5) + y\sqrt{25 - y^2}\right]_{-5}^{2} \quad [\text{Avec le changement de variable } y = 5\sin\theta]$$
$$= 25 \arcsin\tfrac{2}{5} + 2\sqrt{21} + \tfrac{25}{2}\pi \approx 58,72 \text{ m}^2.$$

Le pourcentage de la capacité totale utilisée est donc $\dfrac{A}{\pi(5)^2} \approx \dfrac{58,72}{25\pi} \approx 0,748$ ou 74,8 %.



 © Groupe Modulo inc., 2013

3.4 L'intégration de fonctions rationnelles au moyen de fractions partielles

1. a) $\dfrac{1+6x}{(4x-3)(2x+5)} = \dfrac{A}{4x-3} + \dfrac{B}{2x+5}$

b) $\dfrac{10}{5x^2-2x^3} = \dfrac{10}{x^2(5-2x)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{5-2x}$

2. a) $\dfrac{x}{x^2+x-2} = \dfrac{x}{(x+2)(x-1)} = \dfrac{A}{x+2} + \dfrac{B}{x-1}$

b) $\dfrac{x^2}{x^2+x+2} = \dfrac{(x^2+x+2)-(x+2)}{x^2+x+2} = 1 - \dfrac{x+2}{x^2+x+2}$

$x^2 + x + 2$ est irréductible parce que son discriminant est $b^2 - 4ac = -7 < 0$.

3. a) $\dfrac{x^4+1}{x^5+4x^3} = \dfrac{x^4+1}{x^3(x^2+4)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x^3} + \dfrac{Dx+E}{x^2+4}$

b) $\dfrac{1}{(x^2-9)^2} = \dfrac{1}{[(x+3)(x-3)]^2} = \dfrac{1}{(x+3)^2(x-3)^2} = \dfrac{A}{x+3} + \dfrac{B}{(x+3)^2} + \dfrac{C}{x-3} + \dfrac{D}{(x-3)^2}$

4. a) $\dfrac{x^4-2x^3+x^2+2x-1}{x^2-2x+1} = \dfrac{x^2(x^2-2x+1)+2x-1}{x^2-2x+1} = x^2 + \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$ [ou au moyen de la division euclidienne]

$= x^2 + \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{(x-1)^2}$

b) $\dfrac{x^2-1}{x^3+x^2+x} = \dfrac{x^2-1}{x(x^2+x+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{x^2+x+1}$

5. a) $\dfrac{x^6}{x^2-4} = x^4 + 4x^2 + 16 + \dfrac{64}{(x+2)(x-2)}$ [au moyen de la division euclidienne]

$= x^4 + 4x^2 + 16 + \dfrac{A}{x+2} + \dfrac{B}{x-2}$

b) $\dfrac{x^4}{(x^2-x+1)(x^2+2)^2} = \dfrac{Ax+B}{x^2-x+1} + \dfrac{Cx+D}{x^2+2} + \dfrac{Ex+F}{(x^2+2)^2}$

6. a) $\dfrac{t^6+1}{t^6+t^3} = \dfrac{(t^6+t^3)-t^3+1}{t^6+t^3} = 1 + \dfrac{-t^3+1}{t^3(t^3+1)} = 1 + \dfrac{-t^3+1}{t^3(t+1)(t^2-t+1)} = 1 + \dfrac{A}{t} + \dfrac{B}{t^2} + \dfrac{C}{t^3} + \dfrac{D}{t+1} + \dfrac{Ex+F}{t^2-t+1}$

b) $\dfrac{x^5+1}{(x^2-x)(x^4+2x^2+1)} = \dfrac{x^5+1}{x(x-1)(x^2+1)^2} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{Cx+D}{x^2+1} + \dfrac{Ex+F}{(x^2+1)^2}$

7. $\displaystyle\int \frac{x^4}{x-1}\,dx = \int \left(x^3 + x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1}\right) dx$ [au moyen de la division euclidienne] $= \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + x + \ln|x-1| + C$

 © Groupe Modulo inc., 2013

8. $\int \frac{3t-2}{t+1}\,dt = \int\left(3 - \frac{5}{t+1}\right)dt = 3t - 5\ln|t+1| + C$

9. $\frac{5x+1}{(2x+1)(x-1)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x-1}$. Multiplions les deux membres de l'équation par $(2x + 1)(x - 1)$, ce qui donne $5x+1 = A(x-1) + B(2x+1) \Rightarrow 5x+1 = Ax - A + 2Bx + B \Rightarrow 5x+1 = (A+2B)x + (-A+B)$. Les coefficients de x doivent être égaux, et les termes constants sont aussi égaux, donc $A + 2B = 5$ et $-A + B = 1$. En additionnant membre à membre ces deux équations, nous obtenons $3B = 6 \Leftrightarrow B = 2$ et donc, $A = 1$. Par conséquent,

$$\int \frac{5x+1}{(2x+1)(x-1)}\,dx = \int\left(\frac{1}{2x+1} + \frac{2}{x-1}\right)dx = \tfrac{1}{2}\ln|2x+1| + 2\ln|x-1| + C.$$

Autre méthode : En remplaçant x par 1 dans l'équation $5x + 1 = A(x - 1) + B(2x + 1)$, nous obtenons $6 = 3B \Leftrightarrow B = 2$. En remplaçant x par $-\frac{1}{2}$, nous obtenons $-\frac{3}{2} = -\frac{3}{2}A \Leftrightarrow A = 1$.

10. $\frac{y}{(y+4)(2y-1)} = \frac{A}{y+4} + \frac{B}{2y-1}$. Multiplions les deux membres de l'équation par $(y + 4)(2y - 1)$, ce qui donne $y = A(2y-1) + B(y+4) \Rightarrow y = 2Ay - A + By + 4B \Rightarrow y = (2A+B)y + (-A+4B)$. Les coefficients de y doivent être égaux, et les termes constants sont aussi égaux, donc $2A + B = 1$ et $-A + 4B = 0$. En additionnant deux fois la seconde équation à la première, nous obtenons $9B = 1 \Leftrightarrow B = \frac{1}{9}$ et donc, $A = \frac{4}{9}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\int \frac{y\,dy}{(y+4)(2y-1)} &= \int\left(\frac{\frac{4}{9}}{y+4} + \frac{\frac{1}{9}}{2y-1}\right)dy = \frac{4}{9}\ln|y+4| + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2}\ln|2y-1| + C \\ &= \tfrac{4}{9}\ln|y+4| + \tfrac{1}{18}\ln|2y-1| + C\end{aligned}$$

Autre méthode : Si nous remplaçons y par $\frac{1}{2}$ dans l'équation $y = A(2y - 1) + B(y + 4)$, nous obtenons $\frac{1}{2} = \frac{9}{2}B \Leftrightarrow B = \frac{1}{9}$. En remplaçant y par -4, nous obtenons $-4 = -9A \Leftrightarrow A = \frac{4}{9}$.

11. $\frac{2}{2x^2+3x+1} = \frac{2}{(2x+1)(x+1)} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x+1}$. Multiplions les deux membres de l'équation par $(2x + 1)(x + 1)$, ce qui donne $2 = A(x + 1) + B(2x + 1)$. Les coefficients de x doivent être égaux, et les termes constants sont aussi égaux, donc $A + 2B = 0$ et $A + B = 2$. En soustrayant la seconde équation de la première, nous obtenons $B = -2$ et donc, $A = 4$. Par conséquent,

$$\int_0^1 \frac{2}{2x^2+3x+1}\,dx = \int_0^1\left(\frac{4}{2x+1} - \frac{2}{x+1}\right)dx = \left[\frac{4}{2}\ln|2x+1| - 2\ln|x+1|\right]_0^1 = (2\ln 3 - 2\ln 2) - 0 = 2\ln\frac{3}{2}.$$

Autre méthode : En remplaçant x par -1 dans l'équation $2 = A(x + 1) + B(2x + 1)$, nous obtenons $2 = -B \Leftrightarrow B = -2$. En remplaçant x par $-\frac{1}{2}$, nous obtenons $2 = \frac{1}{2}A \Leftrightarrow A = 4$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

12. $\dfrac{x-4}{x^2-5x+6}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x-3}$. Multiplions les deux membres de l'équation par $(x-2)(x-3)$, ce qui donne

$x-4=A(x-3)+B(x-2) \;\Rightarrow\; x-4=Ax-3A+Bx-2B \;\Rightarrow\; x-4=(A+B)x+(-3A-2B)$. Les coefficients de x doivent être égaux, et les termes constants sont aussi égaux, donc $A+B=1$ et $-3A-2B=-4$. En additionnant deux fois la première équation à la seconde, nous obtenons $-A=-2 \;\Leftrightarrow\; A=2$ et donc, $B=-1$. Par conséquent,

$$\int_0^1 \frac{x-4}{x^2-5x+6}\,dx=\int_0^1\left(\frac{2}{x-2}-\frac{1}{x-3}\right)dx=[2\ln|x-2|-\ln|x-3|]_0^1$$
$$=(0-\ln 2)-(2\ln 2-\ln 3)=-3\ln 2+\ln 3\ [\text{ou } \ln\tfrac{3}{8}]$$

Autre méthode : En remplaçant x par 3 dans l'équation $x-4=A(x-3)+B(x-2)$, nous obtenons $-1=B$. En remplaçant x par 2, nous obtenons $-2=-A \;\Leftrightarrow\; A=2$.

13. $\displaystyle\int\frac{ax}{x^2-bx}\,dx=\int\frac{ax}{x(x-b)}\,dx=\int\frac{a}{x-b}\,dx=a\ln|x-b|+C$

14. Si $a\neq b$, $\dfrac{1}{(x+a)(x+b)}=\dfrac{1}{b-a}\left(\dfrac{1}{x+a}-\dfrac{1}{x+b}\right)$, donc si $a\neq b$, alors

$$\int\frac{dx}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{b-a}(\ln|x+a|-\ln|x+b|)+C=\frac{1}{b-a}\ln\left|\frac{x+a}{x+b}\right|+C$$

Si $a=b$, alors $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+a)^2}=-\frac{1}{x+a}+C$.

15. $\dfrac{x^3-2x^2-4}{x^3-2x^2}=1+\dfrac{-4}{x^2(x-2)}$. Soit $\dfrac{-4}{x^2(x-2)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x-2}$. Multiplions les deux membres de l'équation par $x^2(x-2)$, ce qui donne $-4=Ax(x-2)+B(x-2)+Cx^2$. En remplaçant x par 0, nous obtenons $-4=-2B \;\Leftrightarrow\; B=2$. En remplaçant x par 2, nous obtenons $-4=4C \;\Leftrightarrow\; C=-1$. En égalisant les coefficients de x^2, nous obtenons $0=A+C$, donc $A=1$. Par conséquent,

$$\int_3^4\frac{x^3-2x^2-4}{x^3-2x^2}\,dx=\int_3^4\left(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x-2}\right)dx=\left[x+\ln|x|-\frac{2}{x}-\ln|x-2|\right]_3^4$$
$$=[(4+\ln 4-\tfrac{1}{2}-\ln 2)-(3+\ln 3-\tfrac{2}{3}-0)]=\tfrac{7}{6}+\ln\tfrac{2}{3}$$

16. $\dfrac{x^3-4x-10}{x^2-x-6}=x+1+\dfrac{3x-4}{(x-3)(x+2)}$. Soit $\dfrac{3x-4}{(x-3)(x+2)}=\dfrac{A}{x-3}+\dfrac{B}{x+2}$. Alors, $3x-4=A(x+2)+B(x-3)$. En substituant $x=3$ et $x=-2$, nous obtenons $5=5A \;\Leftrightarrow\; A=1$ et $-10=-5B \;\Leftrightarrow\; B=2$, donc

 © Groupe Modulo inc., 2013

$$\int_0^1 \frac{x^3-4x-10}{x^2-x-6}\,dx = \int_0^1 \left(x+1+\frac{1}{x-3}+\frac{2}{x+2}\right)dx = \left[\frac{1}{2}x^2+x+\ln|x-3|+2\ln(x+2)\right]_0^1$$
$$= (\tfrac{1}{2}+1+\ln 2+2\ln 3)-(0+0+\ln 3+2\ln 2) = \tfrac{3}{2}+\ln 3-\ln 2 = \tfrac{3}{2}+\ln\tfrac{3}{2}$$

17. $\dfrac{4y^2-7y-12}{y(y+2)(y-3)} = \dfrac{A}{y}+\dfrac{B}{y+2}+\dfrac{C}{y-3} \Rightarrow 4y^2-7y-12 = A(y+2)(y-3)+By(y-3)+Cy(y+2)$. En substituant $y = 0$, nous obtenons $-12 = -6A$, donc $A = 2$. En substituant $y = -2$, nous obtenons $18 = 10B$, donc $B = \frac{9}{5}$. En substituant $y = 3$, nous obtenons $3 = 15C$, donc $C = \frac{1}{5}$. Finalement,

$$\int_1^2 \frac{4y^2-7y-12}{y(y+2)(y-3)}\,dy = \int_1^2 \left(\frac{2}{y}+\frac{9/5}{y+2}+\frac{1/5}{y-3}\right)dy = \left[2\ln|y|+\tfrac{9}{5}\ln|y+2|+\tfrac{1}{5}\ln|y-3|\right]_1^2$$
$$= 2\ln 2+\tfrac{9}{5}\ln 4+\tfrac{1}{5}\ln 1-2\ln 1-\tfrac{9}{5}\ln 3-\tfrac{1}{5}\ln 2$$
$$= 2\ln 2+\tfrac{18}{5}\ln 2-\tfrac{1}{5}\ln 2-\tfrac{9}{5}\ln 3 = \tfrac{27}{5}\ln 2-\tfrac{9}{5}\ln 3 = \tfrac{9}{5}(3\ln 2-\ln 3) = \tfrac{9}{5}\ln\tfrac{8}{3}$$

18. $\dfrac{x^2+2x-1}{x^3-x} = \dfrac{x^2+2x-1}{x(x+1)(x-1)} = \dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{C}{x-1}$. Multiplions les deux membres de l'équation par $x(x + 1)(x - 1)$, ce qui donne $x^2+2x-1 = A(x+1)(x-1)+Bx(x-1)+Cx(x+1) \Rightarrow x^2+2x-1 = Ax^2-A+Bx^2-Bx+Cx^2+Cx \Rightarrow$ $x^2+2x-1 = (A+B+C)x^2+(-B+C)x-A$. En égalisant les termes constants, nous obtenons $-A=-1 \Leftrightarrow A=1$. En égalisant les coefficients de x^2, nous obtenons $1=1+B+C \Leftrightarrow 0=B+C$. En égalisant les coefficients de x, nous obtenons $2 = -B + C$. En additionnant membre à mebre ces équations, nous obtenons $2=2C \Leftrightarrow C=1$ et donc, $B = -1$. Par conséquent,

$$\int \frac{x^2+2x-1}{x^3-x}\,dx = \int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)dx = \ln|x|-\ln|x+1|+\ln|x-1|+C = \ln\left|\frac{x(x-1)}{x+1}\right|+C\ .$$

Autre méthode : En remplaçant x par 0 dans l'équation $x^2 + 2x - 1 = A(x + 1)(x - 1) + Bx(x - 1) + Cx(x + 1)$, nous obtenons $-1=-A \Leftrightarrow A=1$. En remplaçant x par -1, nous obtenons $-2=2B \Leftrightarrow B=-1$. En remplaçant x par 1, nous obtenons $2=2C \Leftrightarrow C=1$.

19. $\dfrac{x^2+1}{(x-3)(x-2)^2} = \dfrac{A}{x-3}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C}{(x-2)^2}$. Multiplions les deux membres de l'équation par $(x - 3)(x - 2)^2$, ce qui donne $x^2 + 1 = A(x - 2)^2 + B(x - 3)(x - 2) + C(x - 3)$. En substituant $x = 2$, nous obtenons $5 = -C \Leftrightarrow C = -5$. En susbtituant $x = 3$, nous obtenons $10 = A$. En égalisant les coefficients de x^2, nous obtenons $1 = A + B$, donc $B = -9$. Par conséquent,

$$\int \frac{x^2+1}{(x-3)(x-2)^2}\,dx = \int\left(\frac{10}{x-3}-\frac{9}{x-2}-\frac{5}{(x-2)^2}\right)dx = 10\ln|x-3|-9\ln|x-2|+\frac{5}{x-2}+C\ .$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

20. $\dfrac{x^2-5x+16}{(2x+1)(x-2)^2}=\dfrac{A}{2x+1}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C}{(x-2)^2} \quad \Rightarrow \quad x^2-5x+16=A(x-2)^2+B(x-2)(2x+1)+C(2x+1)$. En substituant $x = 2$, nous obtenons $10 = 5C$, donc $C = 2$. En substituant $x=-\frac{1}{2}$, nous obtenons $\frac{75}{4}=\frac{25}{4}A$, donc $A = 3$. En égalisant les coefficients de x^2, nous obtenons $1 = A + 2B$, donc $-2 = 2B$ et $B = -1$. Par conséquent,

$$\int\frac{x^2-5x+16}{(2x+1)(x-2)^2}\,dx=\int\left(\frac{3}{2x+1}-\frac{1}{x-2}+\frac{2}{(x-2)^2}\right)dx=\frac{3}{2}\ln|2x+1|-\ln|x-2|-\frac{2}{x-2}+C\,.$$

21.
$$\begin{array}{rl} x^3+4 & \big|\,x^2+4 \\ \underline{-\left(x^3+4x\right)} & x \\ -4x+4 & \end{array}$$
En utilisant la division euclidienne, nous obtenons $\dfrac{x^3+4}{x^2+4}=x+\dfrac{-4x+4}{x^2+4}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\int\frac{x^3+4}{x^2+4}\,dx&=\int\left(x+\frac{-4x+4}{x^2+4}\right)dx=\int\left(x-\frac{4x}{x^2+4}+\frac{4}{x^2+2^2}\right)dx\\&=\frac{1}{2}x^2-4\cdot\frac{1}{2}\ln|x^2+4|+4\cdot\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+C=\frac{1}{2}x^2-2\ln(x^2+4)+2\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+C\end{aligned}$$

22. $\dfrac{1}{s^2(s-1)^2}=\dfrac{A}{s}+\dfrac{B}{s^2}+\dfrac{C}{s-1}+\dfrac{D}{(s-1)^2} \quad \Rightarrow \quad 1=As(s-1)^2+B(s-1)^2+Cs^2(s-1)+Ds^2$. En substituant $s = 0$, nous obtenons $B = 1$. En substituant ensuite $s = 1$, nous obtenons $D = 1$. En égalisant les coefficients de s^3, nous obtenons $0 = A + C$ ou $A = -C$. Finalement, en substituant $s = 2$, nous obtenons $1 = 2A + 1 - 4A + 4$ ou $A = 2$. Par conséquent,

$$\int\frac{ds}{s^2(s-1)^2}=\int\left[\frac{2}{s}+\frac{1}{s^2}-\frac{2}{s-1}+\frac{1}{(s-1)^2}\right]ds=2\ln|s|-\frac{1}{s}-2\ln|s-1|-\frac{1}{s-1}+C\,.$$

23. $\dfrac{10}{(x-1)(x^2+9)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+9}$. Multiplions les deux membres de l'équation par $(x - 1)(x^2 + 9)$, ce qui donne $10 = A(x^2 + 9) + (Bx + C)(x - 1)$ (*). En susbtituant x par 1, nous obtenons $10=10A \quad \Leftrightarrow \quad A=1$. En susbtituant x par 0, nous obtenons $10=9A-C \quad \Rightarrow \quad C=9(1)-10=-1$. Les coefficients des termes de x^2 dans l'équation (*) doivent être égaux, donc $0=A+B \quad \Rightarrow \quad B=-1$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\int\frac{10}{(x-1)(x^2+9)}\,dx&=\int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{-x-1}{x^2+9}\right)dx=\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x}{x^2+9}-\frac{1}{x^2+9}\right)dx\\&=\ln|x-1|-\tfrac{1}{2}\ln(x^2+9)-\tfrac{1}{3}\arctan(\tfrac{x}{3})+C\end{aligned}$$

Nous avons utilisé le changement de variable $u = x^2 + 9$ pour le deuxième terme et la formule 10 pour le dernier terme.

24. $\dfrac{x^2-x+6}{x^3+3x}=\dfrac{x^2-x+6}{x(x^2+3)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{Bx+C}{x^2+3}$. Multiplions les deux membres de l'équation par $x(x^2 + 3)$, ce qui donne $x^2 - x + 6 = A(x^2 + 3) + (Bx + C)x$. En susbtituant x par 0, nous obtenons $6=3A \quad \Leftrightarrow \quad A=2$. Les coefficients des termes de x^2

 © Groupe Modulo inc., 2013

doivent être égaux, donc $1 = A + B \;\Rightarrow\; B = 1 - 2 = -1$. Les coefficients des termes de x doivent être égaux, donc $-1 = C$. Par conséquent,

$$\int \frac{x^2 - x + 6}{x^3 + 3x}\,dx = \int\left(\frac{2}{x} + \frac{-x-1}{x^2+3}\right)dx = \int\left(\frac{2}{x} - \frac{x}{x^2+3} - \frac{1}{x^2+3}\right)dx$$
$$= 2\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+3) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}} + C$$

25. $\dfrac{4x}{x^3+x^2+x+1} = \dfrac{4x}{x^2(x+1)+1(x+1)} = \dfrac{4x}{(x+1)(x^2+1)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}$. Multiplions les deux membres de l'équation par $(x + 1)(x^2 + 1)$, ce qui donne

$4x = A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1) \;\Leftrightarrow\; 4x = Ax^2 + A + Bx^2 + Bx + Cx + C \;\Leftrightarrow\; 4x = (A+B)x^2 + (B+C)x + (A+C)$. En égalisant les coefficients, nous obtenons le système d'équations suivant :

1) $A + B = 0$ **2)** $B + C = 4$ **3)** $A + C = 0$

En soustrayant membre à membre l'équation 1) de l'équation 2), nous obtenons $-A + C = 4$, et en additionnant membre à membre cette dernière équation à l'équation 3), nous obtenons $2C = 4 \;\Leftrightarrow\; C = 2$ et donc $A = -2$ et $B = 2$. Par conséquent,

$$\int \frac{4x}{x^3+x^2+x+1}\,dx = \int\left(\frac{-2}{x+1} + \frac{2x+2}{x^2+1}\right)dx = \int\left(\frac{-2}{x+1} + \frac{2x}{x^2+1} + \frac{2}{x^2+1}\right)dx$$
$$= -2\ln|x+1| + \ln(x^2+1) + 2\arctan x + C.$$

26. $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^2}\,dx + \int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{1}{x^2+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2}\,du \quad [u = x^2+1, du = 2x\,dx]$

$$= \arctan x + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{u}\right) + C = \arctan x - \frac{1}{2(x^2+1)} + C$$

27. $\dfrac{x^3+x^2+2x+1}{(x^2+1)(x^2+2)} = \dfrac{Ax+B}{x^2+1} + \dfrac{Cx+D}{x^2+2}$. Multiplions les deux membres de l'équation par $(x^2+1)(x^2+2)$, ce qui donne

$x^3 + x^2 + 2x + 1 = (Ax+B)(x^2+2) + (Cx+D)(x^2+1) \;\Leftrightarrow\; x^3 + x^2 + 2x + 1 = (Ax^3 + Bx^2 + 2Ax + 2B) + (Cx^3 + Dx^2 + Cx + D) \;\Leftrightarrow$

$x^3 + x^2 + 2x + 1 = (A+C)x^3 + (B+D)x^2 + (2A+C)x + (2B+D)$. En égalisant les coefficients, nous obtenons le système d'équations suivant :

1) $A + C = 1$ **2)** $B + D = 1$
3) $2A + C = 2$ **4)** $2B + D = 1$

En soustrayant membre à membre l'équation 1) de l'équation 3), nous obtenons $A = 1$, donc $C = 0$. En soustrayant membre à membre l'équation 2) de l'équation 4), nous obtenons $B = 0$, donc $D = 1$. Par conséquent, $I = \displaystyle\int \frac{x^3+x^2+2x+1}{(x^2+1)(x^2+2)}\,dx = \int\left(\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+2}\right)dx$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

Pour $\int \frac{x}{x^2+1}dx$, Posons $u = x^2 + 1$, ainsi $du = 2x\,dx$ et ensuite $\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$. Pour $\int \frac{1}{x^2+2}dx$, utilisons la formule 10 avec $a = \sqrt{2}$. Donc, $\int \frac{1}{x^2+2}dx = \int \frac{1}{x^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + C$.

Par conséquent, $I = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + C$.

28. $\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \Rightarrow x^2-2x-1 = A(x-1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)^2$.

En substituant $x = 1$, nous obtenons $B = -1$. En égalisant les coefficients de x^3, nous obtenons $A = -C$. En égalisant les termes constants, nous obtenons $-1 = -A - 1 + D$, donc $D = A$. En substituant $x = 2$, nous obtenons $-1 = 5A - 5 - 2A + A$ ou $A = 1$. Par conséquent,

$$\int \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2(x^2+1)}dx = \int\left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{x-1}{x^2+1}\right]dx = \ln|x-1| + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan x + C .$$

29.
$$\begin{aligned}\int \frac{x+4}{x^2+2x+5}dx &= \int \frac{x+1}{x^2+2x+5}dx + \int \frac{3}{x^2+2x+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+2)\,dx}{x^2+2x+5} + \int \frac{3\,dx}{(x+1)^2+4}dx \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+5\right| + 3\int \frac{2\,du}{4(u^2+1)} \quad \begin{bmatrix}\text{où } x+1 = 2u, \\ \text{et } dx = 2du\end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) + \frac{3}{2}\arctan u + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) + \frac{3}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C\end{aligned}$$

30. $\frac{3x^2+x+4}{x^4+3x^2+2} = \frac{3x^2+x+4}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2}$ Multiplions les deux membres de l'équation par $(x^2 + 1)(x^2 + 2)$, ce qui donne

$3x^2+x+4 = (Ax+B)(x^2+2) + (Cx+D)(x^2+1) \Leftrightarrow$

$3x^2+x+4 = (Ax^3+Bx^2+2Ax+2B) + (Cx^3+Dx^2+Cx+D) \Leftrightarrow$

$3x^2+x+4 = (A+C)x^3 + (B+D)x^2 + (2A+C)x + (2B+D)$. En égalisant les coefficients, nous obtenons le système d'équations suivant :

1) $A + C = 0$ **2)** $B + D = 3$
3) $2A + C = 1$ **4)** $2B + D = 4$

En soustrayant membre à membre l'équation 1) de l'équation 3), nous obtenons $A = 1$, donc $C = -1$. En soustrayant membre à membre l'équation 2) de l'équation 4), nous obtenons $B = 1$, donc $D = 2$. Par conséquent,

 © Groupe Modulo inc., 2013

$$I = \int \frac{3x^2 + x + 4}{x^4 + 3x^2 + 2}\,dx = \int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx + \int \frac{-x+2}{x^2+2}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+2}\,dx + 2\int \frac{1}{x^2+(\sqrt{2})^2}\,dx$$
$$= \tfrac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + \arctan x - \tfrac{1}{2}\ln\left|x^2+2\right| + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$$
$$= \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) - \tfrac{1}{2}\ln(x^2+2) + \arctan x + \sqrt{2}\arctan(x/\sqrt{2}) + C$$

31. $\dfrac{1}{x^3-1} = \dfrac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{Bx+C}{x^2+x+1} \quad\Rightarrow\quad 1 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1)$. En substituant $x = 1$, nous obtenons $A = \frac{1}{3}$.

En égalisant les coefficients de x^2 et en égalisant ensuite les termes constants, nous obtenons $0 = \frac{1}{3} + B$, $1 = \frac{1}{3} - C$, donc $B = -\frac{1}{3}$, $C = -\frac{2}{3}$ $\Rightarrow$

$$\int \frac{1}{x^3-1}\,dx = \int \frac{\frac{1}{3}}{x-1}\,dx + \int \frac{-\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}}{x^2+x+1}\,dx = \tfrac{1}{3}\ln\left|x-1\right| - \frac{1}{3}\int \frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx$$
$$= \tfrac{1}{3}\ln\left|x-1\right| - \frac{1}{3}\int \frac{x+1/2}{x^2+x+1}\,dx - \frac{1}{3}\int \frac{(3/2)\,dx}{(x+1/2)^2+3/4}$$
$$= \tfrac{1}{3}\ln\left|x-1\right| - \tfrac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \tfrac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\arctan\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{3}/2}\right) + K$$
$$= \tfrac{1}{3}\ln\left|x-1\right| - \tfrac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \tfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}(2x+1)\right) + K$$

32. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+4x+13}\,dx = \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}(2x+4)}{x^2+4x+13}\,dx - 2\int_0^1 \frac{dx}{(x+2)^2+9}$

$$= \frac{1}{2}\int_{13}^{18} \frac{dy}{y} - 2\int_{2/3}^{1} \frac{3\,du}{9u^2+9} \qquad \left[\begin{array}{c}\text{où } y = x^2+4x+13,\ dy = (2x+4)\,dx,\\ x+2 = 3u \text{ et } dx = 3du\end{array}\right]$$
$$= \tfrac{1}{2}[\ln y]_{13}^{18} - \tfrac{2}{3}[\arctan u]_{2/3}^{1} = \tfrac{1}{2}\ln\tfrac{18}{13} - \tfrac{2}{3}(\tfrac{\pi}{4} - \arctan(\tfrac{2}{3}))$$
$$= \tfrac{1}{2}\ln\tfrac{18}{13} - \tfrac{\pi}{6} + \tfrac{2}{3}\arctan(\tfrac{2}{3})$$

33. Posons $u = x^4 + 4x^2 + 3$, de sorte que $du = (4x^3 + 8x)\,dx = 4(x^3 + 2x)\,dx$, $x = 0 \quad\Rightarrow\quad u = 3$ et $x = 1 \quad\Rightarrow\quad u = 8$. Alors,

$$\int_0^1 \frac{x^3+2x}{x^4+4x^2+3}dx = \int_3^8 \frac{1}{u}\left(\frac{1}{4}du\right) = \frac{1}{4}\Big[\ln|u|\Big]_3^8 = \frac{1}{4}(\ln 8 - \ln 3) = \frac{1}{4}\ln\frac{8}{3}.$$

34. $\dfrac{x^5+x-1}{x^3+1} = x^2 + \dfrac{-x^2+x-1}{x^3+1} = x^2 + \dfrac{-x^2+x-1}{(x+1)(x^2-x+1)} = x^2 + \dfrac{-1}{x+1}$, donc $\displaystyle\int \frac{x^5+x-1}{x^3+1}\,dx = \int\left(x^2 - \frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{1}{3}x^3 - \ln\left|x+1\right| + C$

35. $\dfrac{1}{x(x^2+4)^2} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{x^2+4} + \dfrac{Dx+E}{(x^2+4)^2} \quad\Rightarrow\quad 1 = A(x^2+4)^2 + (Bx+C)x(x^2+4) + (Dx+E)x$. En substituant $x = 0$, nous obtenons

$1 = 16A$, donc $A = \frac{1}{16}$. Égalisons maintenant les coefficients.

 © Groupe Modulo inc., 2013

$$1 = \tfrac{1}{16}(x^4 + 8x^2 + 16) + (Bx^2 + Cx)(x^4 + 4) + Dx^2 + Ex$$
$$1 = \tfrac{1}{16}x^4 + \tfrac{1}{2}x^2 + 1 + Bx^4 + Cx^3 + 4Bx^2 + 4Cx + Dx^2 + Ex$$
$$1 = (\tfrac{1}{16} + B)x^4 + Cx^3 + (\tfrac{1}{2} + 4B + D)x^2 + (4C + E)x + 1$$

donc $B + \frac{1}{16} = 0 \;\Rightarrow\; B = -\frac{1}{16}$, $C = 0$, $\frac{1}{2} + 4B + D = 0 \;\Rightarrow\; D = -\frac{1}{4}$ et $4C + E = 0 \;\Rightarrow\; E = 0$. Par conséquent,

$$\int \frac{dx}{x(x^2+4)^2} = \int\left(\frac{\frac{1}{16}}{x} + \frac{-\frac{1}{16}x}{x^2+4} + \frac{-\frac{1}{4}x}{(x^2+4)^2}\right) dx = \frac{1}{16}\ln|x| - \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{2}\ln|x^2+4| - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^2+4} + C$$
$$= \frac{1}{16}\ln|x| - \frac{1}{32}\ln(x^2+4) + \frac{1}{8(x^2+4)} + C$$

36. Posons $u = x^5 + 5x^3 + 5x$, de sorte que $du = (5x^4 + 15x^2 + 5)dx = 5(x^4 + 3x^2 + 1)\,dx$. Alors,

$$\int \frac{x^4+3x^2+1}{x^5+5x^3+5x}\,dx = \int \frac{1}{u}\left(\frac{1}{5}\,du\right) = \frac{1}{5}\ln|u| + C = \frac{1}{5}\ln|x^5+5x^3+5x| + C$$

37. $\dfrac{x^2-3x+7}{(x^2-4x+6)^2} = \dfrac{Ax+B}{x^2-4x+6} + \dfrac{Cx+D}{(x^2-4x+6)^2} \;\Rightarrow\; x^2 - 3x + 7 = (Ax+B)(x^2-4x+6) + Cx + D \;\Rightarrow$

$x^2 - 3x + 7 = \mathrm{A}x^3 + (-4A + B)x^2 + (6A - 4B + C)x + (6B + D)$. Donc, $A = 0$, $-4A + B = 1 \;\Rightarrow\; B = 1$. $6A - 4B + C = -3 \;\Rightarrow\; C = 1$,

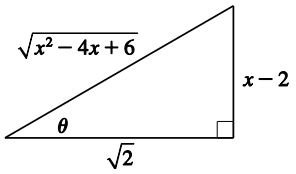
$6B + D = 7 \;\Rightarrow\; D = 1$. Par conséquent,

$$I = \int \frac{x^2-3x+7}{(x^2-4x+6)^2}\,dx = \int\left(\frac{1}{x^2-4x+6} + \frac{x+1}{(x^2-4x+6)^2}\right) dx$$
$$= \int \frac{1}{(x-2)^2+2}\,dx + \int \frac{x-2}{(x^2-4x+6)^2}\,dx + \int \frac{3}{(x^2-4x+6)^2}\,dx$$
$$= I_1 + I_2 + I_3.$$

$$I_1 = \int \frac{1}{(x-2)^2 + (\sqrt{2})^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right) + C_1$$
$$I_2 = \frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{(x^2-4x+6)^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{u^2}\,du = \tfrac{1}{2}\left(-\frac{1}{u}\right) + C_2 = -\frac{1}{2(x^2-4x+6)} + C_2$$

$$I_3 = 3\int \frac{1}{[(x-2)^2 + (\sqrt{2})^2]^2}\,dx = 3\int \frac{1}{[2(\tan^2\theta + 1)]^2}\sqrt{2}\sec^2\theta\,d\theta \quad \begin{bmatrix} x - 2 = \sqrt{2}\tan\theta, \\ dx = \sqrt{2}\sec^2\theta\,d\theta \end{bmatrix}$$
$$= \frac{3\sqrt{2}}{4}\int \frac{\sec^2\theta}{\sec^4\theta}\,d\theta = \frac{3\sqrt{2}}{4}\int \cos^2\theta\,d\theta = \frac{3\sqrt{2}}{4}\int \tfrac{1}{2}(1 + \cos\,2\theta)\,d\theta$$
$$= \frac{3\sqrt{2}}{8}(\theta + \tfrac{1}{2}\sin 2\theta) + C_3 = \frac{3\sqrt{2}}{8}\arctan\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right) + \frac{3\sqrt{2}}{8}(\tfrac{1}{2}\cdot 2\sin\theta\cos\theta) + C_3$$
$$= \frac{3\sqrt{2}}{8}\arctan\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right) + \frac{3\sqrt{2}}{8}\cdot\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+6}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-4x+6}} + C_3$$
$$= \frac{3\sqrt{2}}{8}\arctan\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right) + \frac{3(x-2)}{4(x^2-4x+6)} + C_3$$

 © Groupe Modulo inc., 2013



Donc,

$$\begin{aligned}
I &= I_1 + I_2 + I_3 \quad [C = C_1 + C_2 + C_3] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right) + \frac{-1}{2(x^2-4x+6)} + \frac{3\sqrt{2}}{8}\arctan\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right) + \frac{3(x-2)}{4(x^2-4x+6)} + C \\
&= \left(\frac{4\sqrt{2}}{8} + \frac{3\sqrt{2}}{8}\right)\arctan\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right) + \frac{3(x-2)-2}{4(x^2-4x+6)} + C = \frac{7\sqrt{2}}{8}\arctan\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right) + \frac{3x-8}{4(x^2-4x+6)} + C
\end{aligned}$$

38. $\dfrac{x^3+2x^2+3x-2}{(x^2+2x+2)^2} = \dfrac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \dfrac{Cx+D}{(x^2+2x+2)^2} \Rightarrow x^3+2x^2+3x-2 = (Ax+B)(x^2+2x+2)+Cx+D \Rightarrow$
$x^3+2x^2+3x-2 = Ax^3+(2A+B)x^2+(2A+2B+C)x+2B+D$.

Donc, $A=1,\ 2A+B=2 \Rightarrow B=0,\ 2A+2B+C=3 \Rightarrow C=1$ et $2B+D=-2 \Rightarrow D=-2$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{x^3+2x^2+3x-2}{(x^2+2x+2)^2}dx = \int\left(\frac{x}{x^2+2x+2} + \frac{x-2}{(x^2+2x+2)^2}\right)dx \\
&= \int \frac{x+1}{x^2+2x+2}dx + \int \frac{-1}{x^2+2x+2}dx + \int \frac{x+1}{(x^2+2x+2)^2}dx + \int \frac{-3}{(x^2+2x+2)^2}dx. \\
&= I_1 + I_2 + I_3 + I_4
\end{aligned}$$

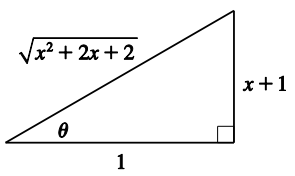
$$I_1 = \int \frac{x+1}{x^2+2x+2}dx = \int \frac{1}{u}\left(\frac{1}{2}du\right) \quad \begin{bmatrix} u = x^2+2x+2, \\ du = 2(x+1)dx \end{bmatrix} \quad = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right| + C_1$$

$$I_2 = -\int \frac{1}{(x+1)^2+1}dx = -\frac{1}{1}\arctan\left(\frac{x+1}{1}\right) + C_2 = -\arctan(x+1) + C_2$$

$$I_3 = \int \frac{x+1}{(x^2+2x+2)^2}dx = \int \frac{1}{u^2}\left(\frac{1}{2}du\right) = \frac{1}{2u} + C_3 = -\frac{1}{2(x^2+2x+2)} + C_3$$

$$I_4 = -3\int \frac{1}{[(x+1)^2+1]^2}dx = -3\int \frac{1}{(\tan^2\theta+1)^2}\sec^2\theta\, d\theta \quad \begin{bmatrix} x+1 = 1\tan\theta, \\ dx = \sec^2\theta\, d\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= -3\int \frac{1}{\sec^2\theta}d\theta = -3\int \cos^2\theta\, d\theta = -\frac{3}{2}\int(1+\cos 2\theta)d\theta \\
&= -\tfrac{3}{2}(\theta + \tfrac{1}{2}\sin 2\theta) + C_4 = -\tfrac{3}{2}\theta - \tfrac{3}{2}(\tfrac{1}{2}\cdot 2\sin\theta\cos\theta) + C_4 \\
&= -\frac{3}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{1}\right) - \frac{3}{2}\cdot\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}} + C_4 \\
&= -\frac{3}{2}\arctan(x+1) - \frac{3(x+1)}{2(x^2+2x+2)} + C_4
\end{aligned}$$



 © Groupe Modulo inc., 2013

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \quad [C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4]$$

Donc, $$= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) - \arctan(x+1) - \frac{1}{2(x^2+2x+2)} - \frac{3}{2}\arctan(x+1) - \frac{3(x+1)}{2(x^2+2x+2)} + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) - \frac{5}{2}\arctan(x+1) - \frac{3x+4}{2(x^2+2x+2)} + C$$

39. Posons $u = \sqrt{x+1}$, ainsi $u^2 = x + 1$ et $2u\,du = dx$. Alors, $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x}dx = \int \frac{u}{u^2-1}(2u\,du) = \int \frac{2u^2}{u^2-1}\,du = \int\left(2 + \frac{2}{u^2-1}\right)du$.

$\frac{2}{u^2-1} = \frac{2}{(u+1)(u-1)} = \frac{A}{u+1} + \frac{B}{u-1} \quad \Rightarrow \quad 2 = A(u-1) + B(u+1)$. En substituant $u = 1$, nous obtenons $B = 1$. En substituant $u = -1$, nous obtenons $A = -1$. Par conséquent,

$$\int\left(2 + \frac{2}{u^2-1}\right)du = \int\left(2 - \frac{1}{u+1} + \frac{1}{u-1}\right)du = 2u - \ln|u+1| + \ln|u-1| + C$$
$$= 2\sqrt{x+1} - \ln(\sqrt{x+1}+1) + \ln\left|\sqrt{x+1}-1\right| + C$$

.

40. Posons $u = \sqrt{x+3}$, ainsi $u^2 = x + 3$ et $2u\,du = dx$. Alors, $\int \frac{dx}{2\sqrt{x+3}+x} = \int \frac{2u\,du}{2u+(u^2-3)} = \int \frac{2u}{u^2+2u-3}du = \int \frac{2u}{(u+3)(u-1)}\,du$. Or,

$\frac{2u}{(u+3)(u-1)} = \frac{A}{u+3} + \frac{B}{u-1} \quad \Rightarrow \quad 2u = A(u-1) + B(u+3)$. En substituant $u = 1$, nous obtenons $2 = 4B$, donc $B = \frac{1}{2}$. En substituant $u = -3$, nous obtenons $-6 = -4A$, donc $A = \frac{3}{2}$. Par conséquent,

$$\int \frac{2u}{(u+3)(u-1)}du = \int\left(\frac{\frac{3}{2}}{u+3} + \frac{\frac{1}{2}}{u-1}du\right)$$
$$= \tfrac{3}{2}\ln|u+3| + \tfrac{1}{2}\ln|u-1| + C = \tfrac{3}{2}\ln(\sqrt{x+3}+3) + \tfrac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x+3}-1\right| + C$$

41. Posons $u = \sqrt{x}$, ainsi $u^2 = x$ et $2u\,du = dx$. Alors, $\int \frac{dx}{x^2+x\sqrt{x}} = \int \frac{2u\,du}{u^4+u^3} = \int \frac{2du}{u^3+u^2} = \int \frac{2du}{u^2(u+1)}$.

$\frac{2}{u^2(u+1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u^2} + \frac{C}{u+1} \quad \Rightarrow \quad 2 = Au(u+1) + B(u+1) + Cu^2$. En substituant $u = 0$, nous obtenons $B = 2$. En substituant $u = -1$, nous obtenons $C = 2$. En égalisant les coefficients de u^2, nous obtenons $0 = A + C$, donc $A = -2$. Par conséquent,

$$\int \frac{2\,du}{u^2(u+1)} = \int\left(\frac{-2}{u} + \frac{2}{u^2} + \frac{2}{u+1}\right)du = -2\ln|u| - \frac{2}{u} + 2\ln|u+1| + C = -2\ln\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + 2\ln(\sqrt{x}+1) + C.$$

42. Posons $u = \sqrt[3]{x}$, ainsi $x = u^3$ et $dx = 3u^2du \quad \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{3u^2du}{1+u} = \int_0^1\left(3u - 3 + \frac{3}{1+u}\right)du = [\frac{3}{2}u^2 - 3u + 3\ln(1+u)]_0^1 = 3(\ln 2 - \frac{1}{2})$.

43. Posons $u = \sqrt[3]{x^2+1}$, ainsi $x^2 = u^3 - 1$ et $2x\,dx = 3u^2\,du \quad \Rightarrow$

 © Groupe Modulo inc., 2013

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{x^2+1}} = \int \frac{(u^3-1)^{\frac{3}{2}}u^2\,du}{u} = \frac{3}{2}\int (u^4-u)\,du$$
$$= \tfrac{3}{10}u^5 - \tfrac{3}{4}u^2 + C = \tfrac{3}{10}(x^2+1)^{5/3} - \tfrac{3}{4}(x^2+1)^{2/3} + C$$

44. Posons $u = \sqrt{x}$, ainsi $x = u^2$ et $dx = 2u\,du$ $\Rightarrow$

$$\int_{1/3}^{3} \frac{\sqrt{x}}{x^2+x}\,dx = \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{u\cdot 2u\,du}{u^4+u^2} = 2\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{du}{u^2+1} = 2[\arctan u]_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = 2(\tfrac{\pi}{3} - \tfrac{\pi}{6}) = \tfrac{\pi}{3}.$$

45. Si nous posons le changement de variable $u = \sqrt{x}$, la racine carrée se simplifiera, mais il restera une racine cubique dans l'intégrande. D'un autre côté, le changement de variable $u = \sqrt[3]{x}$ simplifierait la racine cubique, mais il restera une racine carrée dans l'intégrande. Il est possible de simplifier simultanément les deux racines en posant le changement de variable $u = \sqrt[6]{x}$. (Il est à noter que 6 est le plus petit commun multiple de 2 et de 3.)

Posons $u = \sqrt[6]{x}$. Alors, $x = u^6$, ainsi $dx = 6u^5\,du$ et $\sqrt{x} = u^3$, $\sqrt[3]{x} = u^2$. Par conséquent,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}} = \int \frac{6u^5\,du}{u^3-u^2} = 6\int \frac{u^5}{u^2(u-1)}\,du = 6\int \frac{u^3}{u-1}\,du$$
$$= 6\int \left(u^2+u+1+\frac{1}{u-1}\right)du \quad \text{[au moyen de la division euclidienne]}$$
$$= 6(\tfrac{1}{3}u^3 + \tfrac{1}{2}u^2 + u + \ln|u-1|) + C = 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right| + C$$

46. Posons $u = \sqrt{1+\sqrt{x}}$, de sorte que $u^2 = 1+\sqrt{x}$, $x = (u^2-1)^2$ et $dx = 2(u^2-1)\cdot 2u\,du = 4u(u^2-1)\,du$.

Alors, $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x}\,dx = \int \frac{u}{(u^2-1)^2}\cdot 4u(u^2-1)du = \int \frac{4u^2}{u^2-1}du = \int\left(4+\frac{4}{u^2-1}\right)du$. Or,

$\frac{4}{u^2-1} = \frac{A}{u+1} + \frac{B}{u-1}$ $\Rightarrow$ $4 = A(u-1) + B(u+1)$. En substituant $u = 1$, nous obtenons $4 = 2B$, donc $B = 2$. En substituant $u = -1$, nous obtenons $4 = -2A$, donc $A = -2$. Par conséquent,

$$\int\left(4+\frac{4}{u^2-1}\right)du = \int\left(4-\frac{2}{u+1}+\frac{2}{u-1}\right)du = 4u - 2\ln|u+1| + 2\ln|u-1| + C$$
$$= 4\sqrt{1+\sqrt{x}} - 2\ln(\sqrt{1+\sqrt{x}}+1) + 2\ln(\sqrt{1+\sqrt{x}}-1) + C$$

47. Posons $u = e^x$, ainsi $x = \ln u$ et $dx = \frac{du}{u}$ $\Rightarrow$

$$\int \frac{e^{2x}dx}{e^{2x}+3e^x+2} = \int \frac{u^2(du/u)}{u^2+3u+2} = \int \frac{u\,du}{(u+1)(u+2)} = \int\left[\frac{-1}{u+1}+\frac{2}{u+2}\right]du$$
$$= 2\ln|u+2| - \ln|u+1| + C = \ln\frac{(e^x+2)^2}{e^x+1} + C$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

48. Posons $u = \cos x$, de sorte que $du = -\sin x\,dx$. Alors, $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x - 3\cos x}\,dx = \int \frac{1}{u^2 - 3u}(-du) = \int \frac{-1}{u(u-3)}\,du$.

$\frac{-1}{u(u-3)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-3} \quad \Rightarrow \quad -1 = A(u-3) + Bu$. En substituant $u = 3$, nous obtenons $B = -\frac{1}{3}$. En substituant $u = 0$, nous obtenons $A = \frac{1}{3}$. Par conséquent, $\int \frac{-1}{u(u-3)}\,du = \int\left(\frac{\frac{1}{3}}{u} - \frac{\frac{1}{3}}{u-3}\right)du = \frac{1}{3}\ln|u| - \frac{1}{3}\ln|u-3| + C = \frac{1}{3}\ln|\cos x| - \frac{1}{3}\ln|\cos x - 3| + C$.

49. Posons $u = \tan t$, de sorte que $du = \sec^2 t\,dt$. Alors, $\int \frac{\sec^2 t}{\tan^2 t + 3\tan t + 2}\,dt = \int \frac{1}{u^2 + 3u + 2}\,du = \int \frac{1}{(u+1)(u+2)}\,du$.

Or, $\frac{1}{(u+1)(u+2)} = \frac{A}{u+1} + \frac{B}{u+2} \quad \Rightarrow \quad 1 = A(u+2) + B(u+1)$. En substituant $u = -2$, nous obtenons $1 = -B$, donc $B = -1$. En substituant $u = -1$, nous obtenons $1 = A$. Par conséquent,

$$\int \frac{1}{(u+1)(u+2)}\,du = \int\left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u+2}\right)du = \ln|u+1| - \ln|u+2| + C = \ln|\tan t + 1| - \ln|\tan t + 2| + C.$$

50. Posons $u = e^x$, de sorte que $du = e^x\,dx$. Alors, $\int \frac{e^x}{(e^x - 2)(e^{2x} + 1)}\,dx = \int \frac{1}{(u-2)(u^2+1)}\,du$. Or,

$\frac{1}{(u-2)(u^2+1)} = \frac{A}{u-2} + \frac{Bu + C}{u^2+1} \quad \Rightarrow \quad 1 = A(u^2+1) + (Bu + C)(u-2)$. En substituant $u = 2$, nous obtenons $1 = 5A$, donc $A = \frac{1}{5}$. En substituant $u = 0$, nous obtenons $1 = \frac{1}{5} - 2C$, donc $C = -\frac{2}{5}$. En égalisant les coefficients de u^2, nous obtenons $0 = \frac{1}{5} + B$, donc $B = -\frac{1}{5}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(u-2)(u^2+1)}\,du &= \int\left(\frac{\frac{1}{5}}{u-2} + \frac{-\frac{1}{5}u - \frac{2}{5}}{u^2+1}\right)du = \frac{1}{5}\int \frac{1}{u-2}\,du - \frac{1}{5}\int \frac{u}{u^2+1}\,du - \frac{2}{5}\int \frac{1}{u^2+1}\,du \\ &= \frac{1}{5}\ln|u-2| - \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\ln|u^2+1| - \frac{2}{5}\arctan u + C \\ &= \frac{1}{5}\ln|e^x - 2| - \frac{1}{10}\ln(e^{2x}+1) - \frac{2}{5}\arctan e^x + C\end{aligned}$$

51. Posons $u = e^x$, de sorte que $du = e^x\,dx$ et $dx = \frac{du}{u}$. Alors, $\int \frac{dx}{1 + e^x} = \int \frac{du}{(1+u)u}$. $\frac{1}{u(u+1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u+1} \quad \Rightarrow \quad 1 = A(u+1) + Bu$. En substituant $u = -1$, nous obtenons $B = -1$. En substituant $u = 0$, nous obtenons $A = 1$. Par conséquent,

$$\int \frac{du}{u(u+1)} = \int\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right)du = \ln|u| - \ln|u+1| + C = \ln e^x - \ln(e^x + 1) + C = x - \ln(e^x + 1) + C.$$

52. Posons $u = \sin t$, de sorte que $du = \cos t\,dt$. Alors, $\int \frac{\cos t}{\sin^2 t + \sin^4 t}\,dt = \int \frac{1}{u^2 + u^4}\,du = \int \frac{1}{u^2(u^2+1)}\,du$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

$\dfrac{1}{u^2(u^2+1)} = \dfrac{A}{u} + \dfrac{B}{u^2} + \dfrac{Cu+D}{u^2+1} \quad \Rightarrow \quad 1 = Au(u^2+1) + B(u^2+1) + (Cu+D)u^2$. En substituant $u = 0$, nous obtenons $B = 1$. En égalisant les coefficients de u^2, nous obtenons $0 = B + D$, donc $D = -1$. En égalisant les coefficients de u, nous obtenons $0 = A$. En égalisant les coefficients de u^3, nous obtenons $0 = A + C$, donc $C = 0$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{u^2(u^2+1)}\,du &= \int\left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u^2+1}\right)du = -\frac{1}{u} - \arctan u + C = -\frac{1}{\sin t} - \arctan(\sin t) + C \\ &= -\csc t - \arctan(\sin t) + C.\end{aligned}$$

53. Posons $u = \ln(x^2 - x + 2)$ et $dv = dx$. Ainsi, $du = \dfrac{2x-1}{x^2-x+2}\,dx$ et $v = x$ et (intégration par parties)

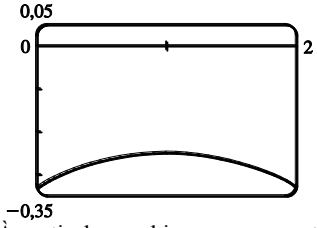
$$\begin{aligned}\int \ln(x^2-x+2)\,dx &= x\ln(x^2-x+2) - \int \frac{2x^2-x}{x^2-x+2}\,dx = x\ln(x^2-x+2) - \int\left(2 + \frac{x-4}{x^2-x+2}\right)dx \\ &= x\ln(x^2-x+2) - 2x - \int \frac{\frac{1}{2}(2x-1)}{x^2-x+2}\,dx + \frac{7}{2}\int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}} \\ &= x\ln(x^2-x+2) - 2x - \frac{1}{2}\ln(x^2-x+2) + \frac{7}{2}\int \frac{\frac{\sqrt{7}}{2}\,du}{\frac{7}{4}(u^2+1)} \quad \left[\begin{array}{c}\text{où } x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{7}}{2}u, \\ dx = \frac{\sqrt{7}}{2}du, \\ (x-\frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4} = \frac{7}{4}(u^2+1)\end{array}\right] \\ &= (x-\tfrac{1}{2})\ln(x^2-x+2) - 2x + \sqrt{7}\arctan u + C \\ &= (x-\tfrac{1}{2})\ln(x^2-x+2) - 2x + \sqrt{7}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{7}} + C\end{aligned}$$

54. Posons $u = \arctan x$ et $dv = x\,dx \quad \Rightarrow \quad du = dx/(1+x^2)$, $v = \frac{1}{2}x^2$

Alors, $\int x\arctan x\,dx = \frac{1}{2}x^2\arctan x - \dfrac{1}{2}\int \dfrac{x^2}{1+x^2}\,dx$. Pour calculer la dernière intégrale, utilisons la division euclidienne ou observons que $\int \dfrac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int \dfrac{(1+x^2)-1}{1+x^2}\,dx = \int 1\,dx - \int \dfrac{1}{1+x^2}\,dx = x - \arctan x + C_1$. Donc,

$\int x\arctan x dx = \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}(x - \arctan x + C_1) = \frac{1}{2}(x^2\arctan x + \arctan x - x) + C$

55.



À partir du graphique, nous constatons que l'intégrale sera négative et pouvons estimer que l'aire est à peu près égale à celle d'un rectangle de largeur 2 et hauteur 0,3. Nous pouvons donc estimer que l'intégrale vaudra approximativement $-(2 \cdot 0{,}3) = -0{,}6$.

Puisque, $\dfrac{1}{x^2-2x-3} = \dfrac{1}{(x-3)(x+1)} = \dfrac{A}{x-3} + \dfrac{B}{x+1} \quad \Leftrightarrow \quad 1 = (A+B)x + A - 3B$, donc $A = -B$ et $A - 3B = 1 \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{1}{4}$ et $B = -\frac{1}{4}$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

L'intégrale devient donc

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2-2x-3} = \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{dx}{x-3} - \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{dx}{x+1} = \frac{1}{4}\Big[\ln|x-3| - \ln|x+1|\Big]_0^2 = \frac{1}{4}\left[\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right|\right]_0^2$$
$$= \tfrac{1}{4}(\ln\tfrac{1}{3} - \ln 3) = -\tfrac{1}{2}\ln 3 \approx -0{,}55$$

56. ***k* = 0 :** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+k} = \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$

***k* > 0** : $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+k} = \int \frac{dx}{x^2+(\sqrt{k})^2} = \frac{1}{\sqrt{k}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right) + C$

***k* < 0 :** $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+k} = \int \frac{dx}{x^2-(-k)} = \int \frac{dx}{x^2-(\sqrt{-k})^2} = \frac{1}{2\sqrt{-k}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{-k}}{x+\sqrt{-k}}\right| + C$ [selon le résultat de l'exemple 3]

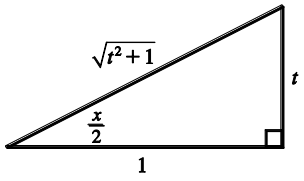
57. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-2x} = \int \frac{dx}{(x-1)^2-1} = \int \frac{du}{u^2-1}$ [en posant $u = x-1$]

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C \quad \text{[selon la formule 6]} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x}\right| + C$$

58. $\displaystyle\int \frac{(2x+1)dx}{4x^2+12x-7} = \frac{1}{4}\int \frac{(8x+12)dx}{4x^2+12x-7} - \int \frac{2dx}{(2x+3)^2-16}$

$$= \tfrac{1}{4}\ln\left|4x^2+12x-7\right| - \int \frac{du}{u^2-16} \quad \text{[en posant } u = 2x+3\text{]}$$
$$= \tfrac{1}{4}\ln\left|4x^2+12x-7\right| - \tfrac{1}{8}\ln\left|(u-4)/(u+4)\right| + C \quad \text{[selon la formule 6]}$$
$$= \tfrac{1}{4}\ln\left|4x^2+12x-7\right| - \tfrac{1}{8}\ln\left|(2x-1)/(2x+7)\right| + C$$

59. a) Si $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, alors $\frac{x}{2} = \arctan t$. Le triangle montre que $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ et $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$.



b) $\cos x = \cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$

$$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2 - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

c) $\displaystyle\frac{x}{2} = \arctan t \quad\Rightarrow\quad x = 2\arctan t \quad\Rightarrow\quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt$

60. Posons $t = \tan(x/2)$. Alors, en utilisant les égalités de l'exercice 59, nous obtenons

$$\int \frac{dx}{1-\cos x} = \int \frac{2dt/(1+t^2)}{1-(1-t^2)/(1+t^2)} = \int \frac{2dt}{(1+t^2)-(1-t^2)} = \int \frac{2dt}{2t^2} = \int \frac{1}{t^2}\,dt$$
$$= -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\tan(x/2)} + C = -\cot(x/2) + C$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

Autre méthode :
$$\int \frac{dx}{1-\cos x} = \int\left(\frac{1}{1-\cos x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right)dx = \int \frac{1+\cos x}{1-\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1+\cos x}{\sin^2 x}dx$$
$$= \int\left(\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)dx = \int(\csc^2 x + \csc x\cot x)dx = -\cot x - \csc x + C$$

61. Posons $t = \tan(x/2)$. Alors, en utilisant les égalités de l'exercice 59, nous obtenons

$$\int \frac{1}{3\sin x - 4\cos x}\,dx = \int \frac{1}{3\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)-4\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\frac{2dt}{1+t^2} = 2\int \frac{dt}{3(2t)-4(1-t^2)} = \int \frac{dt}{2t^2+3t-2}$$
$$= \int \frac{dt}{(2t-1)(t+2)} = \int\left[\frac{2}{5}\frac{1}{2t-1} - \frac{1}{5}\frac{1}{t+2}\right]dt \quad \text{[décomposition en fractions partielles]}$$
$$= \tfrac{1}{5}\left[\ln|2t-1| - \ln|t+2|\right] + C = \tfrac{1}{5}\ln\left|\frac{2t-1}{t+2}\right| + C = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{2\tan(x/2)-1}{\tan(x/2)+2}\right| + C$$

62. Posons $t = \tan(x/2)$. Alors, selon les égalités de l'exercice 59,

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x - \cos x} = \int_{1/\sqrt{3}}^{1} \frac{2dt/(1+t^2)}{1+2t/(1+t^2)-(1-t^2)/(1+t^2)} = \int_{1/\sqrt{3}}^{1} \frac{2dt}{1+t^2+2t-1+t^2}$$
$$= \int_{1/\sqrt{3}}^{1}\left[\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right]dt = \left[\ln t - \ln(t+1)\right]_{1/\sqrt{3}}^{1} = \ln\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{\sqrt{3}+1} = \ln\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

63. Posons $t = \tan(x/2)$. Alors, selon les égalités de l'exercice 59,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{2+\cos x}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin x\cos x}{2+\cos x}\,dx = \int_0^1 \frac{2\cdot\frac{2t}{1+t^2}\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int_0^1 \frac{\frac{8t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}}{2(1+t^2)+(1-t^2)}dt$$
$$= \int_0^1 8t\cdot\frac{1-t^2}{(t^2+3)(t^2+1)^2}\,dt = I$$

En posant tout d'abord $u = t^2$, alors $\dfrac{1-t^2}{(t^2+3)(t^2+1)^2} = \dfrac{1-u}{(u+3)(u+1)^2} = \dfrac{A}{u+3}+\dfrac{B}{u+1}+\dfrac{C}{(u+1)^2} \quad \Rightarrow$

$1-u = A(u+1)^2 + B(u+3)(u+1) + C(u+3)$. En substituant $u = -1$, nous obtenons $2 = 2C$, donc $C = 1$. En substituant $u = -3$, nous obtenons $4 = 4A$, donc $A = 1$. En substituant $u = 0$, nous obtenons $1 = 1 + 3B + 3$, donc $B = -1$. Par conséquent,

$$I = \int_0^1\left[\frac{8t}{t^2+3}-\frac{8t}{t^2+1}+\frac{8t}{(t^2+1)^2}\right]dt = \left[4\ln(t^2+3)-4\ln(t^2+1)-\frac{4}{t^2+1}\right]_0^1$$
$$= (4\ln 4 - 4\ln 2 - 2) - (4\ln 3 - 0 - 4) = 8\ln 2 - 4\ln 2 - 4\ln 3 + 2 = 4\ln\tfrac{2}{3} + 2$$

64. $\dfrac{1}{x^3+x} = \dfrac{1}{x(x^2+1)} = \dfrac{A}{x}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1} \quad \Rightarrow \quad 1 = A(x^2+1)+(Bx+C)x$. En substituant $x = 0$, nous obtenons $1 = A$. Donc,

$1 = (1+B)x^2 + Cx + 1 \quad \Rightarrow \quad B+1 = 0 \quad [B = -1]$ et $C = 0$. Par conséquent, l'aire est

 © Groupe Modulo inc., 2013

$$\int_1^2 \frac{1}{x^3+x}\,dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)dx = \left[\ln|x| - \tfrac{1}{2}\ln|x^2+1|\right]_1^2 = (\ln 2 - \tfrac{1}{2}\ln 5) - (0 - \tfrac{1}{2}\ln 2)$$
$$= \tfrac{3}{2}\ln 2 - \tfrac{1}{2}\ln 5 \quad [\text{ou } \tfrac{1}{2}\ln\tfrac{8}{5}]$$

65. Au moyen de la division euclidienne, $\frac{x^2+1}{3x-x^2} = -1 + \frac{3x+1}{3x-x^2}$. Puisque, $\frac{3x+1}{3x-x^2} = \frac{3x+1}{x(3-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{3-x} \Rightarrow 3x+1 = A(3-x) + Bx$.

En substituant $x = 3$, nous obtenons $10 = 3B$, donc $B = \frac{10}{3}$. En substituant $x = 0$, nous obtenons $1 = 3A$, donc $A = \frac{1}{3}$. Par conséquent, l'aire est

$$\int_1^2 \frac{x^2+1}{3x-x^2}\,dx = \int_1^2 \left(-1 + \frac{\frac{1}{3}}{x} + \frac{\frac{10}{3}}{3-x}\right)dx = \left[-x + \tfrac{1}{3}\ln|x| - \tfrac{10}{3}\ln|3-x|\right]_1^2$$
$$= (-2 + \tfrac{1}{3}\ln 2 - 0) - (-1 + 0 - \tfrac{10}{3}\ln 2) = -1 + \tfrac{11}{3}\ln 2$$

66. a) Nous utilisons la méthode des disques; le volume est donc $V = \pi\int_0^1 \left[\frac{1}{x^2+3x+2}\right]^2 dx = \pi\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2(x+2)^2}$. Décomposons en fractions partielles afin de calculer l'intégrale : $\frac{1}{(x+1)^2(x+2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{(x+2)^2} \Rightarrow$

$1 = A(x+1)(x+2)^2 + B(x+2)^2 + C(x+1)^2(x+2) + D(x+1)^2$. En substituant $x = -1$, nous obtenons $B = 1$. En substituant ensuite $x = -2$, nous obtenons $D = 1$. Maintenant, en égalisant les coefficients de x^3, nous obtenons $A = -C$. En égalisant ensuite les constantes, nous obtenons $1 = 4A + 4 + 2(-A) + 1 \Rightarrow A = -2 \Rightarrow C = 2$. L'expression devient donc

$$V = \pi\int_0^1 \left[\frac{-2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+2)} + \frac{1}{(x+2)^2}\right]dx = \pi\left[2\ln\left|\frac{x+2}{x+1}\right| - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right]_0^1$$
$$= \pi[(2\ln\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}) - (2\ln 2 - 1 - \tfrac{1}{2})] = \pi\left(2\ln\tfrac{3/2}{2} + \tfrac{2}{3}\right) = \pi(\tfrac{2}{3} + \ln\tfrac{9}{16})$$

b) Dans ce cas, nous utilisons la méthode des coquilles cylindriques; le volume est donc

$V = 2\pi\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+3x+2} = 2\pi\int_0^1 \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)}$. Décomposons en fractions partielles afin de simplifier l'intégrande :

$\frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} \Rightarrow x = (A+B)x + 2A + B$. Donc, $A + B = 1$ et $2A + B = 0 \Rightarrow A = -1$ et $B = 2$. Le volume est donc

$$2\pi\int_0^1 \left[\frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x+2}\right]dx = 2\pi\left[-\ln|x+1| + 2\ln|x+2|\right]_0^1$$
$$= 2\pi(-\ln 2 + 2\ln 3 + \ln 1 - 2\ln 2) = 2\pi(2\ln 3 - 3\ln 2) = 2\pi\ln\tfrac{9}{8}$$

67. $\frac{P+S}{P[(r-1)P-S]} = \frac{A}{P} + \frac{B}{(r-1)P-S} \Rightarrow P + S = A[(r-1)P - S] + BP = [(r-1)A + B]P - AS \Rightarrow$

$(r-1)A + B = 1$, $-A = 1 \Rightarrow A = -1$, $B = r$. Or,

 © Groupe Modulo inc., 2013

$$t=\int\frac{P+S}{P[(r-1)P-S]}dP=\int\left[\frac{-1}{P}+\frac{r}{(r-1)P-S}\right]dP=-\int\frac{dP}{P}+\frac{r}{r-1}\int\frac{r-1}{(r-1)P-S}dP,$$

donc $t=-\ln P+\dfrac{r}{r-1}\ln\left|(r-1)P-S\right|+C$. Ici, $r=0{,}10$ et $S=900$,

donc $t=-\ln P+\frac{0,1}{-0,9}\ln\left|-0,9P-900\right|+C=-\ln P-\frac{1}{9}\ln(\left|-1\right|\left|0,9P+900\right|)=-\ln P-\frac{1}{9}\ln(0,9P+900)+C$.

Lorsque $t=0$, $P=10\,000$, donc $0=-\ln 10\,000-\frac{1}{9}\ln(9\,900)+C$. Par conséquent, $C=\ln 10\,000+\frac{1}{9}\ln 9\,900[\approx 10,2326]$. L'équation devient donc

$$t=\ln 10\,000-\ln P+\tfrac{1}{9}\ln 9\,900-\tfrac{1}{9}\ln(0,9P+900)=\ln\frac{10\,000}{P}+\frac{1}{9}\ln\frac{9\,900}{0,9P+900}$$
$$=\ln\frac{10\,000}{P}+\frac{1}{9}\ln\frac{1100}{0,1P+100}=\ln\frac{10\,000}{P}+\frac{1}{9}\ln\frac{11\,000}{P+1\,000}$$

68. Si nous soustrayons, puis ajoutons $2x^2$, nous obtenons

$$x^4+1=x^4+2x^2+1-2x^2=(x^2+1)^2-2x^2=(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2$$
$$=[(x^2+1)-\sqrt{2}x][(x^2+1)+\sqrt{2}x]=(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$$

Nous pouvons donc maintenant effectuer la décomposition en fractions partielles de

$\dfrac{1}{x^4+1}=\dfrac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\dfrac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}\quad\Rightarrow\quad 1=(Ax+B)(x^2-\sqrt{2}x+1)+(Cx+D)(x^2+\sqrt{2}x+1)$. En égalisant les termes constants, nous obtenons $B+D=1$. À partir des coefficients de x^3, nous obtenons ensuite $A+C=0$. Maintenant, à partir des coefficients de x, nous obtenons $A+C+(B-D)\sqrt{2}=0\quad\Leftrightarrow\quad[(1-D)-D]\sqrt{2}=0\quad\Rightarrow\quad D=\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad B=\frac{1}{2}$. Finalement, à partir des coefficients de x^2, nous obtenons $\sqrt{2}(C-A)+B+D=0\quad\Rightarrow\quad C-A=-\frac{1}{\sqrt{2}}\quad\Rightarrow\quad C=-\frac{\sqrt{2}}{4}$ et $A=\frac{\sqrt{2}}{4}$. Nous reformulons donc l'intégrande, en séparant les termes pour faciliter l'intégration :

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\frac{2x+2\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}-\frac{2x-2\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right]$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\left[\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}-\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right]+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}+\frac{1}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}\right]$$

Nous intégrons maintenant : $\displaystyle\int\frac{dx}{x^4+1}=\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left(\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)+\frac{\sqrt{2}}{4}\left[\arctan\left(\sqrt{2}x+1\right)+\arctan\left(\sqrt{2}x-1\right)+C\right]$.

69. a) Dans le logiciel Maple, nous saisissons $f(x)$ et utilisons ensuite la commande convert(f, parfrac, x); ce qui produit (l'ordre des termes peut différer)

$$f(x)=\frac{24\,110/4\,879}{5x+2}-\frac{668/323}{2x+1}-\frac{9\,438/80\,155}{3x-7}+\frac{(22\,098x+48\,935)/(260\,015)}{x^2+x+5}$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

Dans le logiciel Mathematica, nous utilisons la commande Apart, et, dans le logiciel Derive, la commande Expand.

b)
$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \tfrac{24\,110}{4\,879}\cdot\tfrac{1}{5}\ln|5x+2| - \tfrac{668}{323}\cdot\tfrac{1}{2}\ln|2x+1| - \tfrac{9\,438}{80\,155}\cdot\tfrac{1}{3}\ln|3x-7| \\ &\quad + \frac{1}{260\,015}\int \frac{22\,098(x+\frac{1}{2})+37\,886}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{19}{4}}\,dx + C \\ &= \tfrac{24\,110}{4\,879}\cdot\tfrac{1}{5}\ln|5x+2| - \tfrac{668}{323}\cdot\tfrac{1}{2}\ln|2x+1| - \tfrac{9\,438}{80\,155}\cdot\tfrac{1}{3}\ln|3x-7| \\ &\quad + \tfrac{1}{260\,015}\left[22\,098\cdot\tfrac{1}{2}\ln(x^2+x+5) + 37\,886\cdot\sqrt{\tfrac{4}{19}}\arctan\left(\tfrac{1}{\sqrt{19/4}}(x+\tfrac{1}{2})\right)\right] + C \\ &= \tfrac{4\,822}{4\,879}\ln|5x+2| - \tfrac{334}{323}\ln|2x+1| - \tfrac{3\,146}{80\,155}\ln|3x-7| + \tfrac{11\,049}{260\,015}\ln(x^2+x+5) \\ &\quad + \frac{75\,772}{260\,015\sqrt{19}}\arctan\left[\tfrac{1}{\sqrt{19}}(2x+1)\right] + C\end{aligned}$$

À l'aide d'un logiciel de calcul symbolique, nous obtenons

$$\begin{aligned}&\frac{4\,822\ln(5x+2)}{4\,879} - \frac{334\ln(2x+1)}{323} - \frac{3\,146\ln(3x-7)}{80\,155} \\ &\qquad + \frac{11\,049\ln(x^2+x+5)}{260\,015} + \frac{3\,988\sqrt{19}}{260\,015}\arctan\left[\frac{\sqrt{19}}{19}(2x+1)\right]\end{aligned}$$

La principale différence dans cette réponse est que les signes de valeur absolue et la constante d'intégration ont été omis. De plus, les fractions ont été réduites, et les dénominateurs ont été rationalisés.

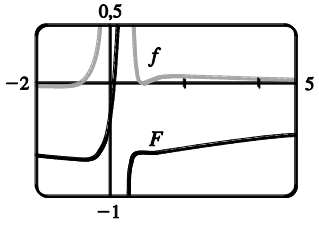
70. a) Dans le logiciel Maple, nous saisissons *f(x)* et utilisons ensuite la commande convert(f, parfrac, x); ce qui produit (l'ordre des termes peut différer)

$$f(x) = \frac{5\,828/1\,815}{(5x-2)^2} - \frac{59\,096/19\,965}{5x-2} + \frac{2(2\,843x+816)/3\,993}{2x^2+1} + \frac{(313x-251)/363}{(2x^2+1)^2}.$$

Dans le logiciel Mathematica, nous utilisons la commande Apart, et, dans le logiciel Derive, la commande Expand.

b) Comme nous l'avons vu à l'exercice 69, les logiciels de calcul symbolique omettent les barres de valeur absolue dans $\int (1/y)dy = \ln|y|$. Nous utilisons donc un logiciel de calcul symbolique pour effectuer l'intégration de l'expression qui apparaît à la sous-question a) et ajoutons ponstuellement les barres de valeur absolue et la contante d'intégration qui sont requises, ce qui donne

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= -\frac{5\,828}{9\,075(5x-2)} - \frac{59\,096\ln|5x-2|}{99\,825} + \frac{2\,843\ln(2x^2+1)}{7\,986} \\ &\quad + \frac{503}{15\,972}\sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}x) - \frac{1}{2\,904}\frac{1\,004x+626}{2x^2+1} + C\end{aligned}$$



 © Groupe Modulo inc., 2013

c) Le graphique montre que la valeur de f passe de négative à positive lorsque $x \approx -0{,}78$, elle redevient négative lorsque $x \approx 0{,}8$ et redevient finalement positive lorsque $x = 1$. De plus, $\lim_{x \to 0,4} f(x) = \infty$. Nous constatons donc (selon le test de la dérivée première) que $\int f(x)dx$ atteint des minimums lorsque $x \approx -0{,}78$ et $x = 1$ et un maximum relatif lorsque $x \approx 0{,}80$, et que $\int f(x)dx$ n'est pas bornée lorsque $x \to 0{,}4$. Nous constatons également que, juste à la droite de $x = 0{,}4$, les valeurs de f sont grandes, donc $\int f(x)dx$ augmente rapidement, mais cette augmentation ralentit au fur et à mesure que la valeur de f se rapproche de 0. $\int f(x)dx$ diminue d'environ 0,8 à 1, et augmente ensuite lentement puisque la valeur de f demeure petite et positive.

71. Considérons qu'il n'y a qu'un nombre fini de valeurs de x où $Q(x) = 0$ (en supposant que Q n'est pas le polynôme de degré zéro). À toute autre valeur de x, $F(x)/Q(x) = G(x)/Q(x)$, donc $F(x) = G(x)$. En d'autres termes, les valeurs de F et de G sont identiques pour toutes les valeurs de x, à l'exception peut-être d'un certain nombre fini de valeurs de x. Puisque F et G sont toutes deux continues, les polynômes F et G doivent être identiques à ces valeurs de x également.

Plus clairement : si a est une valeur de x telle que $Q(a) = 0$, alors $Q(x) \neq 0$ pour tous les x au voisinage de a. Par conséquent,

$$\begin{aligned} F(a) &= \lim_{x \to a} F(x) && \text{[parce que } F \text{ est continue]} \\ &= \lim_{x \to a} G(x) && \text{[dans tous les cas où } Q(x) \neq 0\text{]} \\ &= G(a) && \text{[parce que } G \text{ est continue]} \end{aligned}$$

72. Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$. Nous effectuons la décomposition en fractions partielles de $\dfrac{f(x)}{x^2(x+1)^3}$. Puisque $f(0) = 1$, nous devons avoir $c = 1$, donc $\dfrac{f(x)}{x^2(x+1)^3} = \dfrac{ax^2+bx+1}{x^2(x+1)^3} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x+1} + \dfrac{D}{(x+1)^2} + \dfrac{E}{(x+1)^3}$. Or, afin que l'intégrale ne contienne aucun logarithme (c'est-à-dire pour qu'elle soit une fonction rationnelle), nous devons avoir $A = C = 0$, donc $ax^2 + bx + 1 = B(x+1)^3 + Dx^2(x+1) + Ex^2$. En égalisant les termes constants, nous obtenons $B = 1$. En égalisant les coefficients de x, nous obtenons $3B = b \Rightarrow b = 3$. C'est le nombre que nous recherchons, puisque $f'(0) = b$.

73. Si $a \neq 0$ et n est un entier positif, alors $f(x) = \dfrac{1}{x^n(x-a)} = \dfrac{A_1}{x} + \dfrac{A_2}{x^2} + \cdots + \dfrac{A_n}{x^n} + \dfrac{B}{x-a}$. Multiplions les deux membres de l'équation par $x^n(x-a)$, ce qui donne $1 = A_1x^{n-1}(x-a) + A_2x^{n-2}(x-a) + \cdots + A_n(x-a) + Bx^n$. En substituant $x = a$ dans cette dernière équation, nous obtenons $1 = Ba^n \Rightarrow B = 1/a^n$. Donc,

 © Groupe Modulo inc., 2013

$$\begin{aligned} f(x)-\frac{B}{x-a} &= \frac{1}{x^n(x-a)}-\frac{1}{a^n(x-a)}=\frac{a^n-x^n}{x^n a^n(x-a)}=-\frac{x^n-a^n}{a^n x^n(x-a)} \\ &= -\frac{(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\cdots+xa^{n-2}+a^{n-1})}{a^n x^n(x-a)} \\ &= \left(\frac{x^{n-1}}{a^n x^n}+\frac{x^{n-2}a}{a^n x^n}+\frac{x^{n-3}a^3}{a^n x^n}+\cdots+\frac{xa^{n-2}}{a^n x^n}+\frac{a^{n-1}}{a^n x^n}\right) \\ &= -\frac{1}{a^n x}-\frac{1}{a^{n-1}x^2}-\frac{1}{a^{n-2}x^3}-\cdots-\frac{1}{a^2 x^{n-1}}-\frac{1}{ax^n} \end{aligned}$$

Par conséquent, $f(x)=\dfrac{1}{x^n(x-a)}=-\dfrac{1}{a^n x}-\dfrac{1}{a^{n-1}x^2}-\cdots-\dfrac{1}{ax^n}+\dfrac{1}{a^n(x-a)}$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

3.5 Une stratégie pour l'évaluation d'une intégrale

1. Posons $u = \sin x$, de sorte que $du = \cos x\, dx$. Alors, $\int \cos x(1+\sin^2 x)dx = \int (1+u^2)du = u + \frac{1}{3}u^3 + C = \sin x + \frac{1}{3}\sin^3 x + C$.

2. Posons $u = 3x + 1$. Alors, $du = 3\, dx \;\Rightarrow \int_0^1 (3x+1)^{\sqrt{2}}dx = \int_1^4 u^{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3}du\right) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{\sqrt{2}+1}u^{\sqrt{2}+1}\right]_1^4 = \frac{1}{3(\sqrt{2}+1)}\left(4^{\sqrt{2}+1}-1\right)$

3. $\int \frac{\sin x + \sec x}{\tan x}\, dx = \int\left(\frac{\sin x}{\tan x} + \frac{\sec x}{\tan x}\right)dx = \int (\cos x + \csc x)dx = \sin x + \ln\left|\csc x - \cot x\right| + C$

4. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x}dx = \int \frac{\sin^2 x \sin x}{\cos x}\, dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)\sin x}{\cos x}\, dx = \int \frac{1-u^2}{u}(-du) \quad \begin{bmatrix} u = \cos x \\ du = -\sin x\, dx \end{bmatrix}$

$= \int (u - \frac{1}{u})du = \frac{1}{2}u^2 - \ln|u| + C = \frac{1}{2}\cos^2 x - \ln|\cos x| + C$

5. Posons $u = t^2$. Alors, $du = 2t\, dt \;\Rightarrow$

$\int \frac{t}{t^4+2}dt = \int \frac{1}{u^2+2}\left(\frac{1}{2}du\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) + C$ [selon la formule 17] $= \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{t^2}{\sqrt{2}}\right) + C$

6. Posons $u = 2x + 1$. Alors, $du = 2dx \;\Rightarrow$

$\int_0^1 \frac{x}{(2x+1)^3}\, dx = \int_1^3 \frac{(u-1)/2}{u^3}\left(\frac{1}{2}du\right) = \frac{1}{4}\int_1^3 \left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u^3}\right)du = \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{u} + \frac{1}{2u^2}\right]_1^3$

$= \frac{1}{4}[(-\frac{1}{3} + \frac{1}{18}) - (-1 + \frac{1}{2})] = \frac{1}{4}(\frac{2}{9}) = \frac{1}{18}$

7. Posons $u = \arctan y$. Alors, $du = \frac{dy}{1+y^2} \;\Rightarrow\; \int_{-1}^1 \frac{e^{\arctan y}}{1+y^2}dy = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} e^u du = [e^u]_{-\pi/4}^{\pi/4} = e^{\pi/4} - e^{-\pi/4} = e^{\pi/4} - \frac{1}{e^{\pi/4}}$

8. $\int t\sin t\cos t\, dt = \int t \cdot \frac{1}{2}(2\sin t\cos t)dt = \frac{1}{2}\int t\sin 2t\, dt$

$= \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}t\cos 2t - \int -\frac{1}{2}\cos 2t\, dt) \quad \begin{bmatrix} u = t, & dv = \sin 2t\, dt \\ du = dt, & dv = -\frac{1}{2}\cos 2t \end{bmatrix}$

$= -\frac{1}{4}t\cos 2t + \frac{1}{4}\int \cos 2t\, dt = -\frac{1}{4}t\cos 2t + \frac{1}{8}\sin 2t + C$

9. $\int_1^3 r^4 \ln r\, dr \begin{bmatrix} u = \ln r, & dv = r^4 dr, \\ du = \frac{dr}{r} & v = \frac{1}{5}r^5 \end{bmatrix} = [\frac{1}{5}r^5 \ln r]_1^3 - \int_1^3 \frac{1}{5}r^4 dr = \frac{243}{5}\ln 3 - 0 - [\frac{1}{25}r^5]_1^3$

$= \frac{243}{5}\ln 3 - (\frac{243}{25} - \frac{1}{25}) = \frac{243}{5}\ln 3 - \frac{242}{25}$

10. $\frac{x-1}{x^2-4x-5} = \frac{x-1}{(x-5)(x+1)} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+1} \;\Rightarrow\; x - 1 = A(x+1) + B(x-5)$. En substituant $x = -1$, nous obtenons $-2 = -6B$,

donc $B = \frac{1}{3}$. En substituant $x = 5$, nous obtenons $4 = 6A$, donc $A = \frac{2}{3}$. Ainsi,

 © Groupe Modulo inc., 2013

$$\int_0^4 \frac{x-1}{x^2-4x-5}\,dx = \int_0^4 \left(\frac{2/3}{x-5} + \frac{1/3}{x+1}\right) dx = \left[\tfrac{2}{3}\ln|x-5| + \tfrac{1}{3}\ln|x+1|\right]_0^4$$
$$= \tfrac{2}{3}\ln 1 + \tfrac{1}{3}\ln 5 - \tfrac{2}{3}\ln 5 - \tfrac{1}{3}\ln 1 = -\tfrac{1}{3}\ln 5$$

11. $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2-4x+5}\,dx = \int \frac{(x-2)+1}{(x-2)^2+1}\,dx = \int\left(\frac{u}{u^2+1} + \frac{1}{u^2+1}\right) du \quad [u = x-2,\ du = dx]$
$$= \tfrac{1}{2}\ln(u^2+1) + \arctan u + C = \tfrac{1}{2}\ln(x^2-4x+5) + \arctan(x-2) + C$$

12. $\displaystyle\int \frac{x}{x^4+x^2+1}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}\,du}{u^2+u+1} \quad \begin{bmatrix} u = x^2, \\ du = 2x\,dx \end{bmatrix} \quad = \frac{1}{2}\int \frac{du}{(u+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\,dv}{\frac{3}{4}(v^2+1)} \quad \begin{bmatrix} u + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}v, \\ du = \frac{\sqrt{3}}{2}\,dv \end{bmatrix} \quad = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{4}{3}\int \frac{dv}{v^2+1}$$
$$= \tfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan v + C = \tfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\tfrac{2}{\sqrt{3}}(x^2+\tfrac{1}{2})\right) + C$$

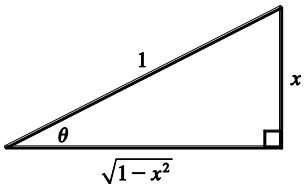
13. $\displaystyle\int \sin^5 t\cos^4 t\ dt = \int \sin^4 t\cos^4 t\sin t\ dt = \int (\sin^2 t)^2\cos^4 t\sin t\ dt$
$$= \int (1-\cos^2 t)^2\cos^4 t\sin t\ dt = \int (1-u^2)^2 u^4(-du) \quad [u = \cos t, du = -\sin t\ dt]$$
$$= \int (-u^4 + 2u^6 - u^8)du = -\tfrac{1}{5}u^5 + \tfrac{2}{7}u^7 - \tfrac{1}{9}u^9 + C = -\tfrac{1}{5}\cos^5 t + \tfrac{2}{7}\cos^7 t - \tfrac{1}{9}\cos^9 t + C$$

14. Posons $u = 1 + x^2$, de sorte que $du = 2x\,dx$. Alors,

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}(x\,dx) = \int \frac{u-1}{u^{1/2}}(\tfrac{1}{2}du) = \frac{1}{2}\int (u^{1/2} - u^{-1/2})du = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}u^{3/2} - 2u^{1/2}\right) + C$$
$$= \tfrac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} - (1+x^2)^{1/2} + C \quad [\text{ou } \tfrac{1}{3}(x^2-2)\sqrt{1+x^2} + C]$$

15. Posons $x = \sin\theta$, où $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. Alors, $dx = \cos\theta\,d\theta$ et $(1-x^2)^{1/2} = \cos\theta$, donc

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}} = \int \frac{\cos\theta\,d\theta}{(\cos\theta)^3} = \int \sec^2\theta\,d\theta = \tan\theta + C = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$



16. Posons $x = \sin\theta$, où $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. Alors, $dx = \cos\theta\,d\theta$ et $(1-x^2)^{1/2} = \cos\theta$, donc

$$\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\cos\theta\,d\theta$$
$$= \int_0^{\pi/4} \tfrac{1}{2}(1-\cos 2\theta)d\theta = \tfrac{1}{2}[\theta - \tfrac{1}{2}\sin 2\theta]_0^{\pi/4} = \tfrac{1}{2}[(\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{1}{2}) - (0-0)] = \tfrac{\pi}{8} - \tfrac{1}{4}$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

17. $\int_0^{\pi} t\cos^2 t\ dt = \int_0^{\pi} t[\frac{1}{2}(1+\cos 2t)]\ dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} t\ dt + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} t\cos 2t\ dt$

$= \frac{1}{2}[\frac{1}{2}t^2]_0^{\pi} + \frac{1}{2}[\frac{1}{2}t\sin 2t]_0^{\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\sin 2t\ dt \qquad \begin{bmatrix} u = t, & dv = \cos 2t\ dt \\ du = dt, & v = \frac{1}{2}\sin 2t \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{4}\pi^2 + 0 - \frac{1}{4}[-\frac{1}{2}\cos 2t]_0^{\pi} = \frac{1}{4}\pi^2 + \frac{1}{8}(1-1) = \frac{1}{4}\pi^2$

18. Posons $u = \sqrt{t}$. Alors, $du = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}dt \quad \Rightarrow \quad \int_1^4 \dfrac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}dt = \int_1^2 e^u(2du) = 2\left[e^u\right]_1^2 = 2(e^2 - e)$

19. Posons $u = e^x$. Alors, $du = e^x dx \quad \Rightarrow \int e^{x+e^x}dx = \int e^{e^x}e^x dx = \int e^u du = e^u + C = e^{e^x} + C.$

20. Puisque e^2 est une constante, $\int e^2 dx = e^2 x + C$.

21. Posons $t = \sqrt{x}$, de sorte que $t^2 = x$ et $2t\ dt = dx$. Alors, $\int \arctan\sqrt{x}dx = \int \arctan t(2t\ dt) = I$. Maintenant, en intégrant par parties, avec les parties $u = \arctan t$ et $dv = 2t\ dt \quad \Rightarrow \quad du = \dfrac{1}{1+t^2}dt$ et $v = t^2$. Par conséquent,

$$I = t^2\arctan t - \int\frac{t^2}{1+t^2}dt = t^2\arctan t - \int\left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt = t^2\arctan t - t + \arctan t + C$$

$$= x\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan\sqrt{x} + C \quad \left[\text{ou } (x+1)\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} + C\right]$$

22. Posons $u = 1 + (\ln x)^2$, de sorte que $du = \dfrac{2\ln x}{x}dx$. Alors,

$$\int\frac{\ln x}{x\sqrt{1+(\ln x)^2}}dx = \frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{u}}du = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{u}\right) + C = \sqrt{1+(\ln x)^2} + C.$$

23. Posons $u = 1 + \sqrt{x}$. Alors, $x = (u-1)^2,\ dx = 2(u-1)du \quad \Rightarrow$

$$\int_0^1\left(1+\sqrt{x}\right)^8 dx = \int_1^2 u^8\cdot 2(u-1)\ du = 2\int_1^2(u^9 - u^8)du = [\tfrac{1}{5}u^{10} - 2\cdot\tfrac{1}{9}u^9]_1^2 = \tfrac{1024}{5} - \tfrac{1024}{9} - \tfrac{1}{5} + \tfrac{2}{9} = \tfrac{4097}{45}.$$

24. $\int_0^4\dfrac{6z+5}{2z+1}dz = \int_0^4\dfrac{6z+3+2}{2z+1}dz = \int_0^4\dfrac{3(2z+1)+2}{2z+1}dz = \int_0^4\left(3 + \dfrac{2}{2z+1}\right)dz$

$= \left[3z + \ln|2z+1|\right]_0^4 = 12 + \ln 9$

25. $\dfrac{3x^2-2}{x^2-2x-8} = 3 + \dfrac{6x+22}{(x-4)(x+2)} = 3 + \dfrac{A}{x-4} + \dfrac{B}{x+2} \quad \Rightarrow \quad 6x + 22 = A(x+2) + B(x-4)$. En substituant $x = 4$, nous obtenons $46 = 6A$, donc $A = \frac{23}{3}$. En substituant $x = -2$, nous obtenons $10 = -6B$, donc $B = -\frac{5}{3}$. Finalement,

$$\int\frac{3x^2-2}{x^2-2x-8}dx = \int\left(3 + \frac{23/3}{x-4} - \frac{5/3}{x+2}\right)dx = 3x + \tfrac{23}{3}\ln|x-4| - \tfrac{5}{3}\ln|x+2| + C$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

26. $\displaystyle\int \frac{3x^2-2}{x^3-2x-8}\,dx = \int \frac{du}{u} \quad \begin{bmatrix} u = x^3-2x-8, \\ du = (3x^2-2)dx \end{bmatrix} \quad = \ln|u| + C = \ln\left|x^3-2x-8\right| + C$

27. Posons $u = 1 + e^x$, de sorte que $du = e^x\,dx = (u-1)\,dx$. Alors, $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}\,dx = \int \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{u-1} = \int \frac{1}{u(u-1)}\,du = I$. Or,

$\displaystyle\frac{1}{u(u-1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-1} \quad \Rightarrow \quad 1 = A(u-1) + Bu$. En substituant $u = 1$, nous obtenons $1 = B$. En substituant $u = 0$, nous obtenons $1 = -A$,

donc $A = -1$. Par conséquent, $\displaystyle I = \int\left(\frac{-1}{u} + \frac{1}{u-1}\right)du = -\ln|u| + \ln|u-1| + C = -\ln(1+e^x) + \ln e^x + C = x - \ln(1+e^x) + C$.

Autre méthode : Multiplions le numérateur et le dénominateur par e^{-x} et posons $u = e^{-x} + 1$. De cette façon, nous obtenons la réponse sous la forme $-\ln(e^{-x}+1) + C$.

28. $\displaystyle\int \sin\sqrt{at}\,dt = \int \sin u \cdot \tfrac{2}{a}u\,du \quad [u = \sqrt{at}, u^2 = at, 2u\,du = a\,dt] \quad = \tfrac{2}{a}\int u\sin u\,du$

$= \tfrac{2}{a}[-u\cos u + \sin u] + C$ [intégration par parties] $= -\tfrac{2}{a}\sqrt{at}\cos\sqrt{at} + \tfrac{2}{a}\sin\sqrt{at} + C$

$= -2\sqrt{\tfrac{t}{a}}\cos\sqrt{at} + \tfrac{2}{a}\sin\sqrt{at} + C$

29. En intégrant par parties les parties avec $u = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$,

et $dv = dx \quad \Rightarrow \quad \displaystyle du = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)dx = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}\right)dx = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$, $v = x$. Alors,

$$\int \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)dx = x\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) - \int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx = x\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) - \sqrt{x^2-1} + C$$

30. $\displaystyle\left|e^x-1\right| = \begin{cases} e^x-1 & \text{si } e^x-1 \ge 0 \\ -(e^x-1) & \text{si } e^x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} e^x-1 & \text{si } x \ge 0 \\ 1-e^x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Par conséquent,

$$\int_{-1}^{2}\left|e^x-1\right|dx = \int_{-1}^{0}(1-e^x)dx + \int_{0}^{2}(e^x-1)dx = \left[x-e^x\right]_{-1}^{0} + \left[e^x-x\right]_{0}^{2}$$

$$= (0-1) - (-1-e^{-1}) + (e^2-2) - (1-0) = e^2 + e^{-1} - 3 = e^2 + \frac{1}{e} - 3$$

31. Comme à l'exemple 5,

$$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = \int\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}}\,dx = \int\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C$$

Autre méthode : Posons le changement de variable $u = \sqrt{(1+x)/(1-x)}$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

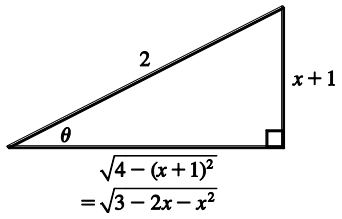
32. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2x-1}}{2x+3}\,dx = \int \frac{u\cdot u\,du}{u^2+4}\left[\begin{array}{c} u=\sqrt{2x-1},\ 2x+3=u^2+4,\\ u^2=2x-1,\ u\,du=dx\end{array}\right] = \int\left(1-\frac{4}{u^2+4}\right)du$

$$= u - 4\cdot\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}u\right)+C = \sqrt{2x-1} - 2\arctan\left(\frac{1}{2}\sqrt{2x-1}\right)+C$$

33. $3-2x-x^2 = -(x^2+2x+1)+4 = 4-(x+1)^2$. Posons $x+1 = 2\sin\theta$,

où $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$. Alors, $dx = 2\cos\theta\,d\theta$ et

$$\begin{aligned}\int\sqrt{3-2x-x^2}dx &= \int\sqrt{4-(x+1)^2}dx = \int\sqrt{4-4\sin^2\theta}\,2\cos\theta d\theta\\ &= 4\int\cos^2\theta d\theta = 2\int(1+\cos 2\theta)d\theta\\ &= 2\theta+\sin 2\theta + C = 2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + C\\ &= 2\arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right)+2\cdot\frac{x+1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3-2x-x^2}}{2}+C\\ &= 2\arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right)+\frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2}+C\end{aligned}$$



34. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{1+4\cot x}{4-\cot x}\,dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2}\left[\frac{(1+4\cos x/\sin x)}{(4-\cos x/\sin x)}\cdot\frac{\sin x}{\sin x}\right]dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\sin x+4\cos x}{4\sin x-\cos x}\,dx$

$$= \int_{3/\sqrt{2}}^{4}\frac{1}{u}\,du\left[\begin{array}{c} u = 4\sin x-\cos x,\\ du = (4\cos x+\sin x)dx\end{array}\right]$$

$$= \left[\ln|u|\right]_{3/\sqrt{2}}^{4} = \ln 4 - \ln\frac{3}{\sqrt{2}} = \ln\frac{4}{3/\sqrt{2}} = \ln\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}\right)$$

35. Selon l'identité 2 c) à la section 3.2,

$\cos 2x\cos 6x = \frac{1}{2}[\cos(2x-6x)+\cos(2x+6x)] = \frac{1}{2}[\cos(-4x)+\cos 8x] = \frac{1}{2}(\cos 4x+\cos 8x)$. Par

conséquent, $\int\cos 2x\cos 6x\,dx = \frac{1}{2}\int(\cos 4x+\cos 8x)dx = \frac{1}{2}(\frac{1}{4}\sin 4x+\frac{1}{8}\sin 8x)+C = \frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{16}\sin 8x+C$.

36. L'intégrande est une fonction impaire, donc $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{x^2\tan x}{1+\cos^4 x}\,dx = 0$ [selon 1.7.7 b)].

37. Posons $u = \tan\theta$. Alors, $du = \sec^2\theta d\theta \;\Rightarrow\; \displaystyle\int_0^{\pi/4}\tan^3\theta\sec^2\theta d\theta = \int_0^1 u^3 du = \left[\frac{1}{4}u^4\right]_0^1 = \frac{1}{4}$.

38. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{\sin\theta\cot\theta}{\sec\theta}\,d\theta = \int_{\pi/6}^{\pi/3}\cos^2\theta d\theta = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/3}(1+\cos 2\theta)d\theta = \frac{1}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{\pi/6}^{\pi/3}$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)-\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{12}$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

39. Posons $u = \sec\theta$, de sorte que $du = \sec\theta \tan\theta \, d\theta$. Alors, $\int \frac{\sec\theta\tan\theta}{\sec^2\theta - \sec\theta} \, d\theta = \int \frac{1}{u^2 - u} du = \int \frac{1}{u(u-1)} \, du = I$. Or,

$\frac{1}{u(u-1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-1} \quad \Rightarrow \quad 1 = A(u-1) + Bu$. En substituant $u = 1$, nous obtenons $1 = B$. En substituant $u = 0$, nous obtenons $1 = -A$,

donc $A = -1$. Par conséquent, $I = \int \left(\frac{-1}{u} + \frac{1}{u-1} \right) du = -\ln|u| + \ln|u-1| + C = \ln|\sec\theta - 1| - \ln|\sec\theta| + C$ [ou $\ln|1 - \cos\theta| + C$] .

40. Puisque $4y^2 - 4y - 3 = (2y-1)^2 - 2^2$, posons $u = 2y - 1 \quad \Rightarrow \quad du = 2dy$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{\sqrt{4y^2 - 4y - 3}} &= \int \frac{dy}{\sqrt{(2y-1)^2 - 2^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 2^2}} \\ &= \tfrac{1}{2} \ln|u + \sqrt{u^2 - 2^2}| \quad \text{[selon la formule 20 de la table qui apparaît au début de la présente section]} \\ &= \tfrac{1}{2} \ln|2y - 1 + \sqrt{4y^2 - 4y - 3}| + C \end{aligned}$$

41. Posons $u = \theta$ et $dv = \tan^2\theta d\theta = (\sec^2\theta - 1)d\theta \quad \Rightarrow \quad du = d\theta$ et $v = \tan\theta - \theta$. Donc,

$$\begin{aligned} \int \theta\tan^2\theta d\theta &= \theta(\tan\theta - \theta) - \int (\tan\theta - \theta) d\theta = \theta\tan\theta - \theta^2 - \ln|\sec\theta| + \tfrac{1}{2}\theta^2 + C \\ &= \theta\tan\theta - \tfrac{1}{2}\theta^2 - \ln|\sec\theta| + C \end{aligned}$$

42. Posons $u = \arctan x$ et $dv = \frac{1}{x^2} dx \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{1+x^2} dx, v = -\frac{1}{x}$. Alors,

$$I = \int \frac{\arctan x}{x^2} \, dx = -\frac{1}{x}\arctan x - \int \left(-\frac{1}{x(1+x^2)} \right) dx = -\frac{1}{x}\arctan x + \int \left(\frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{1+x^2} \right) dx$$

$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} \quad \Rightarrow \quad 1 = A(1+x^2) + (Bx + C)x \quad \Rightarrow \quad 1 = (A+B)x^2 + Cx + A$, donc $C = 0$, $A = 1$ et $A + B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -1$.

Par conséquent,

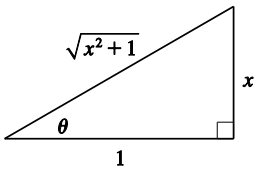
$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{x}\arctan x + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx = -\frac{1}{x}\arctan x + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|1 + x^2| + C \\ &= -\frac{\arctan x}{x} + \ln\left| \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right| + C \end{aligned}$$

Autre solution : Posons $x = \tan\theta$, de sorte que $dx = \sec^2\theta \, d\theta$. Alors, $\int \frac{\arctan x}{x^2} \, dx = \int \frac{\theta}{\tan^2\theta} \sec^2\theta d\theta = \int \theta\csc^2\theta d\theta = I$. Maintenant, en

intégrant par parties avec $u = \theta$ et $dv = \csc^2\theta d\theta \quad \Rightarrow \quad du = d\theta$, $v = -\cot\theta$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} I &= -\theta\cot\theta - \int (-\cot\theta) d\theta = -\theta\cot\theta + \ln|\sin\theta| + C \\ &= -\arctan x \cdot \frac{1}{x} + \ln\left| \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right| + C = -\frac{\arctan x}{x} + \ln\left| \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right| + C \end{aligned}$$

 © Groupe Modulo inc., 2013



43. Posons $u = \sqrt{x}$, de sorte que $du = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx$. Ainsi,

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x^3}\,dx = \int \frac{u}{1+u^6}(2u\,du) = 2\int \frac{u^2}{1+(u^3)^2}\,du = 2\int \frac{1}{1+t^2}\left(\frac{1}{3}dt\right) \quad \begin{bmatrix} t = u^3 \\ dt = 3u^2 du \end{bmatrix}$$
$$= \tfrac{2}{3}\arctan t + C = \tfrac{2}{3}\arctan u^3 + C = \tfrac{2}{3}\arctan(x^{3/2}) + C$$

Autre méthode : Posons $u = x^{3/2}$, de sorte que $u^2 = x^3$ et $du = \tfrac{3}{2}x^{1/2}dx \;\Rightarrow\; \sqrt{x}dx = \tfrac{2}{3}du$. Ainsi,

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x^3}dx = \int \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{1+u^2}du = \tfrac{2}{3}\ \arctan u + C = \tfrac{2}{3}\arctan(x^{3/2}) + C\ .$$

44. Posons $u = \sqrt{1+e^x}$. Alors, $u^2 = 1 + e^x$, $2u\,du = e^x\,dx = (u^2 - 1)\,dx$ et $dx = \dfrac{2u}{u^2-1}du$. Ainsi,

$$\int \sqrt{1+e^x}dx = \int u \cdot \frac{2u}{u^2-1}du = \int \frac{2u^2}{u^2-1}du = \int\left(2 + \frac{2}{u^2-1}\right)du = \int\left(2 + \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)du$$
$$= 2u + \ln|u-1| - \ln|u+1| + C = 2\sqrt{1+e^x} + \ln\left(\sqrt{1+e^x} - 1\right) - \ln\left(\sqrt{1+e^x} + 1\right) + C$$

45. Posons $t = x^3$. Alors, $dt = 3x^2dx \;\Rightarrow\; I = \int x^5 e^{-x^3}dx = \tfrac{1}{3}\int te^{-t}dt$. Maintenant, en intégrant par parties, avec $u = t$ et $dv = e^{-t}\,dt$:

$$I = -\tfrac{1}{3}te^{-t} + \tfrac{1}{3}\int e^{-t}dt = -\tfrac{1}{3}te^{-t} - \tfrac{1}{3}e^{-t} + C = -\tfrac{1}{3}e^{-x^3}(x^3+1) + C\ .$$

46. En intégrant par parties, avec $u = (x-1)e^x$ et $dv = \dfrac{1}{x^2}dx \;\Rightarrow\; du = [(x-1)e^x + e^x]dx = xe^x dx$, $v = -\dfrac{1}{x}$.

Ainsi, $\displaystyle\int \frac{(x-1)e^x}{x^2}dx = (x-1)e^x\left(-\frac{1}{x}\right) - \int -e^x dx = -e^x + \frac{e^x}{x} + e^x + C = \frac{e^x}{x} + C\ .$

47. Posons $u = x - 1$, de sorte que $du = dx$. Alors,

$$\int x^3(x-1)^{-4}dx = \int (u+1)^3 u^{-4}du = \int (u^3 + 3u^2 + 3u + 1)u^{-4}du = \int (u^{-1} + 3u^{-2} + 3u^{-3} + u^{-4})du$$
$$= \ln|u| - 3u^{-1} - \tfrac{3}{2}u^{-2} - \tfrac{1}{3}u^{-3} + C = \ln|x-1| - 3(x-1)^{-1} - \tfrac{3}{2}(x-1)^{-2} - \tfrac{1}{3}(x-1)^{-3} + C$$

48. Posons $u = \sqrt{1-x^2}$, donc $u^2 = 1 - x^2$ et $2u\,du = -2x\,dx$. Alors, $\int_0^1 x\sqrt{2-\sqrt{1-x^2}}dx = \int_1^0 \sqrt{2-u}(-u\,du)$. Ensuite, posons $v = \sqrt{2-u}$, donc $v^2 = 2 - u$ et $2v\,dv = -du$. Par conséquent,

 © Groupe Modulo inc., 2013

$$\int_1^0 \sqrt{2-u}(-u\,du) = \int_1^{\sqrt{2}} v(2-v^2)(2v\,dv) = \int_1^{\sqrt{2}} (4v^2-2v^4)\,dv = \left[\tfrac{4}{3}v^3 - \tfrac{2}{5}v^5\right]_1^{\sqrt{2}}$$
$$= \left(\tfrac{8}{3}\sqrt{2} - \tfrac{8}{5}\sqrt{2}\right) - \left(\tfrac{4}{3} - \tfrac{2}{5}\right) = \tfrac{16}{15}\sqrt{2} - \tfrac{14}{15}$$

49. Posons $u = \sqrt{4x+1} \;\Rightarrow\; u^2 = 4x+1 \;\Rightarrow\; 2u\,du = 4\,dx \;\Rightarrow\; dx = \tfrac{1}{2}u\,du$. Ainsi,

$$\int \frac{1}{x\sqrt{4x+1}}dx = \int \frac{\frac{1}{2}u\,du}{\frac{1}{4}(u^2-1)u} = 2\int \frac{du}{u^2-1} = 2\left(\tfrac{1}{2}\right)\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C \quad [\text{selon la formule 19}]$$
$$= \ln\left|\frac{\sqrt{4x+1}-1}{\sqrt{4x+1}+1}\right| + C$$

50. Comme à l'exercice 49, posons $u = \sqrt{4x+1}$. Ainsi, $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4x+1}} = \int \frac{\frac{1}{2}u\,du}{\left[\frac{1}{4}(u^2-1)\right]^2 u} = 8\int \frac{du}{(u^2-1)^2}$. Or,

$$\frac{1}{(u^2-1)^2} = \frac{1}{(u+1)^2(u-1)^2} = \frac{A}{u+1} + \frac{B}{(u+1)^2} + \frac{C}{u-1} + \frac{D}{(u-1)^2} \;\Rightarrow$$

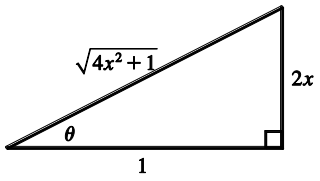
$1 = A(u+1)(u-1)^2 + B(u-1)^2 + C(u-1)(u+1)^2 + D(u+1)^2 \cdot u = 1 \;\Rightarrow\; D = \frac{1}{4},\; u = -1 \;\Rightarrow\; B = \frac{1}{4}$. En égalisant les coefficients de u^3, nous obtenons $A + C = 0$, et en égalisant les coefficients de 1, nous obtenons

$1 = A + B - C + D \;\Rightarrow\; 1 = A + \frac{1}{4} - C + \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; \frac{1}{2} = A - C$. Donc, $A = \frac{1}{4}$ et $C = -\frac{1}{4}$. Par conséquent,

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4x+1}} = 8\int \left[\frac{1/4}{u+1} + \frac{1/4}{(u+1)^2} + \frac{-1/4}{u-1} + \frac{1/4}{(u-1)^2}\right]du$$
$$= \int \left[\frac{2}{u+1} + 2(u+1)^{-2} - \frac{2}{u-1} + 2(u-1)^{-2}\right]du$$
$$= 2\ln|u+1| - \frac{2}{u+1} - 2\ln|u-1| - \frac{2}{u-1} + C$$
$$= 2\ln\left(\sqrt{4x+1}+1\right) - \frac{2}{\sqrt{4x+1}+1} - 2\ln\left|\sqrt{4x+1}-1\right| - \frac{2}{\sqrt{4x+1}-1} + C$$

51. Posons $2x = \tan\theta \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{2}\tan\theta, dx = \frac{1}{2}\sec^2\theta\,d\theta,\; \sqrt{4x^2+1} = \sec\theta$. Ainsi,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+1}} = \int \frac{\frac{1}{2}\sec^2\theta\,d\theta}{\frac{1}{2}\tan\theta\sec\theta} = \int \frac{\sec\theta}{\tan\theta}d\theta = \int \csc\theta\,d\theta$$
$$= -\ln|\csc\theta + \cot\theta| + C \quad [\text{ou } \ln|\csc\theta - \cot\theta| + C]$$
$$= -\ln\left|\frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x} + \frac{1}{2x}\right| + C \left[\text{ou } \ln\left|\frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x} - \frac{1}{2x}\right| + C\right]$$



 © Groupe Modulo inc., 2013

52. Posons $u = x^2$. Alors, $du = 2xdx \Rightarrow$

$$\int \frac{dx}{x(x^4+1)} = \int \frac{xdx}{x^2(x^4+1)} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u(u^2+1)} = \frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{u} - \frac{u}{u^2+1}\right] du = \tfrac{1}{2}\ln|u| - \tfrac{1}{4}\ln(u^2+1) + C$$
$$= \tfrac{1}{2}\ln(x^2) - \tfrac{1}{4}\ln(x^4+1) + C = \tfrac{1}{4}\left[\ln(x^4) - \ln(x^4+1)\right] + C = \tfrac{1}{4}\ln\left(\frac{x^4}{x^4+1}\right) + C$$

Autre méthode : Notons $I = \int \frac{x^3 dx}{x^4(x^4+1)}$ et posons $u = x^4$.

53. $\int x^2\sin(mx)dx = -\frac{1}{m}x^2\cos(mx) + \frac{2}{m}\int x\cos(mx)dx \quad \begin{bmatrix} u = x^2 & dv = \sin(mx)dx \\ du = 2xdx & v = -\frac{1}{m}\cos(mx) \end{bmatrix}$

$$= -\frac{1}{m}x^2\cos(mx) + \frac{2}{m}\left(\tfrac{1}{m}x\sin(mx) - \frac{1}{m}\int \sin(mx)dx\right) \quad \begin{bmatrix} U = x & dV = \cos(mx)dx \\ dU = dx & V = \frac{1}{m}\sin(mx) \end{bmatrix}$$
$$= -\frac{1}{m}x^2\cos(mx) + \frac{2}{m^2}x\sin(mx) + \frac{2}{m^3}\cos(mx) + C$$

54. $\int (x+\sin x)^2 dx = \int (x^2 + 2x\sin x + \sin^2 x)\, dx = \tfrac{1}{3}x^3 + 2(\sin x - x\cos x) + \tfrac{1}{2}(x - \sin x\cos x) + C$
$$= \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x + 2\sin x - \tfrac{1}{2}\sin x\cos x - 2x\cos x + C$$

55. Posons $u = \sqrt{x}$, de sorte que $x = u^2$ et $dx = 2u\,du$. Alors, $\int \frac{dx}{x + x\sqrt{x}} = \int \frac{2udu}{u^2 + u^2 \cdot u} = \int \frac{2}{u(1+u)}\, du = I$. Or,

$\frac{2}{u(1+u)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{1+u} \Rightarrow 2 = A(1+u) + Bu$. En substituant $u = -1$, nous obtenons $2 = -B$, donc $B = -2$. En substituant $u = 0$, nous obtenons $2 = A$. Par conséquent, $I = \int\left(\frac{2}{u} - \frac{2}{1+u}\right) du = 2\ln|u| - 2\ln|1+u| + C = 2\ln\sqrt{x} - 2\ln\left(1+\sqrt{x}\right) + C$

56. Posons $u = \sqrt{x}$, de sorte que $x = u^2$ et $dx = 2u\,du$. Alors,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + x\sqrt{x}} = \int \frac{2udu}{u + u^2 \cdot u} = \int \frac{2}{1+u^2}\, du = 2\arctan u + C = 2\arctan\sqrt{x} + C.$$

57. Posons $u = \sqrt[3]{x+c}$. Alors, $x = u^3 - c \Rightarrow$

$$\int x\sqrt[3]{x+c}\,dx = \int (u^3 - c)u \cdot 3u^2 du = 3\int (u^6 - cu^3)\, du = \tfrac{3}{7}u^7 - \tfrac{3}{4}cu^4 + C = \tfrac{3}{7}(x+c)^{7/3} - \tfrac{3}{4}c(x+c)^{4/3} + C.$$

58. Posons $t = \sqrt{x^2-1}$. Alors, $dt = (x/\sqrt{x^2-1})dx$, $x^2 - 1 = t^2$, $x = \sqrt{t^2+1}$, donc $I = \int \frac{x\,\ln x}{\sqrt{x^2-1}}\, dx = \int \ln\sqrt{t^2+1}dt = \frac{1}{2}\int \ln(t^2+1)dt$.

Maintenant, en intégrant par parties, avec $u = \ln(t^2+1)$ et $dv = dt$:

$$I = \tfrac{1}{2}t\ln(t^2+1) - \int \frac{t^2}{t^2+1}dt = \tfrac{1}{2}t\ln(t^2+1) - \int\left[1 - \frac{1}{t^2+1}\right]dt$$
$$= \tfrac{1}{2}t\ln(t^2+1) - t + \arctan t + C = \sqrt{x^2-1}\,\ln x - \sqrt{x^2-1} + \arctan\sqrt{x^2-1} + C$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

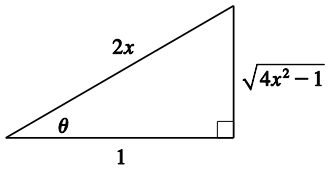
Autre méthode : Intégrons d'abord par parties, avec $u = \ln x$ et $dv = (x/\sqrt{x^2-1})dx$, suivie par un changement de variable ($x = \sec\theta$ ou $u = \sqrt{x^2-1}$).

59. Posons $u = \sin x$, de sorte que $du = \cos x\,dx$. Alors,

$$\int \cos x\ \cos^3(\sin x)dx = \int \cos^3 u du = \int \cos^2 u \cos u du = \int (1-\sin^2 u)\cos u du$$
$$= \int (\cos u - \sin^2 u \cos u)du = \sin u - \tfrac{1}{3}\sin^3 u + C = \sin(\sin x) - \tfrac{1}{3}\sin^3(\sin x) + C$$

60. Posons $2x = \sec\theta$, de sorte que $2\,dx = \sec\theta \tan\theta\, d\theta$. Alors,

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4x^2-1}} = \int \frac{\frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta d\theta}{\frac{1}{4}\sec^2\theta\sqrt{\sec 2\theta - 1}} = \int \frac{2\ \tan\theta d\theta}{\sec\theta\tan\theta}$$
$$= 2\int \cos\theta d\theta = 2\sin\theta + C$$
$$= 2\cdot\frac{\sqrt{4x^2-1}}{2x} + C = \frac{\sqrt{4x^2-1}}{x} + C$$



61. $$\int \frac{d\theta}{1+\cos\theta} = \int\left(\frac{1}{1+\cos\theta}\cdot\frac{1-\cos\theta}{1-\cos\theta}\right)d\theta = \int \frac{1-\cos\theta}{1-\cos^2\theta}\,d\theta = \int \frac{1-\cos\theta}{\sin^2\theta}\,d\theta = \int\left(\frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\right)d\theta$$
$$= \int (\csc^2\theta - \cot\theta\ \csc\theta)d\theta = -\cot\theta + \csc\theta + C$$

Autre méthode : Employons les changements de variable de l'exercice 3.4.59.

$$\int \frac{d\theta}{1+\cos\theta} = \int \frac{2/(1+t^2)dt}{1+(1-t^2)/(1+t^2)} = \int \frac{2dt}{(1+t^2)+(1-t^2)} = \int dt = t + C = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) + C$$

62. $$\int \frac{d\theta}{1+\cos^2\theta} = \int \frac{(1/\cos^2\theta)d\theta}{(1+\cos^2\theta)/\cos^2\theta} = \int \frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta+1}d\theta = \int \frac{\sec^2\theta}{\tan^2\theta+2}d\theta = \int \frac{1}{u^2+2}du \quad \begin{bmatrix} u = \tan\theta \\ du = \sec^2\theta d\theta \end{bmatrix}$$
$$= \int \frac{1}{u^2+(\sqrt{2})^2}du = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan\theta}{\sqrt{2}}\right) + C$$

63. Posons $y = \sqrt{x}$, de sorte que $dy = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx \ \Rightarrow\ dx = 2\sqrt{x}dy = 2ydy$. Ainsi,

$$\int \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}dx = \int ye^y(2ydy) = \int 2y^2e^y dy \quad \begin{bmatrix} u = 2y^2, & dv = e^y dy \\ du = 4ydy & v = e^y \end{bmatrix}$$
$$= 2y^2e^y - \int 4ye^y dy \quad \begin{bmatrix} U = 4y, & dV = e^y dy \\ dU = 4dy & V = e^y \end{bmatrix}$$
$$= 2y^2e^y - (4ye^y - \int 4e^y dy) = 2y^2e^y - 4ye^y + 4e^y + C$$
$$= 2(y^2 - 2y + 2)e^y + C = 2\left(x - 2\sqrt{x} + 2\right)e^{\sqrt{x}} + C$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

64. Posons $u = \sqrt{x}+1$, de sorte que $x = (u-1)^2$ et $dx = 2(u-1)\,du$. Ainsi,

$$\int \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}dx = \int \frac{2(u-1)du}{\sqrt{u}} = \int (2u^{1/2} - 2u^{-1/2})du = \frac{4}{3}u^{3/2} - 4u^{1/2} + C = \frac{4}{3}(\sqrt{x}+1)^{3/2} - 4\sqrt{\sqrt{x}+1} + C.$$

65. Posons $u = \cos^2 x$, de sorte que $du = 2\cos x\,(-\sin x)\,dx$. Ainsi,

$$\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^4 x}dx = \int \frac{2\sin x\cos x}{1+(\cos^2 x)^2}dx = \int \frac{1}{1+u^2}(-du) = -\arctan u + C = -\arctan(\cos^2 x) + C.$$

66. Posons $u = \tan x$, de sorte que $du = \sec^2 x\,dx$. Ainsi,

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\ln(\tan x)dx}{\sin x\cos x} = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\ln(\tan x)}{\tan x}\sec^2 x dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\ln u}{u}du = \left[\tfrac{1}{2}(\ln u)^2\right]_1^{\sqrt{3}} = \tfrac{1}{2}\left(\ln\sqrt{3}\right)^2 = \tfrac{1}{8}(\ln 3)^2.$$

67.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \int \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x\sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\right)dx = \int \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)dx$$
$$= \tfrac{2}{3}\left[(x+1)^{3/2} - x^{3/2}\right] + C$$

68. $$\int \frac{x^2}{x^6+3x^3+2}\,dx = \int \frac{x^2dx}{(x^3+1)(x^3+2)} = \int \frac{\frac{1}{3}du}{(u+1)(u+2)} \quad \left[\begin{array}{c} u = x^3, \\ du = 3x^2dx \end{array}\right].$$

Or, $\dfrac{1}{(u+1)(u+2)} = \dfrac{A}{u+1} + \dfrac{B}{u+2} \;\Rightarrow\; 1 = A(u+2) + B(u+1)$. En substituant $u = -2$, nous obtenons $B = -1$.

En substituant $u = -1$, nous obtenons $A = 1$. Par conséquent,

$$\frac{1}{3}\int \frac{du}{(u+1)(u+2)} = \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u+2}\right)du = \frac{1}{3}\ln|u+1| - \frac{1}{3}\ln|u+2| + C$$
$$= \tfrac{1}{3}\ln|x^3+1| - \tfrac{1}{3}\ln|x^3+2| + C$$

69. Posons $x = \tan\theta$, de sorte que $dx = \sec^2\theta\,d\theta$, $x = \sqrt{3} \;\Rightarrow\; \theta = \frac{\pi}{3}$ et $x = 1 \;\Rightarrow\; \theta = \frac{\pi}{4}$. Ainsi,

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\,dx = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sec\theta}{\tan^2\theta}\sec^2\theta d\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sec\theta(\tan^2\theta+1)}{\tan^2\theta}\,d\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/3}\left(\frac{\sec\theta\tan^2\theta}{\tan^2\theta} + \frac{\sec\theta}{\tan^2\theta}\right)d\theta$$
$$= \int_{\pi/4}^{\pi/3}(\sec\theta + \csc\theta\cot\theta)d\theta = \left[\ln|\sec\theta+\tan\theta| - \csc\theta\right]_{\pi/4}^{\pi/3}$$
$$= \left(\ln|2+\sqrt{3}| - \tfrac{2}{\sqrt{3}}\right) - \left(\ln|\sqrt{2}+1| - \sqrt{2}\right) = \sqrt{2} - \tfrac{2}{\sqrt{3}} + \ln(2+\sqrt{3}) - \ln(1+\sqrt{2})$$

70. Posons $u = e^x$. Alors, $x = \ln u$, $dx = du/u \;\Rightarrow$

$$\int \frac{dx}{1+2e^x - e^{-x}} = \int \frac{du/u}{1+2u-1/u} = \int \frac{du}{2u^2+u-1} = \int\left[\frac{2/3}{2u-1} - \frac{1/3}{u+1}\right]du$$
$$= \tfrac{1}{3}\ln|2u-1| - \tfrac{1}{3}\ln|u+1| + C = \tfrac{1}{3}\ln|(2e^x-1)/(e^x+1)| + C$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

71. Posons $u = e^x$. Alors, $x = \ln u$, $dx = du/u \Rightarrow$

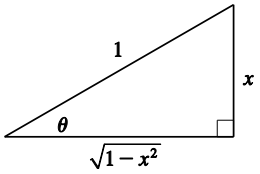
$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx = \int \frac{u^2}{1+u}\frac{du}{u} = \int \frac{u}{1+u}\,du = \int\left(1-\frac{1}{1+u}\right)du = u - \ln|1+u| + C = e^x - \ln(1+e^x) + C\,.$$

72. En intégrant par parties, avec $u = \ln(x+1)$ et $dv = dx/x^2$:

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln(x+1)}{x^2}\,dx &= -\frac{1}{x}\ln(x+1) + \int \frac{dx}{x(x+1)} = -\frac{1}{x}\ln(x+1) + \int\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right]dx \\ &= -\frac{1}{x}\ln(x+1) + \ln|x| - \ln(x+1) + C = -\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln(x+1) + \ln|x| + C\end{aligned}$$

73. Posons $\theta = \arcsin x$, de sorte que $d\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ et $x = \sin\theta$. Alors, $\displaystyle\int \frac{x+\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int(\sin\theta + \theta)d\theta = -\cos\theta + \tfrac{1}{2}\theta^2 + C$

$$= -\sqrt{1-x^2} + \tfrac{1}{2}(\arcsin x)^2 + C$$



74. $\displaystyle\int \frac{4^x + 10^x}{2^x}\,dx = \int\left(\frac{4^x}{2^x} + \frac{10^x}{2^x}\right)dx = \int(2^x + 5^x)dx = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{5^x}{\ln 5} + C$

75. $\dfrac{1}{(x-2)(x^2+4)} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{Bx+C}{x^2+4} \Rightarrow 1 = A(x^2+4) + (Bx+C)(x-2) = (A+B)x^2 + (C-2B)x + (4A-2C)$. Donc, $0 = A + B = C -$

$2B$, $1 = 4A - 2C$. En substituant $x = 2$, nous obtenons $A = \frac{1}{8} \Rightarrow B = -\frac{1}{8}$ et $C = -\frac{1}{4}$. Donc,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x-2)(x^2+4)}\,dx &= \int\left(\frac{\frac{1}{8}}{x-2} + \frac{\frac{-1}{8}x - \frac{1}{4}}{x^2+4}\right)dx = \frac{1}{8}\int\frac{dx}{x-2} - \frac{1}{16}\int\frac{2x\,dx}{x^2+4} - \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+4} \\ &= \tfrac{1}{8}\ln|x-2| - \tfrac{1}{16}\ln(x^2+4) - \tfrac{1}{8}\arctan(x/2) + C\end{aligned}$$

76. Posons $u = 2 + \sqrt{x}$, de sorte que $du = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx$. Ainsi, $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}(2+\sqrt{x})^4} = \int\frac{2du}{u^4} = 2\int u^{-4}du = -\frac{2}{3}u^{-3} + C = -\frac{2}{3(2+\sqrt{x})^3} + C$.

77. Posons $y = \sqrt{1+e^x}$, de sorte que $y^2 = 1 + e^x$, $2y\,dy = e^x\,dx$, $e^x = y^2 - 1$ et $x = \ln(y^2 - 1)$. Ainsi,

 © Groupe Modulo inc., 2013

$$\begin{aligned}\int \frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}\,dx &= \int \frac{\ln(y^2-1)}{y}(2y\,dy) = 2\int[\ln(y+1)+\ln(y-1)]\,dy \\ &= 2[(y+1)\ln(y+1)-(y+1)+(y-1)\ln(y-1)-(y-1)]+C \quad [\text{voir l'exemple 3.1.2}] \\ &= 2[y\ln(y+1)+\ln(y+1)-y-1+y\ln(y-1)-\ln(y-1)-y+1]+C \\ &= 2[y(\ln(y+1)+\ln(y-1))+\ln(y+1)-\ln(y-1)-2y]+C \\ &= 2\left[y\ln(y^2-1)+\ln\frac{y+1}{y-1}-2y\right]+C = 2\left[\sqrt{1+e^x}\ln(e^x)+\ln\frac{\sqrt{1+e^x}+1}{\sqrt{1+e^x}-1}-2\sqrt{1+e^x}\right]+C \\ &= 2x\sqrt{1+e^x}+2\ln\frac{\sqrt{1+ex}+1}{\sqrt{1+ex}-1}-4\sqrt{1+e^x}+C = 2(x-2)\sqrt{1+e^x}+2\ln\frac{\sqrt{1+e^x}+1}{\sqrt{1+e^x}-1}+C\end{aligned}$$

78. $$\frac{1+\sin x}{1-\sin x}=\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\cdot\frac{1+\sin x}{1+\sin x}=\frac{1+2\sin x+\sin^2 x}{1-\sin^2 x}=\frac{1+2\sin x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{2\sin x}{\cos^2 x}+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$
$$= \sec^2 x+2\sec x\tan x+\tan^2 x=\sec^2 x+2\sec x\tan x+\sec^2 x-1=2\sec^2 x+2\sec x\tan x-1$$

Par conséquent,

$$\int\frac{1+\sin x}{1-\sin x}dx=\int(2\sec^2 x+2\sec x\tan x-1)dx=2\tan x+2\sec x-x+C\ .$$

79. Posons $u=x,\ dv=\sin^2 x\cos x dx \ \Rightarrow\ du=dx, v=\frac{1}{3}\sin^3 x$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int x\sin^2 x\cos x\,dx &= \tfrac{1}{3}x\sin^3 x-\int\tfrac{1}{3}\sin^3 x dx=\tfrac{1}{3}x\sin^3 x-\tfrac{1}{3}\int(1-\cos^2 x)\sin x dx \\ &= \frac{1}{3}x\sin^3 x+\frac{1}{3}\int(1-y^2)\,dy \quad \begin{bmatrix} u=\cos x, \\ du=-\sin x\,dx\end{bmatrix} \\ &= \tfrac{1}{3}x\sin^3 x+\tfrac{1}{3}y-\tfrac{1}{9}y^3+C=\tfrac{1}{3}x\sin^3 x+\tfrac{1}{3}\cos x-\tfrac{1}{9}\cos^3 x+C\end{aligned}$$

80. $$\begin{aligned}\int\frac{\sec x\cos 2x}{\sin x+\sec x}\,dx &= \int\frac{\sec x\cos 2x}{\sin x+\sec x}\cdot\frac{2\cos x}{2\cos x}\,dx=\int\frac{2\cos 2x}{2\sin x\cos x+2}\,dx \\ &= \int\frac{2\cos 2x}{\sin 2x+2}\,dx=\int\frac{1}{u}\,du \quad \begin{bmatrix} u=\sin 2x+2, \\ du=2\cos 2x dx\end{bmatrix} \\ &= \ln|u|+C=\ln|\sin 2x+2|+C=\ln(\sin 2x+2)+C\end{aligned}$$

81. $$\begin{aligned}\int\sqrt{1-\sin x}dx &= \int\sqrt{\frac{1-\sin x}{1}\cdot\frac{1+\sin x}{1+\sin x}}\,dx=\int\sqrt{\frac{1-\sin 2x}{1+\sin x}}dx \\ &= \int\sqrt{\frac{\cos^2 x}{1+\sin x}}dx=\int\frac{\cos x dx}{\sqrt{1+\sin x}} \quad [\text{supposons que } \cos x>0] \\ &= \int\frac{du}{\sqrt{u}} \quad \begin{bmatrix} u=1+\sin x, \\ du=\cos x dx\end{bmatrix} \\ &= 2\sqrt{u}+C=2\sqrt{1+\sin x}+C\end{aligned}$$

Autre méthode : Posons $u=\sin x$, de sorte que $du=\cos x dx=\sqrt{1-\sin^2 x}dx=\sqrt{1-u^2}dx$. Ainsi,

$$\int\sqrt{1-\sin x}dx=\int\sqrt{1-u}\left(\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}\right)=\int\frac{1}{\sqrt{1+u}}\,du=2\sqrt{1+u}+C=2\sqrt{1+\sin x}+C\ .$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

82. $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\,dx = \int \frac{\sin x\ \cos x}{(\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2}\,dx = \int \frac{\sin x\cos x}{(\sin^2 x)^2 + (1-\sin^2 x)^2}dx$

$$= \int \frac{1}{u^2 + (1-u)^2}\left(\frac{1}{2}du\right) \quad \begin{bmatrix} u = \sin^2 x, \\ du = 2\sin x\cos x dx \end{bmatrix}$$

$$= \int \frac{1}{4u^2 - 4u + 2}\,du = \int \frac{1}{(4u^2 - 4u + 1) + 1}\,du$$

$$= \int \frac{1}{(2u-1)^2 + 1}du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{y^2+1}\,dy \quad \begin{bmatrix} y = 2u - 1, \\ dy = 2du \end{bmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{2}\arctan y + C = \tfrac{1}{2}\arctan(2u-1) + C = \tfrac{1}{2}\arctan(2\sin^2 x - 1) + C$$

Autre méthode :

$$\int \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\,dx = \int \frac{(\sin x\cos x)/\cos^4 x}{(\sin^4 x + \cos^4 x)/\cos^4 x}\,dx = \int \frac{\tan x\sec^2 x}{\tan^4 x + 1}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{u^2+1}\left(\frac{1}{2}du\right) \quad \begin{bmatrix} u = \tan^2 x, \\ du = 2\tan x\sec^2 x dx \end{bmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{2}\arctan u + C = \tfrac{1}{2}\arctan(\tan^2 x) + C$$

83. La fonction $y = 2xe^{x^2}$ *a* une primitive élémentaire, cela nous aidera donc à évaluer l'intégrale.

$$\int (2x^2+1)e^{x^2}dx = \int 2x^2 e^{x^2}dx + \int e^{x^2}dx = \int x\left(2xe^{x^2}\right)dx + \int e^{x^2}dx$$

$$= xe^{x^2} - \int e^{x^2}dx + \int e^{x^2}dx \quad \begin{bmatrix} u = x, & dv = 2xe^{x^2}dx, \\ du = dx & v = e^{x^2} \end{bmatrix} = xe^{x^2} + C$$

84. a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{x}dx = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{e^t}}{e^t}e^t dt \quad \begin{bmatrix} x = e^t, \\ dx = e^t dt \end{bmatrix} = \int_0^{\ln 2} e^{e^t}dt = F(\ln 2)$

b) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{\ln x}\,dx = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{1}{u}(e^u du) \quad \begin{bmatrix} u = \ln x, \\ du = \dfrac{1}{x}dx \end{bmatrix} = \int_{\ln\ln 2}^{\ln\ln 3} \frac{e^{e^v}}{e^v}e^v dv \quad \begin{bmatrix} u = e^v, \\ du = e^v dv \end{bmatrix}$

$$= \int_{\ln\ln 2}^{0} e^{e^v}dv + \int_0^{\ln\ln 3} e^{e^v}dv \quad [\text{car } \ln\ln 2 < 0]$$

$$= \int_0^{\ln\ln 3} e^{e^v}dv - \int_0^{\ln\ln 2} e^{e^v}dv = F(\ln\ln 3) - F(\ln\ln 2)$$

Autre méthode : Posons le changement de variable $x = e^{e^t}$ dans l'intégrale demandée.

 © Groupe Modulo inc., 2013

3.6 La valeur approchée d'une intégrale

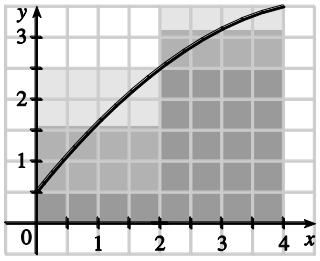
1. a) $\Delta x = (b - a)/n = (4 - 0)/2 = 2$

$$G_2 = \sum_{i=1}^{2} f(x_{i-1})\Delta x = f(x_0)\cdot 2 + f(x_1)\cdot 2 = 2[f(0) + f(2)] = 2(0,5 + 2,5) = 6$$

$$D_2 = \sum_{i=1}^{2} f(x_i)\Delta x = f(x_1)\cdot 2 + f(x_2)\cdot 2 = 2[f(2) + f(4)] = 2(2,5 + 3,5) = 12$$

$$M_2 = \sum_{i=1}^{2} f(\bar{x}_i)\Delta x = f(\bar{x}_1)\cdot 2 + f(\bar{x}_2)\cdot 2 = 2[f(1) + f(3)] \approx 2(1,6 + 3,2) = 9,6$$

b)

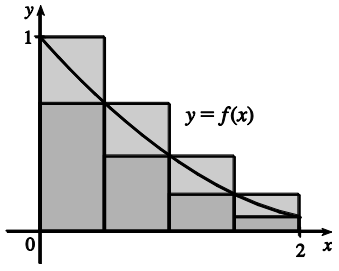


G_2 est une approximation par défaut, puisque l'aire sous les petits rectangles est moins grande que l'aire sous la courbe, et D_2 est une approximation par excès, puisque l'aire sous les grands rectangles est plus grande que l'aire sous la courbe. Il semble que M_2 soit une approximation par excès, bien qu'elle soit assez rapprochée de I. La solution de l'exercice 47 établit rigoureusement que, si f est concave vers le bas sur un intervalle $[a, b]$, alors la méthode des milieux des sous-intervalles donne une approximation par excès de $\int_a^b f(x)dx$.

c) $T_2 = (\frac{1}{2}\Delta x)[f(x_0) + 2f(x_1) + f(x_2)] = \frac{2}{2}[f(0) + 2f(2) + f(4)] = 0,5 + 2(2,5) + 3,5 = 9$. Il s'agit ici d'une approximation par défaut, puisque la courbe est concave vers le bas. Par conséquent, $T_2 = 9 < I$. La solution de l'exercice 47 donne une preuve générale de cette conclusion.

d) Pour tout n, $G_n < T_n < I < M_n < D_n$.

2.



Le graphique montre que $G_4 > T_4 > \int_0^2 f(x)dx > D_4$, et il semble que M_4 soit légèrement moins grande que $\int_0^2 f(x)dx$. En fait, pour toute fonction qui est concave vers le haut, il est possible de démontrer que $G_n > T_n > \int_0^2 f(x)dx > M_n > D_n$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

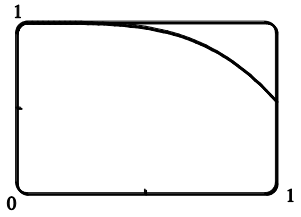
a) Puisque 0,9540 > 0,8675 > 0,8632 > 0,7811, il s'ensuit que $G_n = 0{,}9540$, $T_n = 0{,}8675$, $M_n = 0{,}8632$ et $D_n = 0{,}7811$.

b) Puisque $M_n < \int_0^2 f(x)dx < T_n$, nous avons $0{,}8632 < \int_0^2 f(x)dx < 0{,}8675$.

3. $f(x) = \cos(x^2)$, $\Delta x = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$

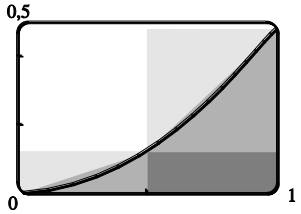
a) $T_4 = \frac{1}{4 \cdot 2}[f(0) + 2f(\frac{1}{4}) + 2f(\frac{2}{4}) + 2f(\frac{3}{4}) + f(1)] \approx 0{,}895\,759$

b) $M_4 = \frac{1}{4}[f(\frac{1}{8}) + f(\frac{3}{8}) + f(\frac{5}{8}) + f(\frac{7}{8})] \approx 0{,}908\,907$



Le graphique montre que f est concave vers le bas sur l'intervalle [0, 1]. T_4 est donc une approximation par défaut et M_4, une approximation par excès. Nous concluons que $0{,}895\,759 < \int_0^1 \cos(x^2)dx < 0{,}908\,907$.

4.



a) Puisque la fonction f est croissante sur l'intervalle [0, 1], G_2 sera une approximation par défaut de I (puisque l'aire du rectangle le plus foncé est moins grande que l'aire sous la courbe), et D_2 sera une approximation par excès. Puisque f est concave vers le haut sur l'intervalle [0, 1], M_2 sera une approximation par défaut de I, et T_2 en sera une par excès (l'aire sous les segments de droite est plus grande que l'aire sous la courbe).

b) Pour tout n, $G_n < M_n < I < T_n < D_n$.

c) $G_5 = \sum_{i=1}^{5} f(x_i - 1)\Delta x = \frac{1}{5}[f(0{,}0) + f(0{,}2) + f(0{,}4) + f(0{,}6) + f(0{,}8)] \approx 0{,}1187$

$D_5 = \sum_{i=1}^{5} f(x_i)\Delta x = \frac{1}{5}[f(0{,}2) + f(0{,}4) + f(0{,}6) + f(0{,}8) + f(1)] \approx 0{,}2146$

$M_5 = \sum_{i=1}^{5} f(\overline{x}_i)\Delta x = \frac{1}{5}[f(0{,}1) + f(0{,}3) + f(0{,}5) + f(0{,}7) + f(0{,}9)] \approx 0{,}1622$

$T_5 = (\frac{1}{2}\Delta x)[f(0) + 2f(0{,}2) + 2f(0{,}4) + 2f(0{,}6) + 2f(0{,}8) + f(1)] \approx 0{,}1666$

Le graphique semble montrer que la méthode des milieux des sous-intervalles donne l'approximation la plus satisfaisante. (Ceci est en fait le cas, puisque $I \approx 0{,}163\,714\,05$.)

 © Groupe Modulo inc., 2013

5. a) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$, $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}=\dfrac{2-0}{10}=\dfrac{1}{5}$

$M_{10}=\frac{1}{5}[f(\frac{1}{10})+f(\frac{3}{10})+f(\frac{5}{10})+\cdots+f(\frac{19}{10})]\approx 0{,}806\,598$

b) $S_{10}=\frac{1}{5\cdot 3}[f(0)+4f(\frac{1}{5})+2f(\frac{2}{5})+4f(\frac{3}{5})+2f(\frac{4}{5})+\cdots+4f(\frac{9}{5})+f(2)]\approx 0{,}804\,779$

Valeur exacte :
$$I=\int_0^2 \frac{x}{1+x^2}\,dx=[\tfrac{1}{2}\ln|1+x^2|]_0^2 \quad [u=1+x^2, du=2x\,dx]$$
$$=\tfrac{1}{2}\ln 5-\tfrac{1}{2}\ln 1=\tfrac{1}{2}\ln 5\approx 0{,}804\,719$$

Erreurs commises :
$$E_M=\text{valeur exacte}-M_{10}=I-M_{10}\approx -0{,}001\,879$$
$$E_S=\text{valeur exacte}-S_{10}=I-S_{10}\approx -0{,}000\,060$$

6. a) $f(x)=x\cos x$, $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}=\dfrac{\pi-0}{4}=\dfrac{\pi}{4}$

$M_4=\frac{\pi}{4}[f(\frac{\pi}{8})+f(\frac{3\pi}{8})+f(\frac{5\pi}{8})+f(\frac{7\pi}{8})]\approx -1{,}945\,744$

b) $S_4=\frac{\pi}{4\cdot 3}[f(0)+4f(\frac{\pi}{4})+2f(\frac{2\pi}{4})+4f(\frac{3\pi}{4})+f(\pi)]\approx -1{,}985\,611$

Valeur exacte :
$$I=\int_0^\pi x\cos x\,dx=[x\sin x+\cos x]_0^\pi \quad [\text{intégration par parties avec } u=x \text{ et } dv=\cos x\,dx]$$
$$=(0+(-1))-(0+1)=-2$$

Erreurs commises :
$$E_M=\text{valeur exacte}-M_4=I-M_4\approx -0{,}054\,256$$
$$E_S=\text{valeur exacte}-S_4=I-S_4\approx -0{,}014\,389$$

7. $f(x)=\sqrt{x^3-1}$, $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}=\dfrac{2-1}{10}=\dfrac{1}{10}$

a) $T_{10}=\frac{1}{10\cdot 2}[f(1)+2f(1{,}1)+2f(1{,}2)+2f(1{,}3)+2f(1{,}4)+2f(1{,}5)+2f(1{,}6)+2f(1{,}7)+2f(1{,}8)+2f(1{,}9)+f(2)]$
$\approx 1{,}506\,361$

b) $M_{10}=\frac{1}{10}[f(1{,}05)+f(1{,}15)+f(1{,}25)+f(1{,}35)+f(1{,}45)+f(1{,}55)+f(1{,}65)+f(1{,}75)+f(1{,}85)+f(1{,}95)]$
$\approx 1{,}518\,362$

c) $S_{10}=\frac{1}{10\cdot 3}[f(1)+4f(1{,}1)+2f(1{,}2)+4f(1{,}3)+2f(1{,}4)+4f(1{,}5)+2f(1{,}6)+4f(1{,}7)+2f(1{,}8)+4f(1{,}9)+f(2)]$
$\approx 0{,}376\,330$

8. $f(x)=\dfrac{1}{1+x^6}$, $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}=\dfrac{2-0}{8}=\dfrac{1}{4}$

a) $T_8=\frac{1}{4\cdot 2}[f(0)+2f(0{,}25)+2f(0{,}5)+2f(0{,}75)+2f(1)+2f(1{,}25)+2f(1{,}5)+2f(1{,}75)+f(2)]\approx 1{,}040\,756$

b) $M_8=\frac{1}{4}[f(0{,}125)+f(0{,}375)+f(0{,}625)+f(0{,}875)+f(1{,}125)+f(1{,}375)+f(1{,}625)+f(1{,}875)]\approx 1{,}041\,109$

c) $S_8=\frac{1}{4\cdot 3}[f(0)+4f(0{,}25)+2f(0{,}5)+4f(0{,}75)+2f(1)+4f(1{,}25)+2f(1{,}5)+4f(1{,}75)+f(2)]\approx 1{,}042\,172$

 © Groupe Modulo inc., 2013

9. $f(x)=\dfrac{e^x}{1+x^2}$, $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}=\dfrac{2-0}{10}=\dfrac{1}{5}$

a) $T_{10}=\frac{1}{5\cdot 2}[f(0)+2f(0{,}2)+2f(0{,}4)+2f(0{,}6)+2f(0{,}8)+2f(1)+2f(1{,}2)+2f(1{,}4)+2f(1{,}6)+2f(1{,}8)+f(2)]$
$\approx 2{,}660\,833$

b) $M_{10}=\frac{1}{5}[f(0{,}1)+f(0{,}3)+f(0{,}5)+f(0{,}7)+f(0{,}9)+f(1{,}1)+f(1{,}3)+f(1{,}5)+f(1{,}7)+f(1{,}9)]$
$\approx 2{,}664\,377$

c) $S_{10}=\frac{1}{5\cdot 3}[f(0)+4f(0{,}2)+2f(0{,}4)+4f(0{,}6)+2f(0{,}8)+4f(1)+2f(1{,}2)+4f(1{,}4)+2f(1{,}6)+4f(1{,}8)+f(2)]$
$\approx 2{,}663\,244$

10. $f(x)=\sqrt[3]{1+\cos x}$, $\Delta x=\frac{\pi/2-0}{4}=\frac{\pi}{8}$

a) $T_4=\frac{\pi}{8\cdot 2}[f(0)+2f(\frac{\pi}{8})+2f(\frac{2\pi}{8})+2f(\frac{3\pi}{8})+f(\frac{\pi}{2})]\approx 1{,}838\,967$

b) $M_4=\frac{\pi}{8}[f(\frac{\pi}{16})+f(\frac{3\pi}{16})+f(\frac{5\pi}{16})+f(\frac{7\pi}{16})]\approx 1{,}845\,390$

c) $S_4=\frac{\pi}{8\cdot 3}[f(0)+4f(\frac{\pi}{8})+2f(\frac{2\pi}{8})+4f(\frac{3\pi}{8})+f(\frac{\pi}{2})]\approx 1{,}843\,245$

11. $f(x)=\sqrt{\ln x}$, $\Delta x=\frac{4-1}{6}=\frac{1}{2}$

a) $T_6=\frac{1}{2\cdot 2}[f(1)+2f(1{,}5)+2f(2)+2f(2{,}5)+2f(3)+2f(3{,}5)+f(4)]\approx 2{,}591\,334$

b) $M_6=\frac{1}{2}[f(1{,}25)+f(1{,}75)+f(2{,}25)+f(2{,}75)+f(3{,}25)+f(3{,}75)]\approx 2{,}681\,046$

c) $S_6=\frac{1}{2\cdot 3}[f(1)+4f(1{,}5)+2f(2)+4f(2{,}5)+2f(3)+4f(3{,}5)+f(4)]\approx 2{,}631\,976$

12. $f(x)=\sin(x^3)$, $\Delta x=\frac{1-0}{10}=\frac{1}{10}$

a) $T_{10}=\frac{1}{10\cdot 2}[f(0)+2f(0{,}1)+2f(0{,}2)+2f(0{,}3)+2f(0{,}4)+2f(0{,}5)+2f(0{,}6)+2f(0{,}7)+2f(0{,}8)+2f(0{,}9)+f(1)]$
$\approx 0{,}235\,205$

b) $M_{10}=\frac{1}{10}[f(0{,}05)+f(0{,}15)+f(0{,}25)+f(0{,}35)+f(0{,}45)+f(0{,}55)+f(0{,}65)+f(0{,}75)+f(0{,}85)+f(0{,}95)]$
$\approx 0{,}233\,162$

c) $S_{10}=\frac{1}{10\cdot 3}[f(0)+4f(0{,}1)+2f(0{,}2)+4f(0{,}3)+2f(0{,}4)+4f(0{,}5)+2f(0{,}6)+4f(0{,}7)+2f(0{,}8)+4f(0{,}9)+f(1)]$
$\approx 0{,}233\,810$

13. $f(t)=e^{\sqrt{t}}\sin t$, $\Delta t=\frac{4-0}{8}=\frac{1}{2}$

a) $T_8=\frac{1}{2\cdot 2}[f(0)+2f(\frac{1}{2})+2f(1)+2f(\frac{3}{2})+2f(2)+2f(\frac{5}{2})+2f(3)+2f(\frac{7}{2})+f(4)]\approx 4{,}513\,618$

b) $M_8=\frac{1}{2}[f(\frac{1}{4})+f(\frac{3}{4})+f(\frac{5}{4})+f(\frac{7}{4})+f(\frac{9}{4})+f(\frac{11}{4})+f(\frac{13}{4})+f(\frac{15}{4})]\approx 4{,}748\,256$

c) $S_8=\frac{1}{2\cdot 3}[f(0)+4f(\frac{1}{2})+2f(1)+4f(\frac{3}{2})+2f(2)+4f(\frac{5}{2})+2f(3)+4f(\frac{7}{2})+f(4)]\approx 4{,}675\,111$

 © Groupe Modulo inc., 2013

14. $f(z)=\sqrt{z}e^{-z}$, $\Delta z=\frac{1-0}{10}=\frac{1}{10}$

a) $T_{10}=\frac{1}{10\cdot 2}\{f(0)+2[f(0{,}1)+f(0{,}2)+\cdots+f(0{,}9)]+f(1)\}\approx 0{,}372\,299$

b) $M_{10}=\frac{1}{10}[f(0{,}05)+f(0{,}15)+f(0{,}25)+\cdots+f(0{,}95)]\approx 0{,}380\,894$

c) $S_{10}=\frac{1}{10\cdot 3}[f(0)+4f(0{,}1)+2f(0{,}2)+4f(0{,}3)+2f(0{,}4)+4f(0{,}5)+2f(0{,}6)+4f(0{,}7)+2f(0{,}8)+4f(0{,}9)+f(1)]$
$\approx 9{,}650\,526$

15. $f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$, $\Delta x=\frac{5-1}{8}=\frac{1}{2}$

a) $T_8=\frac{1}{2\cdot 2}[f(1)+2f(\frac{3}{2})+2f(2)+\cdots+2f(4)+2f(\frac{9}{2})+f(5)]\approx -0{,}495\,333$

b) $M_8=\frac{1}{2}[f(\frac{5}{4})+f(\frac{7}{4})+f(\frac{9}{4})+f(\frac{11}{4})+f(\frac{13}{4})+f(\frac{15}{4})+f(\frac{17}{4})+f(\frac{19}{4})]\approx -0{,}543\,321$

c) $S_8=\frac{1}{2\cdot 3}[f(1)+4f(\frac{3}{2})+2f(2)+4f(\frac{5}{2})+2f(3)+4f(\frac{7}{2})+2f(4)+4f(\frac{9}{2})+f(5)]\approx -0{,}526\,123$

16. $f(x)=\ln(x^3+2)$, $\Delta x=\frac{6-4}{10}=\frac{1}{5}$

a) $T_{10}=\frac{1}{5\cdot 2}[f(4)+2f(4{,}2)+2f(4{,}4)+\cdots+2f(5{,}6)+2f(5{,}8)+f(6)]\approx 9{,}649\,753$

b) $M_{10}=\frac{1}{5}[f(4{,}1)+f(4{,}3)+\cdots+f(5{,}7)+f(5{,}9)]\approx 9{,}650\,912$

c) $S_{10}=\frac{1}{5\cdot 3}[f(4)+4f(4{,}2)+2f(4{,}4)+4f(4{,}6)+2f(4{,}8)+4f(5)+2f(5{,}2)+4f(5{,}4)+2f(5{,}6)+4f(5{,}8)+f(6)]$
$\approx 9{,}650\,526$

17. $f(x)=e^{e^x}$, $\Delta x=\frac{1-(-1)}{10}=\frac{1}{5}$

a) $T_{10}=\frac{1}{5\cdot 2}[f(-1)+2f(-0{,}8)+2f(-0{,}6)+2f(-0{,}4)+2f(-0{,}2)+2f(0)+2f(0{,}2)+2f(0{,}4)+2f(0{,}6)+2f(0{,}8)+f(1)]$
$\approx 8{,}363\,853$

b) $M_{10}=\frac{1}{5}[f(-0{,}9)+f(-0{,}7)+f(-0{,}5)+f(-0{,}3)+f(-0{,}1)+f(0{,}1)+f(0{,}3)+f(0{,}5)+f(0{,}7)+f(0{,}9)]$
$\approx 8{,}163\,298$

c) $S_{10}=\frac{1}{5\cdot 3}[f(-1)+4f(-0{,}8)+2f(-0{,}6)+4f(-0{,}4)+2f(-0{,}2)+4f(0)+2f(0{,}2)+4f(0{,}4)+2f(0{,}6)+4f(0{,}8)+f(1)]$
$\approx 8{,}235\,114$

18. $f(x)=\cos\sqrt{x}$, $\Delta x=\frac{4-0}{10}=\frac{2}{5}=0{,}4$

a) $T_{10}=\frac{2}{5\cdot 2}[f(0)+2f(0{,}4)+2f(0{,}8)+\cdots+2f(3{,}2)+2f(3{,}6)+f(4)]\approx 0{,}808\,532$

b) $M_{10}=\frac{2}{5}[f(0{,}2)+f(0{,}6)+f(1)+\cdots+f(3{,}4)+f(3{,}8)]\approx 0{,}803\,078$

c) $S_{10}=\frac{2}{5\cdot 3}[f(0)+4f(0{,}4)+2f(0{,}8)+4f(1{,}2)+2f(1{,}6)+4f(2)+2f(2{,}4)+4f(2{,}8)+2f(3{,}2)+4f(3{,}6)+f(4)]$
$\approx 0{,}804\,896$

 © Groupe Modulo inc., 2013

19. $f(x) = \cos(x^2),\ \Delta x = \frac{1-0}{8} = \frac{1}{8}$

a) $T_8 = \frac{1}{8\cdot 2}\{f(0) + 2[f(\frac{1}{8}) + f(\frac{2}{8}) + \cdots + f(\frac{7}{8})] + f(1)\} \approx 0{,}902\,333$
$M_8 = \frac{1}{8}[f(\frac{1}{16}) + f(\frac{3}{16}) + f(\frac{5}{16}) + \cdots + f(\frac{15}{16})] = 0{,}905\,620$

b) $f(x) = \cos(x^2), f'(x) = -2x\sin(x^2), f''(x) = -2\sin(x^2) - 4x^2\cos(x^2)$. Pour $0 \le x \le 1$, sin et cos sont positifs, donc $|f''(x)| = 2\sin(x^2) + 4x^2\cos(x^2) \le 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot 1 = 6$, puisque $\sin(x^2) \le 1$ et $\cos(x^2) \le 1$ pour tout x et $x^2 \le 1$ pour $0 \le x \le 1$. Donc, pour $n = 8$, en posant $K = 6$, $a = 0$ et $b = 1$ dans la formule 3, nous obtenons $|E_T| \le 6 \cdot 1^3/(12 \cdot 8^2) = \frac{1}{128} = 0{,}007\,812\,5$ et $|E_M| \le \frac{1}{256} = 0{,}003\,906\,25$. [Nous pourrions obtenir une meilleure approximation en observant sur un graphique de f'' que $|f''(x)| \le 4$ pour $0 \le x \le 1$.]

c) Posons $K = 6$ dans la formule 3 [comme à la sous-question b)].

$$|E_T| \le \frac{K(b-a)^3}{12n^2} \le 0{,}000\,1 \iff \frac{6(1-0)^3}{12n^2} \le 10^{-4} \iff \frac{1}{2n^2} \le \frac{1}{10^4} \iff 2n^2 \ge 10^4 \iff n^2 \ge 5000 \iff n \ge 71.$$

Prenons $n = 71$ pour T_n. Pour E_M, posons encore $K = 6$ dans la formule 3. Nous obtenons $|E_M| \le 10^{-4} \iff 4n^2 \ge 10^4 \iff n^2 \ge 2500 \iff n \ge 50$. Prenons $n = 50$ pour M_n.

20. $f(x) = e^{1/x},\ \Delta x = \frac{2-1}{10} = \frac{1}{10}$

a) $T_{10} = \frac{1}{10\cdot 2}[f(1) + 2f(1{,}1) + 2f(1{,}2) + \cdots + 2f(1{,}9) + f(2)] \approx 2{,}021\,976$
$M_{10} = \frac{1}{10}[f(1{,}05) + f(1{,}15) + f(1{,}25) + \cdots + f(1{,}95)] \approx 2{,}019\,102$

b) $f(x) = e^{1/x}, f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}e^{1/x},\ f''(x) = \dfrac{2x+1}{x^4}e^{1/x}$. Or, la fonction f'' est décroissante sur l'intervalle [1, 2]; donc, posons $x = 1$ et $K = 3e$. $|E_T| \le \dfrac{3e(2-1)^3}{12(10)^2} = \dfrac{e}{400} \approx 0{,}006\,796$. $|E_M| \le \dfrac{|E_T|}{2} = \dfrac{e}{800} \approx 0{,}003\,398$.

c) Posons $K = 3e$ dans la formule 3 [comme à la sous-question b)].

$$|E_T| \le \frac{K(b-a)^3}{12n^2} \le 0{,}0001 \iff \frac{3e(2-1)^3}{12n^2} \le 10^{-4} \iff \frac{e}{4n^2} \le \frac{1}{10^4} \iff n^2 \ge \frac{10^4 e}{4} \iff n \ge 83.$$

Prenons $n = 83$ pour T_n. Pour E_M, posons encore $K = 3e$ dans la formule 3; nous obtenons $|E_M| \le 10^{-4} \iff n^2 \ge \dfrac{10^4 e}{8} \iff n \ge 59$. Prenons $n = 59$ pour M_n.

21. $f(x) = \sin x,\ \Delta x = \frac{\pi-0}{10} = \frac{\pi}{10}$

a) $T_{10} = \frac{\pi}{10\cdot 2}[f(0) + 2f(\frac{\pi}{10}) + 2f(\frac{2\pi}{10}) + \cdots + 2f(\frac{9\pi}{10}) + f(\pi)] \approx 1{,}983\,524$

$M_{10} = \frac{\pi}{10}[f(\frac{\pi}{20}) + f(\frac{3\pi}{20}) + f(\frac{5\pi}{20}) + \cdots + f(\frac{19\pi}{20})] \approx 2{,}008\,248$

$S_{10} = \frac{\pi}{10\cdot 3}[f(0) + 4f(\frac{\pi}{10}) + 2f(\frac{2\pi}{10}) + 4f(\frac{3\pi}{10}) + \cdots + 4f(\frac{9\pi}{10}) + f(\pi)] \approx 2{,}000\,110$

 © Groupe Modulo inc., 2013

Puisque $I = \int_0^{\pi} \sin x\, dx = [-\cos x]_0^{\pi} = 1 - (-1) = 2$, $E_T = I - T_{10} \approx 0{,}016\,476$, $E_M = I - M_{10} \approx -0{,}008\,248$

et $E_S = I - S_{10} \approx -0{,}000\,110$.

b) $f(x) = \sin x \Rightarrow |f^{(n)}(x)| \le 1$; donc, posons $K = 1$ pour toutes les évaluations des erreurs commises.

$$|E_T| \le \frac{K(b-a)^3}{12n^2} = \frac{1(\pi - 0)^3}{12(10)^2} = \frac{\pi^3}{1200} \approx 0{,}025\,839 \text{ . } |E_M| \le \frac{|E_T|}{2} = \frac{\pi^3}{2400} \approx 0{,}012\,919 \text{ .}$$

$$|E_S| \le \frac{K(b-a)^5}{180n^4} = \frac{1(\pi - 0)^5}{180(10)^4} = \frac{\pi^5}{1\,800\,000} \approx 0{,}000\,170 \text{ .}$$

L'erreur commise représente environ 64 % de la valeur estimée de l'erreur dans les trois cas.

c) $|E_T| \le 0{,}000\,01 \Leftrightarrow \frac{\pi^3}{12n^2} \le \frac{1}{10^5} \Leftrightarrow n^2 \ge \frac{10^5 \pi^3}{12} \Rightarrow n \ge 508{,}3$. Prenons $n = 509$ pour T_n.

$|E_M| \le 0{,}000\,01 \Leftrightarrow \frac{\pi^3}{24n^2} \le \frac{1}{10^5} \Leftrightarrow n^2 \ge \frac{10^5 \pi^3}{24} \Rightarrow n \ge 359{,}4$. Prenons $n = 360$ pour M_n.

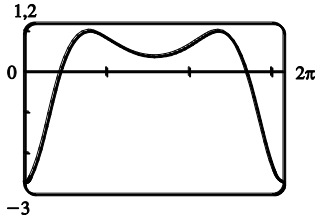
$|E_S| \le 0{,}000\,01 \Leftrightarrow \frac{\pi^5}{180n^4} \le \frac{1}{10^5} \Leftrightarrow n^4 \ge \frac{10^5 \pi^5}{180} \Rightarrow n \ge 20{,}3$.

Prenons $n = 22$ pour S_n (puisque n doit être pair).

22. Selon l'exemple 7 b), posons $K = 76e$; nous obtenons $|E_S| \le \frac{76e(1)^5}{180n^4} \le 0{,}000\,01 \Rightarrow n^4 \ge \frac{76e}{180(0{,}000\,01)} \Rightarrow n \ge 18{,}4$.

Prenons $n = 20$ (puisque n doit être pair).

23. a) À l'aide d'un logiciel de calcul symbolique, obtenons la dérivée de $f(x) = e^{\cos x}$ deux fois; nous trouvons que $f''(x) = e^{\cos x}(\sin^2 x - \cos x)$. Le graphique montre que la valeur maximum de $|f''(x)|$ se produit aux extrémités de l'intervalle $[0, 2\pi]$. Puisque $f''(0) = -e$, nous pouvons poser $K = e$ ou $K = 2{,}8$.



b) Un logiciel de calcul symbolique produit $M_{10} \approx 7{,}954\,926\,518$. (Avec le logiciel Maple, utilisez Student[Calculus1] [RiemannSum] ou Student[Calculus1][ApproximateInt].)

c) À l'aide de la formule 3 et de la méthode des milieux des sous-intervalles, avec $K = e$, nous obtenons

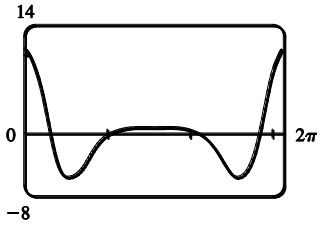
$|E_M| \le \frac{e(2\pi - 0)^3}{24 \cdot 10^2} \approx 0{,}280\,945\,995$. Avec $K = 2{,}8$, nous obtenons $|E_M| \le \frac{2{,}8(2\pi - 0)^3}{24 \cdot 10^2} = 0{,}289\,391\,916$.

d) Un logiciel de calcul symbolique produit $I \approx 7{,}954\,926\,521$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

e) L'erreur commiser n'est que d'environ 3×10^{-9}, ce qui est beaucoup moins que l'erreur calculée à la sous-question c).

f) Nous utilisons le logiciel de calcul symbolique pour obtenir la dérivée deux fois de plus, et traçons ensuite la courbe de $f^{(4)}(x) = e^{\cos x}(\sin^4 x - 6\sin^2 x \cos x + 3 - 7\sin^2 x + \cos x)$. Le graphique montre que la valeur maximum de $|f^{(4)}(x)|$ se produit aux extrémités de l'intervalle $[0, 2\pi]$. Puisque $f^{(4)}(0) = 4e$, nous pouvons utiliser $K = 4e$ ou $K = 10{,}9$.



g) Un logiciel de calcul symbolique produit $S_{10} \approx 7{,}953\,789\,422$. (Avec le logiciel Maple, utilisez Student[Calculus1][ApproximateInt].)

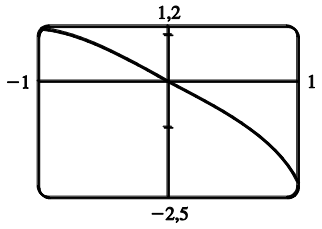
h) À l'aide de la formule 4, avec $K = 4e$, nous obtenons $|E_S| \le \dfrac{4e(2\pi - 0)^5}{180 \cdot 10^4} \approx 0{,}059\,153\,618$. Avec $K = 10{,}9$, nous obtenons $|E_S| \le \dfrac{10{,}9(2\pi - 0)^5}{180 \cdot 10^4} \approx 0{,}059\,299\,814$.

i) L'erreur commise est d'environ $7{,}954\,926\,521 - 7{,}953\,789\,422 \approx 0{,}001\,14$. Ceci est significativement inférieur à l'estimation obtenue à la sous-question h), quoique la différence est beaucoup moins grande que celle produite par la méthode des milieux des sous-intervalles.

j) Pour garantir que $|E_S| \le 0{,}000\,1$, utilisons la formule 4 :

$|E_S| \le \dfrac{4e(2\pi)^5}{180 \cdot n^4} \le 0{,}000\,1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{4e(2\pi)^5}{180 \cdot 0{,}000\,1} \le n^4 \quad \Rightarrow \quad n^4 \ge 5\,915\,362 \quad \Leftrightarrow \quad n \ge 49{,}3$. Nous devons donc prendre $n \ge 50$ pour garantir que $|I - S_n| \le 0{,}000\,1$. ($K = 10{,}9$ produit la même valeur de n.)

24. a) À l'aide d'un logiciel de calcul symbolique, obtenons la dérivée de $f(x) = \sqrt{4 - x^3}$ deux fois; nous obtenons $f''(x) = -\dfrac{9x^4}{4(4 - x^3)^{3/2}} - \dfrac{3x}{(4 - x^3)^{1/2}}$. Le graphique montre que $|f''(x)| < 2{,}2$ sur l'intervalle $[-1, 1]$.



b) Un logiciel de calcul symbolique produit $M_{10} \approx 3{,}995\,804\,152$. (Avec le logiciel Maple, utilisez Student[Calculus1][RiemannSum] ou Student[Calculus1] [ApproximateInt].)

 © Groupe Modulo inc., 2013

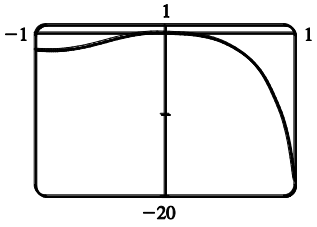
c) À l'aide de la formule 3 et de la méthode des milieux des sous-intervalles, avec $K = 2{,}2$, nous obtenons

$$|E_M| \le \frac{2{,}2[1-(-1)]^3}{24 \cdot 10^2} \approx 0{,}007\,33 .$$

d) Un logiciel de calcul symbolique produit $I \approx 3{,}995\,487\,677$.

e) L'erreur commise est d'environ −0,000 316 5, ce qui est beaucoup moins que l'erreur calculée à la sous-question c).

f) Nous utilisons le logiciel de calcul symbolique pour obtenir la dérivée deux fois de plus, et traçons ensuite la courbe de $f^{(4)}(x) = \frac{9}{16}\frac{x^2(x^6 - 224x^3 - 1280)}{(4-x^3)^{7/2}}$. Le graphique montre que $|f^{(4)}(x)| < 18{,}1$ sur l'intervalle $[-1, 1]$.



g) Un logiciel de calcul symbolique produit $S_{10} \approx 3{,}995\,449\,790$. (Avec le logiciel Maple, utilisez Student [Calculus1] [ApproximateInt].)

h) À l'aide de la formule 4, avec $K = 18{,}1$, nous obtenons $|E_S| \le \frac{18{,}1[1-(-1)]^5}{180 \cdot 10^4} \approx 0{,}000\,322$.

i) L'erreur commise est d'environ 3,995 487 677 – 3,995 449 790 ≈ 0,000 037 9. Ceci est significativement plus petit que l'estimation obtenue à la sous-question h).

j) Pour garantir que $|E_S| \le 0{,}000\,1$, utilisons la formule 4 :

$|E_S| \le \frac{18{,}1(2)^5}{180 \cdot n^4} \le 0{,}000\,1 \;\Rightarrow\; \frac{18{,}1(2)^5}{180 \cdot 0{,}000\,1} \le n^4 \;\Rightarrow\; n^4 \ge 32\,178 \;\Rightarrow\; n \ge 13{,}4$. Nous devons donc prendre $n \ge 14$ pour garantir que $|I - S_n| \le 0{,}000\,1$.

25. $I = \int_0^1 xe^x dx = [(x-1)e^x]_0^1$ [intégration par parties ou formule 96] = 0− (−1) = 1, $f(x) = xe^x$, $\Delta x = 1/n$

$n = 5$:

$$G_5 = \tfrac{1}{5}[f(0) + f(0{,}2) + f(0{,}4) + f(0{,}6) + f(0{,}8)] \approx 0{,}742\,943$$
$$D_5 = \tfrac{1}{5}[f(0{,}2) + f(0{,}4) + f(0{,}6) + f(0{,}8) + f(1)] \approx 1{,}286\,599$$
$$T_5 = \tfrac{1}{5\cdot 2}[f(0) + 2f(0{,}2) + 2f(0{,}4) + 2f(0{,}6) + 2f(0{,}8) + f(1)] \approx 1{,}014\,771$$
$$M_5 = \tfrac{1}{5}[f(0{,}1) + f(0{,}3) + f(0{,}5) + f(0{,}7) + f(0{,}9)] \approx 0{,}992\,621$$

$$E_G = I - G_5 \approx 1 - 0{,}742\,943 = 0{,}257\,057$$
$$E_D \approx 1 - 1{,}286\,599 = -0{,}286\,599$$
$$E_T \approx 1 - 1{,}014\,771 = -0{,}014\,771$$
$$E_M \approx 1 - 0{,}992\,621 = 0{,}007\,379$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

$n = 10$:

$$G_{10} = \tfrac{1}{10}[f(0) + f(0{,}1) + f(0{,}2) + \cdots + f(0{,}9)] \approx 0{,}867\,782$$
$$D_{10} = \tfrac{1}{10}[f(0{,}1) + f(0{,}2) + \cdots + f(0{,}9) + f(1)] \approx 1{,}139\,610$$
$$T_{10} = \tfrac{1}{10 \cdot 2}\{f(0) + 2[f(0{,}1) + f(0{,}2) + \cdots + f(0{,}9)] + f(1)\} \approx 1{,}003\,696$$
$$M_{10} = \tfrac{1}{10}[f(0{,}05) + f(0{,}15) + \cdots + f(0{,}85) + f(0{,}95)] \approx 0{,}998\,152$$

$$E_G = I - G_{10} \approx 1 - 0{,}867\,782 = 0{,}132\,218$$
$$E_D \approx 1 - 1{,}139\,610 = -0{,}139\,610$$
$$E_T \approx 1 - 1{,}003\,696 = -0{,}003\,696$$
$$E_M \approx 1 - 0{,}998\,152 = 0{,}001\,848$$

$n = 20$:

$$G_{20} = \tfrac{1}{20}[f(0) + f(0{,}05) + f(0{,}10) + \cdots + f(0{,}95)] \approx 0{,}932\,967$$
$$D_{20} = \tfrac{1}{20}[f(0{,}05) + f(0{,}10) + \cdots + f(0{,}95) + f(1)] \approx 1{,}068\,881$$
$$T_{20} = \tfrac{1}{20 \cdot 2}\{f(0) + 2[f(0{,}05) + f(0{,}10) + \cdots + f(0{,}95)] + f(1)\} \approx 1{,}000\,924$$
$$M_{20} = \tfrac{1}{20}[f(0{,}025) + f(0{,}075) + f(0{,}125) + \cdots + f(0{,}975)] \approx 0{,}999\,538$$

$$E_G = I - G_{20} \approx 1 - 0{,}932\,967 = 0{,}067\,033$$
$$E_D \approx 1 - 1{,}068\,881 = -0{,}068\,881$$
$$E_T \approx 1 - 1{,}000\,924 = -0{,}000\,924$$
$$E_M \approx 1 - 0{,}999\,538 = 0{,}000\,462$$

n	G_n	D_n	T_n	M_n
5	0,742 943	1,286 599	1,014 771	0,992 621
10	0,867 782	1,139 610	1,003 696	0,998 152
20	0,932 967	1,068 881	1,000 924	0,999 538

n	E_G	E_D	E_T	E_M
5	0,257 057	−0,286 599	−0,014 771	0,007 379
10	0,132 218	−0,139 610	−0,003 696	0,001 848
20	0,067 033	−0,068 881	−0,000 924	0,000 462

Observations :

1. Les signes de E_G et de E_D sont toujours opposés, de même que ceux de E_T et de E_M.
2. Lorsque n est doublé, E_G et E_D diminuent d'un facteur d'environ 2, et E_T et E_M diminuent d'un facteur d'environ 4.
3. L'approximation par la méthode des milieux des sous-intervalles est environ deux fois plus juste que l'approximation par la méthode des trapèzes.
4. Toutes les approximations deviennent augmentant en qualité à mesure que la valeur de n augmente.
5. L'approximation par la méthode des milieux des sous-intervalles et l'approximation par la méthode des trapèzes sont beaucoup plus justes que les approximations au moyen des extrémités.

 © Groupe Modulo inc., 2013

26. $I = \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $\Delta x = \frac{1}{n}$

$n = 5$:

$$G_5 = \tfrac{1}{5}[f(1) + f(1{,}2) + f(1{,}4) + f(1{,}6) + f(1{,}8)] \approx 0{,}580\,783$$
$$D_5 = \tfrac{1}{5}[f(1{,}2) + f(1{,}4) + f(1{,}6) + f(1{,}8) + f(2)] \approx 0{,}430\,783$$
$$T_5 = \tfrac{1}{5\cdot 2}[f(1) + 2f(1{,}2) + 2f(1{,}4) + 2f(1{,}6) + 2f(1{,}8) + f(2)] \approx 0{,}505\,783$$
$$M_5 = \tfrac{1}{5}[f(1{,}1) + f(1{,}3) + f(1{,}5) + f(1{,}7) + f(1{,}9)] \approx 0{,}497\,127$$

$$E_G = I - G_5 \approx \tfrac{1}{2} - 0{,}580\,783 = -0{,}080\,783$$
$$E_D \approx \tfrac{1}{2} - 0{,}430\,783 = 0{,}069\,217$$
$$E_T \approx \tfrac{1}{2} - 0{,}505\,783 = -0{,}005\,783$$
$$E_M \approx \tfrac{1}{2} - 0{,}497\,127 = 0{,}002\,873$$

$n = 10$:

$$G_{10} = \tfrac{1}{10}[f(1) + f(1{,}1) + f(1{,}2) + \cdots + f(1{,}9)] \approx 0{,}538\,955$$
$$D_{10} = \tfrac{1}{10}[f(1{,}1) + f(1{,}2) + \cdots + f(1{,}9) + f(2)] \approx 0{,}463\,955$$
$$T_{10} = \tfrac{1}{10\cdot 2}\{f(1) + 2[f(1{,}1) + f(1{,}2) + \cdots + f(1{,}9)] + f(2)\} \approx 0{,}501\,455$$
$$M_{10} = \tfrac{1}{10}[f(1{,}05) + f(1{,}15) + \cdots + f(1{,}85) + f(1{,}95)] \approx 0{,}499\,274$$

$$E_G = I - G_{10} \approx \tfrac{1}{2} - 0{,}538\,955 = -0{,}038\,955$$
$$E_D \approx \tfrac{1}{2} - 0{,}463\,955 = 0{,}036\,049$$
$$E_T \approx \tfrac{1}{2} - 0{,}501\,455 = -0{,}001\,455$$
$$E_M \approx \tfrac{1}{2} - 0{,}499\,274 = 0{,}000\,726$$

$n = 20$:

$$G_{20} = \tfrac{1}{20}[f(1) + f(1{,}05) + f(1{,}10) + \cdots + f(1{,}95)] \approx 0{,}519\,114$$
$$D_{20} = \tfrac{1}{20}[f(1{,}05) + f(1{,}10) + \cdots + f(1{,}95) + f(2)] \approx 0{,}481\,614$$
$$T_{20} = \tfrac{1}{20\cdot 2}\{f(1) + 2[f(1{,}05) + f(1{,}10) + \cdots + f(1{,}95)] + f(2)\} \approx 0{,}500\,364$$
$$M_{20} = \tfrac{1}{20}[f(1{,}025) + f(1{,}075) + f(1{,}125) + \cdots + f(1{,}975)] \approx 0{,}499\,818$$

$$E_G = I - G_{20} \approx \tfrac{1}{2} - 0{,}519\,114 = -0{,}019\,114$$
$$E_D \approx \tfrac{1}{2} - 0{,}481\,614 = 0{,}018\,386$$
$$E_T \approx \tfrac{1}{2} - 0{,}500\,364 = -0{,}000\,364$$
$$E_M \approx \tfrac{1}{2} - 0{,}499\,818 = 0{,}000\,182$$

n	G_n	D_n	T_n	M_n
5	0,580 783	0,430 783	0,505 783	0,497 127
10	0,538 955	0,463 955	0,501 455	0,499 274
20	0,519 114	0,481 614	0,500 364	0,499 818

 © Groupe Modulo inc., 2013

n	E_G	E_D	E_T	E_M
5	−0,080 783	0,069 217	−0,005 783	0,002 873
10	−0,038 955	0,036 049	−0,001 455	0,000 726
20	−0,019 114	0,018 386	−0,000 364	0,000 182

Observations :

1. Les signes de E_G et de E_D sont toujours opposés, de même que ceux de E_T et de E_M.
2. Lorsque n est doublé, E_G et E_D diminuent d'un facteur d'environ 2, et E_T et E_M diminuent d'un facteur d'environ 4.
3. L'approximation par la méthode des milieux des sous-intervalles est environ deux fois plus juste que l'approximation par la méthode des trapèzes.
4. Toutes les approximations augmentent en qualité à mesure que la valeur de n augmente.
5. L'approximation par la méthode des milieux des sous-intervalles et l'approximation par la méthode des trapèzes sont beaucoup plus justes que les approximations au moyen des extrémités.

27. $I = \int_0^2 x^4 dx = [\frac{1}{5}x^5]_0^2 = \frac{32}{5} - 0 = 6,4\ , f(x) = x^4,\ \Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$

$n = 6$:

$$T_6 = \tfrac{2}{6\cdot 2}\{f(0) + 2[f(\tfrac{1}{3}) + f(\tfrac{2}{3}) + f(\tfrac{3}{3}) + f(\tfrac{4}{3}) + f(\tfrac{5}{3})] + f(2)\} \approx 6,695\,473$$
$$M_6 = \tfrac{2}{6}[f(\tfrac{1}{6}) + f(\tfrac{3}{6}) + f(\tfrac{5}{6}) + f(\tfrac{7}{6}) + f(\tfrac{9}{6}) + f(\tfrac{11}{6})] \approx 6,252\,572$$
$$S_6 = \tfrac{2}{6\cdot 3}[f(0) + 4f(\tfrac{1}{3}) + 2f(\tfrac{2}{3}) + 4f(\tfrac{3}{3}) + 2f(\tfrac{4}{3}) + 4f(\tfrac{5}{3}) + f(2)] \approx 6,403\,292$$

$$E_T = I - T_6 \approx 6,4 - 6,695\,473 = -0,295\,473$$
$$E_M \approx 6,4 - 6,252\,572 = 0,147\,428$$
$$E_S \approx 6,4 - 6,403\,292 = -0,003\,292$$

$n = 12$:

$$T_{12} = \tfrac{2}{12\cdot 2}\{f(0) + 2[f(\tfrac{1}{6}) + f(\tfrac{2}{6}) + f(\tfrac{3}{6}) + \cdots + f(\tfrac{11}{6})] + f(2)\} \approx 6,474\,023$$
$$M_6 = \tfrac{2}{12}[f(\tfrac{1}{12}) + f(\tfrac{3}{12}) + f(\tfrac{5}{12}) + \cdots + f(\tfrac{23}{12})] \approx 6,363\,008$$
$$S_6 = \tfrac{2}{12\cdot 3}[f(0) + 4f(\tfrac{1}{6}) + 2f(\tfrac{2}{6}) + 4f(\tfrac{3}{6}) + 2f(\tfrac{4}{6}) + \cdots + 4f(\tfrac{11}{6}) + f(2)] \approx 6,400\,206$$

$$E_T = I - T_{12} \approx 6,4 - 6,474\,023 = -0,074\,023$$
$$E_M \approx 6,4 - 6,363\,008 = 0,036\,992$$
$$E_S \approx 6,4 - 6,400\,206 = -0,000\,206$$

n	T_n	M_n	S_n
6	6,695 473	6,252 572	6,403 292
12	6,474 023	6,363 008	6,400 206

 © Groupe Modulo inc., 2013

n	E_T	E_M	E_S
6	−0.295 473	0.147 428	−0.003 292
12	−0.074 023	0.036 992	−0.000 206

Observations :

1. Les signes de E_L et de E_R sont opposés. Lorsque n est doublé, E_T et E_M diminuent d'un facteur d'environ 4.
2. L'approximation par la méthode de Simpson est beaucoup plus juste que l'approximation par la méthode des milieux des sous-intervalles et l'approximation par la méthode des trapèzes. Lorsque n est doublé, E_S semble diminuer d'un facteur d'environ 16.

28. $I = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\sqrt{x}\right]_1^4 = 4 - 2 = 2$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $\Delta x = \frac{4-1}{n} = \frac{3}{n}$

$n = 6$:

$$T_6 = \tfrac{3}{6\cdot 2}\{f(1) + 2[f(\tfrac{3}{2}) + f(\tfrac{4}{2}) + f(\tfrac{5}{2}) + f(\tfrac{6}{2}) + f(\tfrac{7}{2})] + f(4)\} \approx 2{,}008\,966$$
$$M_6 = \tfrac{3}{6}[f(\tfrac{5}{4}) + f(\tfrac{7}{4}) + f(\tfrac{9}{4}) + f(\tfrac{11}{4}) + f(\tfrac{13}{4}) + f(\tfrac{15}{4})] \approx 1{,}995\,572$$
$$S_6 = \tfrac{3}{6\cdot 3}[f(1) + 4f(\tfrac{3}{2}) + 2f(\tfrac{4}{2}) + 4f(\tfrac{5}{2}) + 2f(\tfrac{6}{2}) + 4f(\tfrac{7}{2}) + f(4)] \approx 2{,}000\,469$$

$$E_T = I - T_6 \approx 2 - 2{,}008\,966 = -0{,}008\,966,$$
$$E_M \approx 2 - 1{,}995\,572 = 0{,}004\,428,$$
$$E_S \approx 2 - 2{,}000\,469 = -0{,}000\,469$$

$n = 12$:

$$T_{12} = \tfrac{3}{12\cdot 2}\{f(1) + 2[f(\tfrac{5}{4}) + f(\tfrac{6}{4}) + f(\tfrac{7}{4}) + \cdots + f(\tfrac{15}{4})] + f(4)\} \approx 2{,}002\,269$$
$$M_{12} = \tfrac{3}{12}[f(\tfrac{9}{8}) + f(\tfrac{11}{8}) + f(\tfrac{13}{8}) + \cdots + f(\tfrac{31}{8})] \approx 1{,}998\,869$$
$$S_{12} = \tfrac{3}{12\cdot 3}[f(1) + 4f(\tfrac{5}{4}) + 2f(\tfrac{6}{4}) + 4f(\tfrac{7}{4}) + 2f(\tfrac{8}{4}) + \cdots + 4f(\tfrac{15}{4}) + f(4)] \approx 2{,}000\,036$$

$$E_T = I - T_{12} \approx 2 - 2{,}002\,269 = -0{,}002\,269$$
$$E_M \approx 2 - 1{,}998\,869 = 0{,}001\,131$$
$$E_S \approx 2 - 2{,}000\,036 = -0{,}000\,036$$

n	T_n	M_n	S_n
6	2,008 966	1,995 572	2,000 469
12	2,002 269	1,998 869	2,000 036

n	E_T	E_M	E_S
6	−0,008 966	0,004 428	−0,000 469
12	−0,002 269	0,001 131	−0,000 036

Observations :

1. Les signes de E_L et de E_R sont opposés. Lorsque n est doublé, E_T et E_M diminuent d'un facteur d'environ 4.

 © Groupe Modulo inc., 2013

2. L'approximation par la méthode de Simpson est beaucoup plus juste que l'approximation par la méthode des milieux des sous-intervalles et l'approximation par la méthode des trapèzes. Lorsque n est doublé, E_S semble diminuer d'un facteur d'environ 16.

29. $\Delta x = (b-a)/n = (6-0)/6 = 1$

a) $T_6 = \frac{\Delta x}{2}[f(0) + 2f(1) + 2f(2) + 2f(3) + 2f(4) + 2f(5) + f(6)]$
$\approx \frac{1}{2}[3 + 2(5) + 2(4) + 2(2) + 2(2{,}8) + 2(4) + 1]$
$= \frac{1}{2}(39{,}6) = 19{,}8$

b) $M_6 = \Delta x[f(0{,}5) + f(1{,}5) + f(2{,}5) + f(3{,}5) + f(4{,}5) + f(5{,}5)]$
$\approx 1[4{,}5 + 4{,}7 + 2{,}6 + 2{,}2 + 3{,}4 + 3{,}2]$
$= 20{,}6$

c) $S_6 = \frac{\Delta x}{3}[f(0) + 4f(1) + 2f(2) + 4f(3) + 2f(4) + 4f(5) + f(6)]$
$\approx \frac{1}{3}[3 + 4(5) + 2(4) + 4(2) + 2(2{,}8) + 4(4) + 1]$
$= \frac{1}{3}(61{,}6) = 20{,}5\overline{3}$

30. Soit x, la distance à partir de l'extrémité gauche de la piscine et $w = w(x)$, la largeur en x, alors la méthode de Simpson avec $n = 8$ et $\Delta x = 2$ produit $\text{Aire} = \int_0^{16} w\,dx \approx \frac{2}{3}[0 + 4(6{,}2) + 2(7{,}2) + 4(6{,}8) + 2(5{,}6) + 4(5{,}0) + 2(4{,}8) + 4(4{,}8) + 0] \approx 84\ \text{m}^2$.

31. a) $\int_1^5 f(x)dx \approx M_4 = \frac{5-1}{4}[f(1{,}5) + f(2{,}5) + f(3{,}5) + f(4{,}5)] = 1(2{,}9 + 3{,}6 + 4{,}0 + 3{,}9) = 14{,}4$

b) $-2 \le f''(x) \le 3 \Rightarrow |f''(x)| \le 3 \Rightarrow K = 3$, puisque $|f''(x)| \le K$. L'erreur commise sur l'approximation calculée au moyen de la méthode des milieux des sous-intervalles est $|E_M| \le \dfrac{K(b-a)^3}{24n^2} = \dfrac{3(5-1)^3}{24(4)^2} = \dfrac{1}{2}$.

32. a) $\int_0^{1{,}6} g(x)dx \approx S_8 = \frac{1{,}6-0}{8\cdot 3}[g(0) + 4g(0{,}2) + 2g(0{,}4) + 4g(0{,}6) + 2g(0{,}8) + 4g(1{,}0) + 2g(1{,}2) + 4g(1{,}4) + g(1{,}6)]$
$= \frac{1}{15}[12{,}1 + 4(11{,}6) + 2(11{,}3) + 4(11{,}1) + 2(11{,}7) + 4(12{,}2) + 2(12{,}6) + 4(13{,}0) + 13{,}2]$
$= \frac{1}{15}(288{,}1) = \frac{2881}{150} \approx 19{,}2$

b) $-5 \le g^{(4)}(x) \le 2 \Rightarrow |g^{(4)}(x)| \le 5 \Rightarrow K = 5$, puisque $|g^{(4)}(x)| \le K$. L'erreur commise sur l'approximation calculée au moyen de la méthode de Simpson est $|E_S| \le \dfrac{K(b-a)^5}{180n^4} = \dfrac{5(1{,}6-0)^5}{180(8)^4} = \dfrac{2}{28\,125} = 7{,}\overline{1} \times 10^{-5}$

33. $T_{moy} = \frac{1}{24-0}\int_0^{24} T(t)dt \approx \frac{1}{24}S_{12} = \frac{1}{24}\frac{24-0}{3(12)}[T(0) + 4T(2) + 2T(4) + 4T(6) + 2T(8) + 4T(10) + 2T(12) + 4T(14)$
$+ 2T(16) + 4T(18) + 2T(20) + 4T(22) + T(24)]$
$\approx \frac{1}{36}[19{,}5 + 4(18) + 2(16) + 4(14{,}5) + 2(13) + 4(16) + 2(17{,}5) + 4(20) + 2(21{,}5) + 4(20{,}5) + 2(19{,}5) + 4(19) + 18]$
$= \frac{1}{36}(644{,}5) = 17{,}9\ °C.$
La température moyenne était d'environ 17,9 °C.

34. Utilisons la méthode de Simpson avec $n = 10$ et $\Delta x = \frac{1}{2}$:

 © Groupe Modulo inc., 2013

$$\begin{aligned}\text{distance} &= \int_0^5 v(t)dt \approx S_{10} = \tfrac{1}{2\cdot 3}[f(0) + 4f(0{,}5) + 2f(1) + \cdots + 4f(4{,}5) + f(5)] \\ &= \tfrac{1}{6}[0 + 4(4{,}67) + 2(7{,}34) + 4(8{,}86) + 2(9{,}73) + 4(10{,}22) + 2(10{,}51) + 4(10{,}67) + 2(10{,}76) + 4(10{,}81) + 10{,}81] \\ &= \tfrac{1}{6}(268{,}41) = 44{,}735 \text{ m}\end{aligned}$$

35. Selon le théorème de la variation nette, l'augmentation de la vitesse est égale à $\int_0^6 a(t)\,dt$. Utilisons la méthode de Simpson avec n = 6 et $\Delta t = (6 - 0)/6 = 1$ pour évaluer cette intégrale :

$$\begin{aligned}\int_0^6 a(t)\,dt &\approx S_6 = \tfrac{1}{3}[a(0) + 4a(1) + 2a(2) + 4a(3) + 2a(4) + 4a(5) + a(6)] \\ &\approx \tfrac{1}{3}[0 + 4(0{,}5) + 2(4{,}1) + 4(9{,}8) + 2(12{,}9) + 4(9{,}5) + 0] = \tfrac{1}{3}(113{,}2) = 37{,}7\overline{3} \text{ m/s}\end{aligned}$$

36. Selon le théorème de la variation nette, la quantité totale d'eau qui s'écoule du réservoir durant les six premières heures est égale à $\int_0^6 r(t)dt$. Utilisons la méthode de Simpson avec n = 6 et $\Delta t = \frac{6-0}{6} = 1$ pour évaluer cette intégrale :

$$\begin{aligned}\int_0^6 r(t)\,dt &\approx S_6 = \tfrac{1}{3}[r(0) + 4r(1) + 2r(2) + 4r(3) + 2r(4) + 4r(5) + r(6)] \\ &\approx \tfrac{1}{3}[4 + 4(3) + 2(2{,}4) + 4(1{,}9) + 2(1{,}4) + 4(1{,}1) + 1] = \tfrac{1}{3}(36{,}6) = 12{,}2 \text{ litres}\end{aligned}$$

37. Selon le théorème de la variation nette, la quantité totale d'énergie consommée est égale à $\int_0^6 P(t)\,dt$. Utilisons la méthode de Simpson avec n = 12 et $\Delta t = \frac{6-0}{12} = \frac{1}{2}$ pour évaluer cette intégrale :

$$\begin{aligned}\int_0^6 P(t)\,dt &\approx S_{12} = \tfrac{1/2}{3}[P(0) + 4P(0{,}5) + 2P(1) + 4P(1{,}5) + 2P(2) + 4P(2{,}5) + 2P(3) \\ &\quad + 4P(3{,}5) + 2P(4) + 4P(4{,}5) + 2P(5) + 4P(5{,}5) + P(6)] \\ &= \tfrac{1}{6}[1814 + 4(1735) + 2(1686) + 4(1646) + 2(1637) + 4(1609) + 2(1604) \\ &\quad + 4(1611) + 2(1621) + 4(1666) + 2(1745) + 4(1886) + 2052] \\ &= \tfrac{1}{6}(61\,064) = 10\,177{,}\overline{3} \text{ megawattheures}\end{aligned}$$

38. Selon le théorème de la variation nette, la quantité totale de données transmises est égale à $\int_0^8 D(t)\,dt \times 3600$ [puisque $D(t)$ est exprimé en mégabits par seconde et que t est en heures]. Utilisons la méthode de Simpson avec n = 8 et $\Delta t = (8 - 0)/8 = 1$ pour évaluer cette intégrale :

$$\begin{aligned}\int_0^8 D(t)dt &\approx S_8 = \tfrac{1}{3}[D(0) + 4D(1) + 2D(2) + 4D(3) + 2D(4) + 4D(5) + 2D(6) + 4D(7) + D(8)] \\ &\approx \tfrac{1}{3}[0{,}35 + 4(0{,}32) + 2(0{,}41) + 4(0{,}50) + 2(0{,}51) + 4(0{,}56) + 2(0{,}56) + 4(0{,}83) + 0{,}88] \\ &= \tfrac{1}{3}(13{,}03) = 4{,}34\overline{3}\end{aligned}$$

Multiplions maintenant par 3600, ce qui donne 15 636 mégabits.

39. a) Considérons que $y = f(x)$ représente la courbe. À l'aide de disques, $V = \int_2^{10} \pi[f(x)]^2 dx = \pi \int_2^{10} g(x)\,dx = \pi I_1$. Utilisons maintenant la méthode de Simpson pour calculer une approximation de I_1 :

 © Groupe Modulo inc., 2013

$$\begin{aligned} I_1 \approx S_8 &= \tfrac{10-2}{3(8)}[g(2)+4g(3)+2g(4)+4g(5)+2g(6)+4g(7)+g(8)] \\ &\approx \tfrac{1}{3}[0^2+4(1,5)^2+2(1,9)^2+4(2,2)^2+2(3,0)^2+4(3,8)^2+2(4,0)^2+4(3,1)^2+0^2] \\ &= \tfrac{1}{3}(181,78) \end{aligned}$$

Par conséquent, $V \approx \pi \cdot \frac{1}{3}(181,78) \approx 190,4$ ou 190 unités cubes.

b) Au moyen de coquilles cylindriques, $V = \int_2^{10} 2\pi x f(x)\,dx = 2\pi \int_2^{10} xf(x)\,dx = 2\pi I_1$. Utilisons maintenant la méthode de Simpson pour calculer une approximation de I_1 :

$$\begin{aligned} I_1 \approx S_8 &= \tfrac{10-2}{3(8)}[2f(2)+4\cdot 3f(3)+2\cdot 4f(4)+4\cdot 5f(5)+2\cdot 6f(6)+\ 4\cdot 7f(7)+2\cdot 8f(8)+4\cdot 9f(9)+10f(10)] \\ &\approx \tfrac{1}{3}[2(0)+12(1,5)+8(1,9)+20(2,2)+12(3,0)+28(3,8)+16(4,0)+36(3,1)+10(0)] \\ &= \tfrac{1}{3}(395,2) \end{aligned}$$

Par conséquent, $V \approx 2\pi \cdot \frac{1}{3}(395,2) \approx 827,7$ ou 828 unités cubes.

40. $\text{Travail} = \int_0^{18} f(x)dx \approx S_6 = \tfrac{18-0}{6\cdot 3}[f(0)+4f(3)+2f(6)+4f(9)+2f(12)+4f(15)+f(18)$
$= 1\cdot[9,8+4(9,1)+2(8,5)+4(8,0)+2(7,7)+4(7,5)+7,4] = 148$ joules

41. Au moyen de disques, $V = \int_1^5 \pi(e^{-1/x})^2\,dx = \pi\int_1^5 e^{-2/x}dx = \pi I_1$. Utilisons maintenant la méthode de Simpson avec $f(x) = e^{-2/x}$ pour calculer une approximation de I_1.

$I_1 \approx S_8 = \tfrac{5-1}{3(8)}[f(1)+4f(1,5)+2f(2)+4f(2,5)+2f(3)+4f(3,5)+2f(4)+4f(4,5)+f(5)] \approx \tfrac{1}{6}(11,4566)$ Par conséquent, $V \approx \pi \cdot \frac{1}{6}(11,4566) \approx 6,0$ unités cubiques.

42. Au moyen de la méthode de Simpson, avec $n = 10$, $\Delta x = \frac{\pi/2}{10}$, $L = 1$, $\theta_0 = \frac{42\pi}{180}$ radians, $g = 9,8$ m/s^2, $k^2 = \sin^2\left(\frac{1}{2}\theta_0\right)$ et $f(x) = 1/\sqrt{1-k^2\sin^2 x}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} T &= 4\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} \approx 4\sqrt{\frac{L}{g}}S_{10} \\ &= 4\sqrt{\tfrac{1}{9,8}}\left(\tfrac{\pi/2}{10\cdot 3}\right)\left[f(0)+4f\left(\tfrac{\pi}{20}\right)+2f\left(\tfrac{2\pi}{20}\right)+\cdots+4f\left(\tfrac{9\pi}{20}\right)+f\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\right] \approx 2,076\,65 \end{aligned}$$

43. $I(\theta) = \dfrac{N^2\sin^2 k}{k^2}$, où $k = \dfrac{\pi Nd\sin\theta}{\lambda}$, $N = 10\,000$, $d = 10^{-4}$ et $\lambda = 632,8\times 10^{-9}$. Donc, $I(\theta) = \dfrac{(10^4)^2\sin^2 k}{k^2}$, où $k = \dfrac{\pi(10^4)(10^{-4})\sin\theta}{632,8\times 10^{-9}}$.

Or, $n = 10$ et $\Delta\theta = \dfrac{10^{-6}-(-10^{-6})}{10} = 2\times 10^{-7}$, donc $M_{10} = 2\times 10^{-7}[I(-0,000\,000\,9)+I(-0,000\,000\,7)+\cdots+I(0,000\,000\,9)] \approx 59,4$.

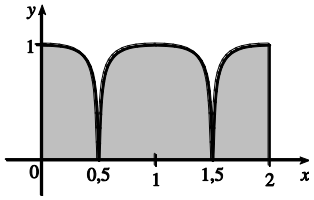
44. $f(x) = \cos(\pi x),\ \Delta x = \frac{20-0}{10} = 2 \quad \Rightarrow$

$$\begin{aligned} T_{10} &= \tfrac{2}{2}\{f(0)+2[f(2)+f(4)+\cdots+f(18)]+f(20)\} = 1[\cos 0+2(\cos 2\pi+\cos 4\pi+\cdots+\cos 18\pi)+\cos 20\pi] \\ &= 1+2(1+1+1+1+1+1+1+1+1)+1 = 20 \end{aligned}$$

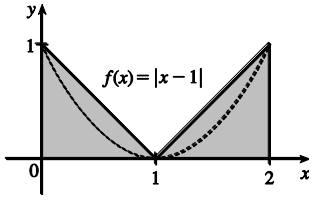
 © Groupe Modulo inc., 2013

La valeur exacte est $\int_0^{20} \cos(\pi x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\sin \pi x\right]_0^{20} = \frac{1}{\pi}(\sin 20\pi - \sin 0) = 0$. L'écart vient du fait que l'échantillonnage de la fonction n'est effectué qu'aux points de la forme $2n$, où sa valeur est $f(2n) = \cos(2n\pi) = 1$.

45. Selon le graphique de f, l'aire donnée par $\int_0^2 f(x)\,dx$ est presque 2. La méthode des trapèzes donne $T_2 = \frac{2-0}{2 \cdot 2}[f(0) + 2f(1) + f(2)] = \frac{1}{2}[1 + 2 \cdot 1 + 1] = 2$. La méthode des milieux des sous-intervalles donne $M_2 = \frac{2-0}{2}[f(0{,}5) + f(1{,}5)] = 1[0 + 0] = 0$. La méthode des trapèzes est donc meilleure.



46. Selon le graphique de f, $f(x) = |x - 1|$, $0 \le x \le 2$. L'aire donnée par $\int_0^2 f(x)dx$ est exactement 1. L'approximation à l'aide de l'extrémité droite des sous-intervalles produit le même résultat : $D_2 = f(1)\,\Delta x + f(2)\,\Delta x = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1$. La méthode de Simpson utilise cependant la parabole $y = (x - 1)^2$ (dont la courbe est hachurée) pour faire l'approximation de f et donne $S_2 = \frac{\Delta x}{3}[f(0) + 4f(1) + f(2)] = \frac{1}{3}[1 + 4 \cdot 0 + 1] = \frac{2}{3}$.



47. Puisque les approximations effectuées au moyen de la méthode des trapèzes et de la méthode des milieux des sous-intervalles sur l'intervalle $[a, b]$ sont les sommes des approximations effectuées au moyen de la méthode des trapèzes et de la méthode des milieux des sous-intervalles sur les sous-intervalles $[x_{i-1},\ x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, nous pouvons nous concentrer sur un tel intervalle. La condition $f''(x) < 0$ pour $a \le x \le b$ signifie que la courbe de f est concave vers le bas, tel qu'il est illustré à la figure 5. Dans cette figure, T_n est l'aire du trapèze $AQRD$, $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire de la région $AQPRD$, et M_n est l'aire du trapèze $ABCD$, donc $T_n < \int_a^b f(x)dx < M_n$. De façon générale, la condition $f'' < 0$ signifie que la courbe de f sur l'intervalle $[a, b]$ est située au-dessus de la corde qui relie les points $(a,\ f(a))$ et $(b,\ f(b))$. Par conséquent, $\int_a^b f(x)dx > T_n$. Puisque M_n est l'aire située sous une tangente à la courbe et puisque $f'' < 0$

 © Groupe Modulo inc., 2013

signifie que la tangente est située au-dessus de la courbe, nous avons également $M_n > \int_a^b f(x)dx$. Par conséquent, $T_n < \int_a^b f(x)dx < M_n$.

48. Soit f une fonction polynomiale de degré inférieure ou égale à 3; Soit $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$. Il sera suffisant de démontrer que la valeur calculée au moyen de la méthode de Simpson est exacte lorsqu'il y a deux sous-intervalles ($n = 2$). En effet, toute somme avec un nombre pair plus grand de sous-intervalles sera nécessairement exacte puisque de telles sommes sont composées de sommes exactes. Comme cela a été fait lors de la méthode de Simpson, nous pouvons considérer que $x_0 = -h$, $x_1 = 0$ et $x_2 = h$.

L'approximation calculée au moyen de la méthode de Simpson est donc

$$\begin{aligned}\int_{-h}^{h} f(x)dx &\approx \tfrac{1}{3}h[f(-h) + 4f(0) + f(h)] = \tfrac{1}{3}h[(-Ah^3 + Bh^2 - Ch + D) + 4D + (Ah^3 + Bh^2 + Ch + D)] \\ &= \tfrac{1}{3}h[2Bh^2 + 6D] = \tfrac{2}{3}Bh^3 + 2Dh\end{aligned}$$

Tandis que la valeur de l'intégrale est

$$\begin{aligned}\int_{-h}^{h} (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)dx &= 2\int_0^h (Bx^2 + D)dx \quad \text{[selon les théorèmes 1.7.7}a\text{) et b)]} \\ &= 2\left[\tfrac{1}{3}Bx^3 + Dx\right]_0^h = \tfrac{2}{3}Bh^3 + 2Dh\end{aligned}$$

Par conséquent, la méthode de Simpson donne la valeur de l'intégrale.

49. Nous savons que $T_n = \tfrac{1}{2}\Delta x[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$ et $M_n = \Delta x[f(\bar{x}_1) + f(\bar{x}_2) + \cdots + f(\bar{x}_{n-1}) + f(\bar{x}_n)]$, où $\bar{x}_i = \tfrac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$. De plus, $T_{2n} = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\Delta x\right)[f(x_0) + 2f(\bar{x}_1) + 2f(x_1) + 2f(\bar{x}_2) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(\bar{x}_{n-1}) + 2f(x_{n-1}) + 2f(\bar{x}_n) + f(x_n)]$.

Ainsi, le calcul de
$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(T_n + M_n) &= \tfrac{1}{2}T_n + \tfrac{1}{2}M_n \\ &= \tfrac{1}{4}\Delta x[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)] + \tfrac{1}{4}\Delta x[2f(\bar{x}_1) + 2f(\bar{x}_2) + \cdots + 2f(\bar{x}_{n-1}) + 2f(\bar{x}_n)] \\ &= T_{2n}\end{aligned}$$

50. $T_n = \dfrac{\Delta x}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]$ et $M_n = \Delta x\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i - \dfrac{\Delta x}{2}\right)$, donc

$$\tfrac{1}{3}T_n + \tfrac{2}{3}M_n = \tfrac{1}{3}(T_n + 2M_n) = \frac{\Delta x}{3\cdot 2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) + 4\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i - \frac{\Delta x}{2}\right)\right]$$

où $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. Soit $\delta x = \dfrac{b-a}{2n}$. Alors, $\Delta x = 2\delta x$, donc

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{3}T_n + \tfrac{2}{3}M_n &= \frac{\delta x}{3}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_i - \delta x)\right] \\ &= \tfrac{1}{3}\delta x[f(x_0) + 4f(x_1 - \delta x) + 2f(x_1) + 4f(x_2 - \delta x) \\ &\quad + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + 4f(x_n - \delta x) + f(x_n)]\end{aligned}$$

Puisque $x_0, x_1 - \delta x, x_1, x_2 - \delta x, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n - \delta x, x_n$ sont les extrémités des sous-intervalles de S_{2n}, et puisque $\delta x = \dfrac{b-a}{2n}$ est la largeur des sous-intervalles de S_{2n}, la dernière expression pour $\frac{1}{3}T_n + \frac{2}{3}M_n$ correspond à S_{2n}. Par conséquent, $\frac{1}{3}T_n + \frac{2}{3}M_n = S_{2n}$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

3.7 Les formes indéterminées et la règle de l'Hospital

Remarque: L'emploi de la règle de l'Hospital est représenté par un H placé au-dessus du signe d'égalité : $\overset{\text{H}}{=}$

1. a) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ est une indétermination du type $\dfrac{0}{0}$.

b) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{p(x)}=0$ puisque le numérateur tend vers 0 tandis que le dénominateur prend de très grandes valeurs.

c) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{h(x)}{p(x)}=0$ puisque le numérateur tend vers un certain nombre tandis que le dénominateur prend de très grandes valeurs.

d) Si $\lim\limits_{x\to a}p(x)=\infty$ et que $f(x)\to 0$ en prenant des valeurs positives, alors la limite n'existe pas mais, dans ce cas, on écrit $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{p(x)}{f(x)}=\infty$. [C'est le cas, par exemple si $a = 0$, $p(x) = 1/x^2$ et $f(x) = x^2$.] Si $f(x) \to 0$ en prenant des valeurs négatives, alors $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{p(x)}{f(x)}=-\infty$. [C'est le cas, par exemple, si $a = 0$, $p(x) = 1/x^2$ et $f(x) = -x^2$.] Si $f(x) \to 0$ en prenant à la fois des valeurs positives et des valeurs négatives, il est, dans ces cas, nécessaire de traiter les limites à gauche et à droite . [C'est le cas, par exemple, si $a = 0$, $p(x) = 1/x^2$ et $f(x) = x$.]

e) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{p(x)}{q(x)}$ est une indétermination du type $\dfrac{\infty}{\infty}$.

2. a) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)p(x)]$ est une indétermination du type $0\cdot\infty$.

b) Lorsque x est dans un voisinage de a, alors $p(x)$ est un grand nombre et $h(x)$ est dans un voisinage de 1, de sorte que $h(x)p(x)$ est nécessairement un grand nombre. Donc, $\lim\limits_{x\to a}[h(x)p(x)]=\infty$.

c) Lorsque x est dans un voisinage de a, alors $p(x)$ et $q(x)$ sont tous deux de grands nombres, à plus forte raison $p(x)q(x)$ est un grand nombre. Donc, $\lim\limits_{x\to a}[p(x)q(x)]=\infty$.

3. a) Lorsque x est dans un voisinage de a, alors $f(x)$ est dans un voisinage de 0 et $p(x)$ est un grand nombre, de sorte que $f(x) - p(x)$ est un nombre négatif, grand en valeur absolue. Donc, $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-p(x)]=-\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to a}[p(x)-q(x)]$ est une indétermination du type $\infty-\infty$.

c) Lorsque x est dans un voisinage de a, alors $p(x)$ et $q(x)$ sont tous deux de grands nombres, de sorte que $p(x) + q(x)$ est un grand nombre. Donc, $\lim\limits_{x\to a}[p(x)+q(x)]=\infty$.

4. a) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$ est une indétermination du type 0^0.

 © Groupe Modulo inc., 2013

b) Si $y = [f(x)]^{p(x)}$, alors $\ln y = p(x) \ln f(x)$. Lorsque x est dans un voisinage de a, alors $p(x) \to \infty$ et $\ln f(x) \to -\infty$, de sorte que $\ln y \to -\infty$. Donc, $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^{p(x)} = \lim\limits_{x\to a} y = \lim\limits_{x\to a} e^{\ln y} = 0$ à la condition que la fonction f^p soit définie.

c) $\lim\limits_{x\to a} [h(x)]^{p(x)}$ est une indétermination du type 1^∞.

d) $\lim\limits_{x\to a} [p(x)]^{f(x)}$ est une indétermination du type ∞^0.

(e) Si $y = [p(x)]^{q(x)}$, alors $\ln y = q(x) \ln p(x)$. Lorsque x est dans un voisinage de a, alors $q(x) \to \infty$ et $\ln p(x) \to \infty$, de sorte que $\ln y \to \infty$. Donc, $\lim\limits_{x\to a} [p(x)]^{q(x)} = \lim\limits_{x\to a} y = \lim\limits_{x\to a} e^{\ln y} = \infty$.

(f) $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[q(x)]{p(x)} = \lim\limits_{x\to a} [p(x)]^{1/q(x)}$ est une indétermination du type ∞^0.

5. Les courbes respectives de f et de g montrent que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 0$ et que $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 0$; donc la règle de l'Hospital s'applique :

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 2} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to 2} f'(x)}{\lim\limits_{x\to 2} g'(x)} = \frac{f'(2)}{g'(2)} = \frac{1{,}8}{4/5} = \frac{9}{4}$$

6. Les courbes respectives de f et de g montrent que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 0$ et que $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 0$; donc la règle de l'Hospital s'applique :

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 2} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to 2} f'(x)}{\lim\limits_{x\to 2} g'(x)} = \frac{f'(2)}{g'(2)} = \frac{1{,}5}{-1} = -\frac{3}{2}$$

7. La limite est une indétermination du type $\frac{0}{0}$. Il suffit d'effectuer une factorisation et une simplification pour évaluer la limite :

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2-x} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x} = \frac{1+1}{1} = 2$$

8. La limite est une indétermination du type $\frac{0}{0}$. Il suffit d'effectuer une factorisation et une simplification pour évaluer la limite :

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+3)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} (x+3) = 2+3 = 5$$

9. La limite est une indétermination du type $\frac{0}{0}$. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-2x^2+1}{x^3-1} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2-4x}{3x^2} = -\dfrac{1}{3}$

Remarque: On peut aussi effectuer une factorisation et une simplification pour évaluer la limite.

10. La limite est une indétermination du type $\frac{0}{0}$. $\lim\limits_{x\to 1/2} \dfrac{6x^2+5x-4}{4x^2+16x-9} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to 1/2} \dfrac{12x+5}{8x+16} = \dfrac{6+5}{4+16} = \dfrac{11}{20}$

Remarque: On peut aussi effectuer une factorisation et une simplification pour évaluer la limite.

 © Groupe Modulo inc., 2013

11. La limite est une indétermination du type $\frac{0}{0}$. $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^+}\dfrac{\cos x}{1-\sin x} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to(\pi/2)^+}\dfrac{-\sin x}{-\cos x} = \lim\limits_{x\to(\pi/2)^+}\tan x = -\infty$.

12. La limite est une indétermination du type $\frac{0}{0}$. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\tan 5x} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\cos 4x}{5\sec^2(5x)} = \dfrac{4(1)}{5(1)^2} = \dfrac{4}{5}$

13. La limite est une indétermination du type $\frac{0}{0}$. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^{2t}-1}{\sin t} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{2e^{2t}}{\cos t} = \dfrac{2(1)}{1} = 2$

14. La limite est une indétermination du type $\frac{0}{0}$. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)} = \dfrac{2}{1} = 2$

15. La limite est une indétermination du type $\frac{0}{0}$. $\lim\limits_{\theta\to\pi/2}\dfrac{1-\sin\theta}{1+\cos 2\theta} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{\theta\to\pi/2}\dfrac{-\cos\theta}{-2\sin 2\theta} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{\theta\to\pi/2}\dfrac{\sin\theta}{-4\cos 2\theta} = \dfrac{1}{4}$

16. $\lim\limits_{\theta\to\pi/2}\dfrac{1-\sin\theta}{\csc\theta} = \dfrac{0}{1} = 0$. La règle de l'Hospital ne s'applique pas.

17. La limite est une indétermination du type $\frac{\infty}{\infty}$. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1/x}{\frac{1}{2}x^{-1/2}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x}} = 0$

18. La limite est une indétermination du type $\frac{\infty}{\infty}$. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+x^2}{1-2x^2} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2x}{-4x} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{-4} = -\dfrac{1}{2}$. Toutefois, une méthode plus efficace consiste à diviser le numérateur et le dénominateur par x^2: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+x^2}{1-2x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x^2}-2} = \dfrac{0+1}{0-2} = -\dfrac{1}{2}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0^+}[(\ln x)/x] = -\infty$ puisque $\ln x \to -\infty$ lorsque $x \to 0^+$ et le fait de diviser le numérateur des valeurs positives de plus en plus petites de x ne fait qu'augmenter la valeur du quotient $(\ln x)/x$. La règle de l'Hospital ne s'applique pas.

20. La limite est une indétermination du type $\frac{\infty}{\infty}$. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\sqrt{x}}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}\ln x}{x^2} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} = \dfrac{\frac{1}{2x}}{2x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{4x^2} = 0$

21. La limite est une indétermination du type $\frac{0}{0}$. $\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t^8-1}{t^5-1} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{t\to 1}\dfrac{8t^7}{5t^4} = \dfrac{8}{5}\lim\limits_{t\to 1}t^3 = \dfrac{8}{5}(1) = \dfrac{8}{5}$

22. La limite est une indétermination du type $\frac{0}{0}$. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{8^t-5^t}{t} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{8^t\ln 8 - 5^t\ln 5}{1} = \ln 8 - \ln 5 = \ln\dfrac{8}{5}$

 © Groupe Modulo inc., 2013

23. La limite est une indétermination du type $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-4x}}{x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(1+2x)^{-1/2}\cdot 2-\frac{1}{2}(1-4x)^{-1/2}(-4)}{1}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{1+2x}}+\frac{2}{\sqrt{1-4x}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{2}{\sqrt{1}}=3$$

24. La limite est une indétermination du type $\frac{\infty}{\infty}$. $\lim_{u\to\infty}\frac{e^{u/10}}{u^3} \overset{\text{H}}{=} \lim_{u\to\infty}\frac{e^{u/10}\cdot\frac{1}{10}}{3u^2} \overset{\text{H}}{=} \frac{1}{30}\lim_{u\to\infty}\frac{e^{u/10}\cdot\frac{1}{10}}{2u} \overset{\text{H}}{=} \frac{1}{600}\lim_{u\to\infty}\frac{e^{u/10}\cdot\frac{1}{10}}{1}=\frac{1}{6000}\lim_{u\to\infty}e^{u/10}=\infty$

25. La limite est une indétermination du type $\frac{0}{0}$. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}$

26. La limite est une indétermination du type $\frac{0}{0}$. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{6x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{6}=-\frac{1}{6}$

27. La limite est une indétermination du type $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x-\tan x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\sec^2 x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-(-\sin x)}{-2\sec x(\sec x\tan x)}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)}{\sec^2 x}$$
$$=-\tfrac{1}{2}\lim_{x\to 0}\cos^3 x=-\tfrac{1}{2}(1)^3=-\tfrac{1}{2}$$

Il existe une autre solution qui consiste à récrire la limite sous la forme $\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1-\frac{\tan x}{x}}$.

28. La limite est une indétermination du type $\frac{0}{0}$. $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1/\sqrt{1-x^2}}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{1}=1$

29. La limite est une indétermination du type $\frac{\infty}{\infty}$. $\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^2}{x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{2(\ln x)(1/x)}{1}=2\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} \overset{\text{H}}{=} 2\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1}=2(0)=0$

30. La limite est une indétermination du type $\frac{0}{0}$. $\lim_{x\to 0}\frac{x3^x}{3^x-1} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{x3^x\ln 3+3^x}{3^x\ln 3}=\lim_{x\to 0}\frac{3^x(x\ln 3+1)}{3^x\ln 3}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln 3+1}{\ln 3}=\frac{1}{\ln 3}$

31. La limite est une indétermination du type $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos mx-\cos nx}{x^2} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-m\sin mx+n\sin nx}{2x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-m^2\cos mx+n^2\cos nx}{2}=\tfrac{1}{2}(n^2-m^2)$$

32. $\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{x+\cos x}=\frac{0+0}{0+1}=\frac{0}{1}=0$. La règle de l'Hospital ne s'applique pas.

 © Groupe Modulo inc., 2013

33. La limite est une indétermination du type $\frac{0}{0}$. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\arctan(4x)} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{1}{1+(4x)^2}\cdot 4} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+16x^2}{4} = \dfrac{1}{4}$

34. La limite est une indétermination du type $\frac{0}{0}$. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x+\ln x}{1+\cos \pi x} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-1+1/x}{-\pi \sin \pi x} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-1/x^2}{-\pi^2 \cos \pi x} = \dfrac{-1}{-\pi^2(-1)} = -\dfrac{1}{\pi^2}$

35. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^x-1}{\ln x + x - 1}$. De l'exemple 9, on a obtenu que $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = 1$, ce qui implique que $\lim\limits_{x\to 0^+}(x^x-1) = 0$. Lorsque $x \to 0^+$, alors $\ln x \to -\infty$, de sorte que $\ln x + x - 1 \to -\infty$ lorsque $x \to 0^+$. Donc, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^x-1}{\ln x + x - 1} = 0$.

36. La limite est une indétermination du type $\frac{0}{0}$. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^a - ax + a - 1}{(x-1)^2} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax^{a-1}-a}{2(x-1)} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a(a-1)x^{a-2}}{2} = \dfrac{a(a-1)}{2}$

37. La limite est une indétermination du type $\frac{0}{0}$. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \dfrac{1+1}{1} = 2$

38. La limite est une indétermination du type $\frac{0}{0}$. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^4} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x + x}{4x^3} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\cos x + 1}{12x^2} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{24x} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{24} = \dfrac{1}{24}$

39. La limite est une indétermination du type $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to a^+}\frac{\cos x \ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)} = \lim_{x\to a^+}\cos x \lim_{x\to a^+}\frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)} \overset{\text{H}}{=} \cos a \lim_{x\to a^+}\frac{\dfrac{1}{x-a}}{\dfrac{1}{e^x-e^a}\cdot e^x}$$

$$= \cos a \lim_{x\to a^+}\frac{1}{e^x}\cdot\lim_{x\to a^+}\frac{e^x-e^a}{x-a} \overset{\text{H}}{=} \cos a \cdot \frac{1}{e^a}\lim_{x\to a^+}\frac{e^x}{1} = \cos a \cdot \frac{1}{e^a}\cdot e^a = \cos a$$

40. La limite est une indétermination du type $\infty \cdot 0$. On la modifie de manière à obtenir une indétermination du type $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to\infty} x\sin(\pi/x) = \lim_{x\to\infty}\frac{\sin(\pi/x)}{1/x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\cos(\pi/x)(-\pi/x^2)}{-1/x^2} = \pi\lim_{x\to\infty}\cos(\pi/x) = \pi(1) = \pi$$

41. La limite est une indétermination du type $\infty \cdot 0$. On la modifie de manière à obtenir une indétermination du type $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}e^{-x/2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{e^{x/2}} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}x^{-1/2}}{\frac{1}{2}e^{x/2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}e^{x/2}} = 0$$

42. La limite est une indétermination du type $\infty \cdot 0$. On la modifie de manière à obtenir une indétermination du type $\frac{0}{0}$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

$$\lim_{x\to 0}\cot 2x\sin 6x=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\tan 2x}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{6\cos 6x}{2\sec^2 2x}=\frac{6(1)}{2(1)^2}=3$$

43. La limite est une indétermination du type $0\cdot(-\infty)$.

$$\lim_{x\to 0^+}\sin x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\csc x}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-\csc x\cot x}=-\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\tan x\right)=-\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0^+}\tan x\right)$$
$$=-1\cdot 0=0$$

44. La limite est une indétermination du type $\infty\cdot 0$. $\lim_{x\to\infty}x^3e^{-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^{x^2}}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{2xe^{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{2e^{x^2}}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{3}{4xe^{x^2}}=0$

45. La limite est une indétermination du type $\infty\cdot 0$.

$$\lim_{x\to\infty}x\tan(1/x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\tan(1/x)}{1/x}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\sec^2(1/x)(-1/x^2)}{-1/x^2}=\lim_{x\to\infty}\sec^2(1/x)=1^2=1$$

46. La limite est une indétermination du type $0\cdot(-\infty)$.

$$\lim_{x\to 1^+}\ln x\tan(\pi x/2)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{\cot(\pi x/2)}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 1^+}\frac{1/x}{(-\pi/2)\csc^2(\pi x/2)}=\frac{1}{(-\pi/2)(1)^2}=-\frac{2}{\pi}$$

47. La limite est une indétermination du type $0\cdot\infty$. $\lim_{x\to(\pi/2)-}\cos x\sec 5x=\lim_{x\to(\pi/2)-}\frac{\cos x}{\cos 5x}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to(\pi/2)-}\frac{-\sin x}{-5\sin 5x}=\frac{-1}{-5}=\frac{1}{5}$

48. La limite est une indétermination du type $\infty-\infty$.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-(x-1)}{(x-1)\ln x}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{x(1/x)+\ln x-1}{(x-1)(1/x)+\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-(1/x)+\ln x}$$
$$\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{1/x}{1/x^2+1/x}\cdot\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{1+x}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

49. La limite est une indétermination du type $\infty-\infty$. $\lim_{x\to 0}(\csc x-\cot x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x}=0$

50. La limite est une indétermination du type $\infty-\infty$.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{xe^x+e^x-1}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{xe^x+e^x+e^x}=\frac{1}{0+1+1}=\frac{1}{2}$$

51. La limite est une indétermination du type $\infty-\infty$.

$$\lim_{x\to 0}\left(\cot x-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{x(-\sin x)+\cos x-\cos x}{x\cos x+\sin x}$$
$$=-\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{x\cos x+\sin x}\overset{\text{H}}{=}-\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x+\sin x}{x(-\sin x)+\cos x+\cos x}=-\frac{0+0}{0+1+1}=0$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

52. La limite est une indétermination du type $\infty - \infty$ et on modifie l'expression de manière à obtenir un produit en mettant x en évidence :

$$\lim_{x\to\infty}(x-\ln x)=\lim_{x\to\infty}x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=\infty \text{ puisque } \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1}=0.$$

53. La limite est une indétermination du type $\infty - \infty$.

$$\lim_{x\to1^+}[\ln(x^7-1)-\ln(x^5-1)=\lim_{x\to1^+}\ln\frac{x^7-1}{x^5-1}=\ln\lim_{x\to1^+}\frac{x^7-1}{x^5-1} \overset{\text{H}}{=} \ln\lim_{x\to1^+}\frac{7x^6}{5x^4}=\ln\frac{7}{5}$$

54. $y=x^{\sqrt{x}} \Rightarrow \ln y=\sqrt{x}\ln x$; alors,

$$\lim_{x\to0^+}\ln y=\lim_{x\to0^+}\sqrt{x}\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x^{-1/2}} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to0^+}\frac{1/x}{-\frac{1}{2}x^{-3/2}}=-2\lim_{x\to0^+}\sqrt{x}=0 \Rightarrow \lim_{x\to0^+}x^{\sqrt{x}}=\lim_{x\to0^+}e^{\ln y}=e^0=1.$$

55. $y=(\tan 2x)^x \Rightarrow \ln y=x\cdot\ln\tan 2x$; alors,

$$\lim_{x\to0^+}\ln y=\lim_{x\to0^+}x\cdot\ln\tan 2x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\tan 2x}{1/x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to0^+}\frac{(1/\tan 2x)(2\sec^2 2x)}{-1/x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{-2x^2\cos 2x}{\sin 2x\cos^2 2x}$$
$$=\lim_{x\to0^+}\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\lim_{x\to0^+}\frac{-x}{\cos 2x}=1\cdot 0=0 \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to0^+}(\tan 2x)^x=\lim_{x\to0^+}e^{\ln y}=e^0=1$$

56. $y=(1-2x)^{1/x} \Rightarrow \ln y=\frac{1}{x}\ln(1-2x)$; alors,

$$\lim_{x\to0}\ln y=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-2x)}{x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to0}\frac{-2/(1-2x)}{1}=-2 \Rightarrow \lim_{x\to0}(1-2x)^{1/x}=\lim_{x\to0}e^{\ln y}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$$

57. $y=\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx} \Rightarrow \ln y=bx\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)$; alors,

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\frac{b\ln(1+\mathrm{a}/x)}{1/x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{b\left(\frac{1}{1+a/x}\right)\left(-\frac{a}{x^2}\right)}{-1/x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{ab}{1+a/x}=ab \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx}=\lim_{x\to\infty}e^{\ln y}=e^{ab}.$$

58. $y=x^{1/(1-x)} \Rightarrow \ln y=\frac{1}{1-x}\ln x$; alors, $\lim_{x\to1^+}\ln y=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{1-x}\ln x=\lim_{x\to1^+}\frac{\ln x}{1-x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to1^+}\frac{1/x}{-1}=-1 \Rightarrow \lim_{x\to1^+}x^{1/(1-x)}=\lim_{x\to1^+}e^{\ln y}=e^{-1}=\frac{1}{e}.$

59. $y=x^{(\ln 2)/(1+\ln x)} \Rightarrow \ln y=\frac{\ln 2}{1+\ln x}\ln x$; alors,

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln 2)(\ln x)}{1+\ln x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{(\ln 2)(1/x)}{1/x}=\lim_{x\to\infty}\ln 2=\ln 2 \text{ ; donc, } \lim_{x\to\infty}x^{(\ln 2)/(1+\ln x)}=\lim_{x\to\infty}e^{\ln y}=e^{\ln 2}=2$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

60. $y = x^{1/x} \;\Rightarrow\; \ln y = (1/x)\,\ln x \;\Rightarrow\; \lim_{x\to\infty} \ln y = \lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to\infty} \dfrac{1/x}{1} = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to\infty} x^{1/x} = \lim_{x\to\infty} e^{\ln y} = e^0 = 1$

61 $y = (e^x + x)^{1/x} \;\Rightarrow\; \ln y = \dfrac{1}{x}\ln(e^x + x)$; alors,

$$\lim_{x\to\infty} \ln y = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(e^x + x)}{x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x + 1}{e^x + x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to\infty} (e^x + x)^{1/x} = \lim_{x\to\infty} e^{\ln y} = e^1 = e$$

62. $y = (4x+1)^{\cot x} \;\Rightarrow\; \ln y = \cot x \ln(4x+1)$; alors, $\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(4x+1)}{\tan x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{4}{4x+1}}{\sec^2 x} = 4 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 0^+} (4x+1)^{\cot x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln y} = e^4$.

63. $y = (2-x)^{\tan(\pi x/2)} \;\Rightarrow\; \ln y = \tan\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)\ln(2-x) \;\Rightarrow$

$$\lim_{x\to 1} \ln y = \lim_{x\to 1}\left[\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)\ln(2-x)\right] = \lim_{x\to 1} \frac{\ln(2-x)}{\cot\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{2-x}(-1)}{-\csc^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{2-x}$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1^2}{1} = \frac{2}{\pi} \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 1} (2-x)^{\tan(\pi x/2)} = \lim_{x\to 1} e^{\ln y} = e^{(2/\pi)}$$

64. $y = (\cos)^{1/x^2} \;\Rightarrow\; \ln y = \dfrac{1}{x^2}\ln\cos x \;\Rightarrow$

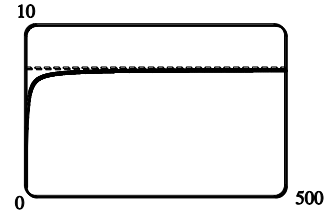
$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\cos x}{x^2} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-\tan x}{2x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sec^2 x}{2} = -\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \lim_{x\to 0^+} (\cos x)^{1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln y} = e^{-1/2} = 1/\sqrt{e}$$

65. $y = \left(\dfrac{2x-3}{2x+5}\right)^{2x+1} \;\Rightarrow\; \ln y = (2x+1)\ln\left(\dfrac{2x+3}{2x+5}\right) \;\Rightarrow$

$$\lim_{x\to\infty} \ln y = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(2x-3) - \ln(2x+5)}{1/(2x+1)} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2/(2x-3) - 2/(2x+5)}{-2/(2x+1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-8(2x+1)^2}{(2x-3)(2x+5)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-8(2+1/x)^2}{(2-3/x)(2+5/x)} = -8 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+5}\right)^{2x+1} = e^{-8} = \frac{1}{e^8}$$

66.



Le graphique montre que, si $x = 500$, alors $y \approx 7{,}36$. La limite est une indétermination du type 1^∞.

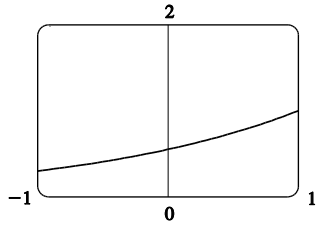
$$y = \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \;\Rightarrow\; \ln y = x\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) \;\Rightarrow$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+2/x)}{1/x}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{1+2/x}\left(-\dfrac{2}{x^2}\right)}{-1/x^2}$$

$$=2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+2/x}=2(1)=2\quad\Rightarrow\quad\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}e^{\ln y}=e^2[\approx 7{,}39]$$

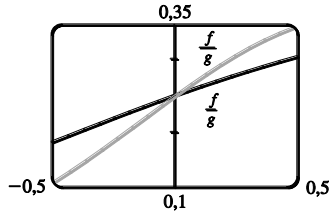
67.



Le graphique montre que, si $x\to 0$, alors $y\approx 0{,}55$. La limite est une indétermination du type $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{5^x-4^x}{3^x-2^x}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{5^x\ln 5-4^x\ln 4}{3^x\ln 3-2^x\ln 2}=\frac{\ln 5-\ln 4}{\ln 3-\ln 2}=\frac{\ln\frac{5}{4}}{\ln\frac{3}{4}}[\approx 0{,}55]$$

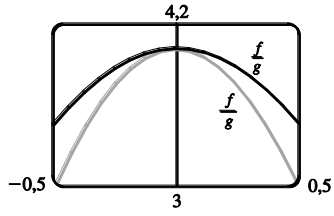
68



Le graphique montre que $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=0{,}25$.

De plus, $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x^3+4x}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x}{3x^2+4}=\dfrac{1}{4}$.

69



Le graphique montre que $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=4$. De plus,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x}{\sec x-1}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2(x\cos x+\sin x)}{\sec x\tan x}$$

$$\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2(-x\sin x+\cos x+\cos x)}{\sec x(\sec^2 x)+\tan x(\sec x\tan x)}=\frac{4}{1}=4$$

70. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^n}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{nx^{n-1}}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}}\overset{\text{H}}{=}\cdots\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{n!}=\infty$

 © Groupe Modulo inc., 2013

71. La limite est une indétermination du type $\frac{\infty}{\infty}$. De plus, $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^p} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{px^{p-1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{px^p} = 0$ puisque $p > 0$.

72. $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{2}(x^2+1)^{-1/2}(2x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$. Une application répétée de la règle de l'Hospital ramène à la limite demandée ou à la limite de son inverse multiplicatif. Procédons autrement, divisons le numérateur et le dénominateur par x :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x/x}{\sqrt{x^2/x^2+1/x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+1/x^2}} = \frac{1}{1} = 1.$$

73. $\lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{\sec x}{\tan x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{\sec x\tan x}{\sec^2 x} = \lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{\tan x}{\sec x}$. Une application répétée de la règle de l'Hospital ramène à la limite demandée ou à la limite de son inverse multiplicatif. Procédons autrement, simplifions d'abord :

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{\sec x}{\tan x} = \lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{1/\cos x}{\sin x/\cos x} = \lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{1} = 1.$$

74. On voit que le numérateur et le dénominateur tendent tous deux vers 0 ; on peut donc appliquer la règle de l'Hospital :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{2a^3x-x^4}-a\sqrt[3]{aax}}{a-\sqrt[4]{ax^3}} &\overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{2}(2a^3x-x^4)^{-1/2}(2a^3-4x^3)-a\left(\frac{1}{3}\right)(aax)^{-2/3}a^2}{-\frac{1}{4}(ax^3)^{-3/4}(3ax^2)}\\ &= \frac{\frac{1}{2}(2a^3a-a^4)^{-1/2}(2a^3-4a^3)-\frac{1}{3}a^3(a^2a)^{-2/3}}{-\frac{1}{4}(aa^3)^{-3/4}(3aa^2)}\\ &= \frac{(a^4)^{-1/2}(-a^3)-\frac{1}{3}a^3(a^3)^{-2/3}}{-\frac{3}{4}a^3(a^4)^{-3/4}} = \frac{-a-\frac{1}{3}a}{-\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\left(\frac{4}{3}a\right) = \frac{16}{9}a.\end{aligned}$$

75. Soit $L = \lim_{x\to\infty}\left[x - x^2\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)\right] = \lim_{x\to\infty}\left[x - x^2\ln\left(\frac{1}{x}+1\right)\right]$. Si on pose $t = 1/x$, alors, lorsque $x \to \infty$, on a $t \to 0^+$. Donc,

$$L = \lim_{t\to0^+}\left[\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\ln(t+1)\right] = \lim_{t\to0^+}\frac{t-\ln(t+1)}{t^2} \overset{\text{H}}{=} \lim_{t\to0^+}\frac{1-\frac{1}{t+1}}{2t} = \lim_{t\to0^+}\frac{t/(t+1)}{2t} = \lim_{t\to0^+}\frac{1}{2(t+1)} = \frac{1}{2}.$$

Remarque : Si on tente d'abord de mettre en évidence x ou x^2, le calcul de la limite est plus laborieux.

76. $y = [f(x)]^{g(x)} \quad\Rightarrow\quad \ln y = g(x)\ln f(x)$. Étant donné que f est une fonction positive, $\ln f(x)$ est défini. De plus,

$\lim_{x\to a}\ln y = \lim_{x\to a} g(x)\ln f(x) = -\infty$ puisque $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ et $\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to a}\ln f(x) = -\infty$. Donc, si $t = \ln y$, alors

$\lim_{x\to a} y = \lim_{t\to-\infty} e^t = 0$. Il est à noter que $\lim_{x\to a} g(x)\ln f(x)$ *n'*est *pas* une indétermination du type $\infty \cdot 0$.

77. Étant donné que $f(2) = 0$, la limite à évaluer est une indétermination du type $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to0}\frac{f(2+3x)+f(2+5x)}{x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to0}\frac{f'(2+3x)\cdot3+f'(2+5x)\cdot5}{1} = f'(2)\cdot3+f'(2)\cdot5 = 8f'(2) = 8\cdot7 = 56.$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

78. $L = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{x^3} + a + \dfrac{b}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x + ax^3 + bx}{x^3} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos 2x + 3ax^2 + b}{3x^2}$. Lorsque $x \to 0$, alors $3x^2 \to 0$ et

$(2\cos 2x + 3ax^2 + b) \to b + 2$, de sorte que la dernière limite existe seulement si $b + 2 = 0$, c'est-à-dire si $b = -2$. Ainsi,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos 2x + 3ax^2 - 2}{3x^2} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-4\sin 2x + 6ax}{6x} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-8\cos 2x + 6a}{6} = \dfrac{6a - 8}{6}$, et ce quotient est nul si et seulement si $a = \frac{4}{3}$. Donc, L $= 0$ si et seulement si $b = -2$ et $a = \frac{4}{3}$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

3.8 L'intégrale impropre

1. a) Puisque $y = \dfrac{x}{x-1}$ présente une discontinuité à l'infini en $x = 1$, $\int_1^2 \dfrac{x}{x-1}dx$ est une intégrale impropre de type 2.

b) Puisque $\int_0^\infty \dfrac{1}{1+x^3}dx$ présente un intervalle infini d'intégration, elle est une intégrale impropre de type 1.

c) Puisque $\int_{-\infty}^\infty x^2e^{-x^2}dx$ présente un intervalle infini d'intégration, elle est une intégrale impropre de type 1.

d) Puisque $y = \cot x$ présente une discontinuité à l'infini en $x = 0$, $\int_0^{\pi/4} \cot x\,dx$ est une intégrale impropre de type 2.

2. a) Puisque $y = \tan x$ est définie et continue sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\int_0^{\pi/4} \tan x\,dx$ n'est pas impropre.

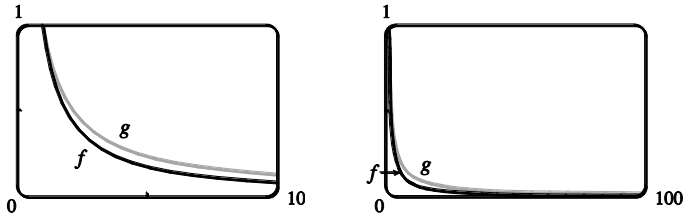
b) Puisque $y = \tan x$ présente une discontinuité à l'infini en $x = \frac{\pi}{2}$, $\int_0^{\pi} \tan x\,dx$ est une intégrale impropre de type 2.

c) Puisque $y = \dfrac{1}{x^2-x-2} = \dfrac{1}{(x-2)(x+1)}$ présente une discontinuité à l'infini en $x = -1$, $\int_{-1}^1 \dfrac{dx}{x^2-x-2}$ est une intégrale impropre de type 2.

d) Puisque $\int_0^\infty e^{-x^3}dx$ présente un intervalle infini d'intégration, elle est une intégrale impropre de type 1.

3. L'aire de la région sous la courbe $y = 1/x^3 = x^{-3}$ entre $x = 1$ et $x = t$ est $A(t) = \int_1^t x^{-3}dx = \left[-\frac{1}{2}x^{-2}\right]_1^t = -\frac{1}{2}t^{-2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 1/(2t^2)$. L'aire pour $1 \le x \le 10$ est donc $A(10) = 0{,}5 - 0{,}005 = 0{,}495$, l'aire pour $1 \le x \le 100$ est $A(100) = 0{,}5 - 0{,}000\,05 = 0{,}499\,95$ et l'aire pour $1 \le x \le 1000$ est $A(1000) = 0{,}5 - 0{,}000\,000\,5 = 0{,}499\,999\,5$. L'aire totale de la région sous la courbe où $x \ge 1$ est $\lim\limits_{t\to\infty} A(t) = \lim\limits_{t\to\infty}\left[\frac{1}{2} - 1/(2t^2)\right] = \frac{1}{2}$.

4. a)



b) L'aire de la région sous la courbe d'équation de f entre $x = 1$ et $x = t$ est

$$F(t) = \int_1^t f(x)dx = \int_1^t x^{-1,1}dx = \left[-\tfrac{1}{0,1}x^{-0,1}\right]_1^t$$
$$= -10(t^{-0,1} - 1) = 10(1 - t^{-0,1})$$

et l'aire de la région sous la courbe d'équation de g est

$$G(t) = \int_1^t g(x)dx = \int_1^t x^{-0,9}dx = \left[\tfrac{1}{0,1}x^{0,1}\right]_1^t = 10(t^{0,1} - 1).$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

t	$F(t)$	$G(t)$
10	2,06	2,59
100	3,69	5,85
10^4	6,02	15,12
10^6	7,49	29,81
10^{10}	9	90
10^{20}	9,9	990

c) L'aire totale de la région sous la courbe f est $\lim_{t\to\infty} F(t) = \lim_{t\to\infty} 10(1-t^{-0,1}) = 10$. L'aire totale de la région sous la courbe g n'existe pas, puisque $\lim_{t\to\infty} G(t) = \lim_{t\to\infty} 10(t^{0,1}-1) = \infty$.

5. $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{(x-2)^{3/2}}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_3^t (x-2)^{-3/2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\Big[-2(x-2)^{-1/2}\Big]_3^t \quad [u=x-2, du=dx]$

$\displaystyle = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{-2}{\sqrt{t-2}} + \frac{2}{\sqrt{1}}\right) = 0+2 = 2.$ Intégrale convergente

6. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[4]{1+x}}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t (1+x)^{-1/4}\,dx = \lim_{t\to\infty}\Big[\tfrac{4}{3}(1+x)^{3/4}\Big]_0^t \quad [u=1+x, du=dx]$

$\displaystyle = \lim_{t\to\infty}\Big[\tfrac{4}{3}(1+t)^{3/4} - \tfrac{4}{3}\Big] = \infty.$ Intégrale divergente

7. $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{3-4x}\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 \frac{1}{3-4x}\,dx = \lim_{t\to-\infty}\Big[-\tfrac{1}{4}\ln|3-4x|\Big]_t^0 = \lim_{t\to-\infty}\Big[-\tfrac{1}{4}\ln 3 + \tfrac{1}{4}\ln|3-4t|\Big] = \infty.$ Intégrale divergente

8. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{4(2x+1)^2}\right]_1^t = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{4(2t+1)^2} + \frac{1}{36}\right] = 0 + \frac{1}{36}$. Intégrale convergente

9. $\displaystyle\int_2^\infty e^{-5p}\,dp = \lim_{t\to\infty}\int_2^t e^{-5p}\,dp = \lim_{t\to\infty}\Big[-\tfrac{1}{5}e^{-5p}\Big]_2^t = \lim_{t\to\infty}\left(-\tfrac{1}{5}e^{-5t} + \tfrac{1}{5}e^{-10}\right) = 0 + \tfrac{1}{5}e^{-10} = \tfrac{1}{5}e^{-10}$. Intégrale convergente

10. $\displaystyle\int_{-\infty}^0 2^r\,dr = \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 2^r\,dr = \lim_{t\to-\infty}\left[\frac{2^r}{\ln 2}\right]_t^0 = \lim_{t\to-\infty}\left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{2^t}{\ln 2}\right) = \frac{1}{\ln 2} - 0 = \frac{1}{\ln 2}$. Intégrale convergente

11. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{2}{3}\sqrt{1+x^3}\right]_0^t = \lim_{t\to\infty}\left(\tfrac{2}{3}\sqrt{1+t^3} - \tfrac{2}{3}\right) = \infty$. Intégrale divergente

12. $I = \displaystyle\int_{-\infty}^\infty (y^3-3y^2)\,dy = I_1 + I_2 = \int_{-\infty}^0 (y^3-3y^2)\,dy + \int_0^\infty (y^3-3y^2)\,dy$, mais $I_1 = \lim_{t\to-\infty}\Big[\tfrac{1}{4}y^4 - y^3\Big]_t^0 = \lim_{t\to-\infty}(t^3 - \tfrac{1}{4}t^4) = -\infty$. Puisque I_1 est divergente, I est divergente, et il n'est pas nécessaire d'évaluer I_2. Intégrale divergente

13. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty xe^{-x^2}\,dx = \int_{-\infty}^0 xe^{-x^2}\,dx + \int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

$\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}\,dx = \lim_{t\to-\infty}\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left[e^{-x^2}\right]_t^0 = \lim_{t\to-\infty}\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(1-e^{-t^2}\right) = -\tfrac{1}{2}\cdot 1 = -\tfrac{1}{2}$ et $\int_0^{\infty} xe^{-x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left[e^{-x^2}\right]_0^t = \lim_{t\to\infty}\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(e^{-t^2}-1\right) = -\tfrac{1}{2}\cdot(-1) = \tfrac{1}{2}$.

Par conséquent, $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\,dx = -\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2} = 0$. Intégrale convergente

14. $\int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^{\sqrt{t}} e^{-u}(2du) \qquad \begin{bmatrix} u=\sqrt{x}, \\ du = dx/(2\sqrt{x}) \end{bmatrix}$

$= 2\lim_{t\to\infty}\left[-e^{-u}\right]_1^{\sqrt{t}} = 2\lim_{t\to\infty}\left(-e^{-\sqrt{t}}+e^{-1}\right) = 2(0+e^{-1}) = 2e^{-1} = \frac{2}{e}.$ Intégrale convergente

15. $\int_0^{\infty}\sin^2\alpha\,d\alpha = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \tfrac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)\,d\alpha = \lim_{t\to\infty}\left[\tfrac{1}{2}\left(\alpha-\tfrac{1}{2}\sin 2\alpha\right)\right]_0^t = \lim_{t\to\infty}\left[\tfrac{1}{2}\left(t-\tfrac{1}{2}\sin 2t\right)-0\right] = \infty$. Intégrale divergente

16. $I = \int_{-\infty}^{\infty}\cos\pi t\;dt = I_1 + I_2 = \int_{-\infty}^{0}\cos\pi t\;dt + \int_0^{\infty}\cos\pi t\;dt$, mais $I_1 = \lim_{s\to-\infty}\left[\frac{1}{\pi}\sin\pi t\right]_s^0 = \lim_{s\to-\infty}\left(-\frac{1}{\pi}\sin\pi t\right)$ et cette limite n'existe pas.

Puisque I_1 est divergente, I est divergente, et il n'est pas nécessaire d'évaluer I_2. Intégrale divergente

17. $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2+x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x(x+1)}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$ [fractions partielles]

$= \lim_{t\to\infty}\left[\ln|x|-\ln|x+1|\right]_1^t = \lim_{t\to\infty}\left[\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\right]_1^t = \lim_{t\to\infty}\left(\ln\frac{t}{t+1}-\ln\frac{1}{2}\right) = 0-\ln\frac{1}{2} = \ln 2.$

Intégrale convergente

18. $\int_2^{\infty}\frac{dv}{v^2+2v-3} = \lim_{t\to\infty}\int_2^t \frac{dv}{(v+3)(v-1)} = \lim_{t\to\infty}\int_2^t \left(\frac{-\frac{1}{4}}{v+3}+\frac{\frac{1}{4}}{v-1}\right)dv = \lim_{t\to\infty}\left[-\tfrac{1}{4}\ln|v+3|+\tfrac{1}{4}\ln|v-1|\right]_2^t$

$= \frac{1}{4}\lim_{t\to\infty}\left[\ln\frac{v-1}{v+3}\right]_2^t = \frac{1}{4}\lim_{t\to\infty}\left(\ln\frac{t-1}{t+3}-\ln\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{4}(0+\ln 5) = \frac{1}{4}\ln 5.$ Intégrale convergente

19. $\int_{-\infty}^{0} ze^{2z}dz = \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 ze^{2z}dz = \lim_{t\to-\infty}\left[\tfrac{1}{2}ze^{2z}-\tfrac{1}{4}e^{2z}\right]_t^0 \qquad \begin{bmatrix}\text{integration par parties avec} \\ u=z, dv=e^{2z}dz\end{bmatrix}$

$= \lim_{t\to-\infty}\left[\left(0-\tfrac{1}{4}\right)-\left(\tfrac{1}{2}te^{2t}-\tfrac{1}{4}e^{2t}\right)\right] = -\frac{1}{4}-0+0$ [selon la règle de l'Hospital] $= -\tfrac{1}{4}.$

Intégrale convergente

20. $\int_2^{\infty} ye^{-3y}dy = \lim_{t\to\infty}\int_2^t ye^{-3y}dy = \lim_{t\to\infty}\left[-\tfrac{1}{3}ye^{-3y}-\tfrac{1}{9}e^{-3y}\right]_2^t \qquad \begin{bmatrix}\text{integration par parties avec} \\ u=y, dv=e^{-3y}dy\end{bmatrix}$

$= \lim_{t\to\infty}\left[\left(-\tfrac{1}{3}te^{-3t}-\tfrac{1}{9}e^{-3t}\right)-\left(-\tfrac{2}{3}e^{-6}-\tfrac{1}{9}e^{-6}\right)\right] = 0-0+\tfrac{7}{9}e^{-6}$ [selon la règle de l'Hospital] $= \tfrac{7}{9}e^{-6}.$

Intégrale convergente

21. $\int_1^{\infty}\frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^t \quad \begin{bmatrix}\text{par changement de variable avec} \\ u=\ln x, du = dx/x\end{bmatrix} \quad = \lim_{t\to\infty}\frac{(\ln t)^2}{2} = \infty$. Intégrale divergente

22. $I = \int_{-\infty}^{\infty} x^3e^{-x^4}\,dx = I_1 + I_2 = \int_{-\infty}^{0} x^3e^{-x^4}\,dx + \int_0^{\infty} x^3e^{-x^4}\,dx$. Or,

 © Groupe Modulo inc., 2013

$$I_2 = \lim_{t\to\infty}\int_0^t x^3 e^{-x^4}dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^{t^4} e^{-u}\left(\tfrac{1}{4}du\right) \qquad \begin{bmatrix} u = x^4, \\ du = 4x^3dx \end{bmatrix}$$
$$= \tfrac{1}{4}\lim_{t\to\infty}\left[-e^{-u}\right]_0^{t^4} = \tfrac{1}{4}\lim_{t\to\infty}\left(-e^{-t^4}+1\right) = \tfrac{1}{4}(0+1) = \tfrac{1}{4}.$$

Puisque $f(x) = x^3e^{-x^4}$ est une fonction impaire, $I_1 = -\frac{1}{4}$ et, par conséquent, $I = 0$. Intégrale convergente

23. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{9+x^6}dx = \int_{-\infty}^{0}\frac{x^2}{9+x^6}dx + \int_0^{\infty}\frac{x^2}{9+x^6}dx = 2\int_0^{\infty}\frac{x^2}{9+x^6}dx$ [Puisque l'intégrande est paire]. Or,

$$\int\frac{x^2dx}{9+x^6}\begin{bmatrix} u = x^3 \\ du = 3x^2dx \end{bmatrix} = \int\frac{\frac{1}{3}du}{9+u^2}\begin{bmatrix} u = 3v \\ du = 3dv \end{bmatrix} = \int\frac{\frac{1}{3}(3dv)}{9+9v^2} = \frac{1}{9}\int\frac{dv}{1+v^2}$$
$$= \frac{1}{9}\arctan v + C = \frac{1}{9}\arctan\left(\frac{u}{3}\right) + C = \frac{1}{9}\arctan\left(\frac{x^3}{3}\right) + C,$$

donc $2\int_0^{\infty}\frac{x^2}{9+x^6}dx = 2\lim_{t\to\infty}\int_0^t\frac{x^2}{9+x^6}dx = 2\lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{9}\arctan\left(\frac{x^3}{3}\right)\right]_0^t = 2\lim_{t\to\infty}\frac{1}{9}\arctan\left(\frac{t^3}{3}\right) = \frac{2}{9}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{9}$.

Intégrale convergente

24. $\int_0^{\infty}\frac{e^x}{e^{2x}+3}dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t\frac{e^x}{(e^x)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}dx = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{e^x}{\sqrt{3}}\right]_0^t = \frac{1}{\sqrt{3}}\lim_{t\to\infty}\left(\arctan\frac{e^t}{\sqrt{3}} - \arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

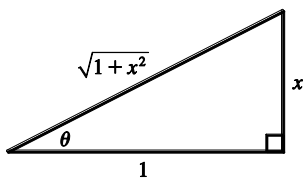
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$ Intégrale convergente

25. $\int_e^{\infty}\frac{1}{x(\ln x)^3}dx = \lim_{t\to\infty}\int_e^t\frac{1}{x(\ln x)^3}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^{\ln t}u^{-3}du\begin{bmatrix} u = \ln x, \\ du = dx/x \end{bmatrix} = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{2u^2}\right]_1^{\ln t}$

$$= \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{2(\ln t)^2} + \frac{1}{2}\right] = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$ Intégrale convergente

26. $\int_0^{\infty}\frac{x\arctan x}{(1+x^2)^2}dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t\frac{x\arctan x}{(1+x^2)^2}dx$. Soit $u = \arctan x, dv = \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}$. Alors, $du = \frac{dx}{1+x^2}$, $v = \frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{(1+x^2)^2} = \frac{-1/2}{1+x^2}$ et

$$\int\frac{x\arctan x}{(1+x^2)^2}dx = -\frac{1}{2}\frac{\arctan x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{(1+x^2)^2} \qquad \begin{bmatrix} x = \tan\theta, \\ dx = \sec^2\theta d\theta \end{bmatrix}$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{\arctan x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int\frac{\sec^2\theta d\theta}{(\sec^2\theta)^2}$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{\arctan x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int\cos^2\theta d\theta$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{\arctan x}{1+x^2} + \frac{\theta}{4} + \frac{\sin\theta\cos\theta}{4} + C$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{\arctan x}{1+x^2} + \frac{1}{4}\arctan x + \frac{1}{4}\frac{x}{1+x^2} + C$$



 © Groupe Modulo inc., 2013

Il s'ensuit que

$$\int_0^\infty \frac{x\arctan x}{(1+x^2)^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{2}\frac{\arctan x}{1+x^2}+\frac{1}{4}\arctan x+\frac{1}{4}\frac{x}{1+x^2}\right]_0^t$$
$$= \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\frac{\arctan t}{1+t^2}+\frac{1}{4}\arctan t+\frac{1}{4}\frac{t}{1+t^2}\right) = 0+\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2}+0=\frac{\pi}{8}.$$ Intégrale convergente

27. $\int_0^1 \frac{3}{x^5}\,dx = \lim_{t\to0^+}\int_t^1 3x^{-5}\,dx = \lim_{t\to0^+}\left[-\frac{3}{4x^4}\right]_t^1 = -\frac{3}{4}\lim_{t\to0^+}\left(1-\frac{1}{t^4}\right)=\infty$. Intégrale divergente

28. $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}}\,dx = \lim_{t\to3^-}\int_2^t (3-x)^{-1/2}\,dx = \lim_{t\to3^-}\left[-2(3-x)^{1/2}\right]_2^t = -2\lim_{t\to3^-}\left(\sqrt{3-t}-\sqrt{1}\right) = -2(0-1)=2$.

Intégrale convergente

29. $\int_{-2}^{14}\frac{dx}{\sqrt[4]{x+2}} = \lim_{t\to-2^+}\int_t^{14}(x+2)^{-1/4}\,dx = \lim_{t\to-2^+}\left[\frac{4}{3}(x+2)^{3/4}\right]_t^{14} = \frac{4}{3}\lim_{t\to-2^+}\left[16^{3/4}-(t+2)^{3/4}\right]$
$= \frac{4}{3}(8-0)=\frac{32}{3}$. Intégrale convergente

30. $\int_6^8 \frac{4}{(x-6)^3}\,dx = \lim_{x\to6^+}\int_t^8 4(x-6)^{-3}\,dx = \lim_{x\to6^+}\left[-2(x-6)^{-2}\right]_t^8 = -2\lim_{x\to6^+}\left[\frac{1}{2^2}-\frac{1}{(t-6)^2}\right]=\infty$. Intégrale divergente

31. $\int_{-2}^3 \frac{dx}{x^4} = \int_{-2}^0\frac{dx}{x^4}+\int_0^3\frac{dx}{x^4}$, mais $\int_{-2}^0\frac{dx}{x^4} = \lim_{t\to0^-}\left[-\frac{x^{-3}}{3}\right]_{-2}^t = \lim_{t\to0^-}\left[-\frac{1}{3t^3}-\frac{1}{24}\right]=\infty$. Intégrale divergente

32. $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to1^-}\int_0^t\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to1^-}\left[\arcsin x\right]_0^t = \lim_{t\to1^-}\arcsin t = \frac{\pi}{2}$. Intégrale convergente

33. Il y a une discontinuité à l'infini en $x = 1$. $\int_0^9\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx = \int_0^1(x-1)^{-1/3}\,dx+\int_1^9(x-1)^{-1/3}\,dx$. Ici,

$\int_0^1(x-1)^{-1/3}\,dx = \lim_{t\to1^-}\int_0^t(x-1)^{-1/3}\,dx = \lim_{t\to1^-}\left[\frac{3}{2}(x-1)^{2/3}\right]_0^t = \lim_{t\to1^-}\left[\frac{3}{2}(t-1)^{2/3}-\frac{3}{2}\right]=-\frac{3}{2}$ et

$\int_1^9(x-1)^{-1/3}\,dx = \lim_{t\to1^+}\int_t^9(x-1)^{-1/3}\,dx = \lim_{t\to1^+}\left[\frac{3}{2}(x-1)^{2/3}\right]_t^9 = \lim_{t\to1^+}\left[6-\frac{3}{2}(t-1)^{2/3}\right]=6$.

Par conséquent, $\int_0^9\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx = -\frac{3}{2}+6=\frac{9}{2}$. Intégrale convergente

34. Il y a une discontinuité à l'infini en $w = 2$.

$\int_0^2\frac{w}{w-2}\,dw = \lim_{t\to2^-}\int_0^t\left(1+\frac{2}{w-2}\right)dw = \lim_{t\to2^-}\left[w+2\ln|w-2|\right]_0^t = \lim_{t\to2^-}(t+2\ln|t-2|-2\ln 2)=-\infty$, donc $\int_0^2\frac{w}{w-2}\,dw$ est divergente et, par conséquent, $\int_0^5\frac{w}{w-2}\,dw$ est divergente. Intégrale divergente

 © Groupe Modulo inc., 2013

35. $I=\int_0^3 \frac{dx}{x^2-6x+5}=\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)(x-5)}=I_1+I_2=\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)(x-5)}+\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)(x-5)}$.

Or, $\frac{1}{(x-1)(x-5)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-5} \Rightarrow 1=A(x-5)+B(x-1)$. En posant $x=5$, nous obtenons $1=4B$, donc $B=\frac{1}{4}$. En posant $x=1$, nous obtenons $1=-4A$, donc $A=-\frac{1}{4}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} I_1 &= \lim_{x\to 1^-}\int_0^t\left(\frac{-\frac{1}{4}}{x-1}+\frac{\frac{1}{4}}{x-5}\right)dx=\lim_{x\to 1^-}\left[-\tfrac{1}{4}\ln|x-1|+\tfrac{1}{4}\ln|x-5|\right]_0^t \\ &= \lim_{x\to 1^-}\left[\left(-\tfrac{1}{4}\ln|t-1|+\tfrac{1}{4}\ln|t-5|\right)-\left(-\tfrac{1}{4}\ln|-1|+\tfrac{1}{4}\ln|-5|\right)\right] \\ &= \infty, \quad \text{puisque } \lim_{x\to 1^-}\left(-\tfrac{1}{4}\ln|t-1|\right)=\infty. \end{aligned}$$

Puisque I_1 est divergente, I est divergente. Intégrale divergente.

36. $\int_{\pi/2}^{\pi}\csc x\,dx=\lim_{t\to\pi-}\int_{\pi/2}^{t}\csc x\,dx=\lim_{t\to\pi-}[\ln|\csc x-\cot x|]_{\pi/2}^{t}=\lim_{t\to\pi-}\left[\ln(\csc t-\cot t)-\ln(1-0)\right]$

$=\lim_{t\to\pi-}\ln\left(\frac{1-\cos t}{\sin t}\right)=\infty.$ Intégrale divergente

37. $\int_{-1}^{0}\frac{e^{1/x}}{x^3}dx=\lim_{t\to 0^-}\int_{-1}^{t}\frac{1}{x}e^{1/x}\cdot\frac{1}{x^2}dx=\lim_{t\to 0^-}\int_{-1}^{1/t}ue^u(-du)$ $\begin{bmatrix}u=1/x,\\ du=-dx/x^2\end{bmatrix}$

$=\lim_{t\to 0^-}\left[(u-1)e^u\right]_{1/t}^{-1}$ $\begin{bmatrix}\text{intégration par parties}\\ \text{ou formule 96}\end{bmatrix}$ $=\lim_{t\to 0^-}\left[-2e^{-1}-\left(\frac{1}{t}-1\right)e^{1/t}\right]$

$=-\frac{2}{e}-\lim_{s\to-\infty}(s-1)e^s \quad [s=1/t] \quad =-\frac{2}{e}-\lim_{s\to-\infty}\frac{s-1}{e^{-s}}\overset{\text{H}}{=}-\frac{2}{e}-\lim_{s\to-\infty}\frac{1}{-e^{-s}}$

$=-\frac{2}{e}-0=-\frac{2}{e}.$ Intégrale convergente

38. $\int_0^1\frac{e^{1/x}}{x^3}dx=\lim_{t\to 0^+}\int_t^1\frac{1}{x}e^{1/x}\cdot\frac{1}{x^2}dx=\lim_{t\to 0^+}\int_{1/t}^1 ue^u(-du)$ $\begin{bmatrix}u=1/x,\\ du=-dx/x^2\end{bmatrix}$

$=\lim_{t\to 0^+}\left[(u-1)e^u\right]_1^{1/t}$ $\begin{bmatrix}\text{intégration par parties}\\ \text{ou formule 96}\end{bmatrix}=\lim_{t\to 0^+}\left[\left(\frac{1}{t}-1\right)e^{1/t}-0\right]$

$=\lim_{t\to\infty}(s-1)e^s \quad [s=1/t] \quad =\infty.$ Intégrale divergente

39. $I=\int_0^2 z^2\ln z\,dz=\lim_{t\to 0^+}\int_t^2 z^2\ln z\,dz=\lim_{t\to 0^+}\left[\frac{z^3}{3^2}(3\ln z-1)\right]_t^2$ $\begin{bmatrix}\text{intégration par parties}\\ \text{ou formule 101}\end{bmatrix}$

$=\lim_{t\to 0^+}\left[\tfrac{8}{9}(3\ln 2-1)-\tfrac{1}{9}t^3(3\ln t-1)\right]=\tfrac{8}{3}\ln 2-\tfrac{8}{9}-\tfrac{1}{9}\lim_{t\to 0^+}\left[t^3(3\ln t-1)\right]=\tfrac{8}{3}\ln 2-\tfrac{8}{9}-\tfrac{1}{9}L.$

Or, $L=\lim_{t\to 0^+}\left[t^3(3\ln t-1)\right]=\lim_{t\to 0^+}\frac{3\ln t-1}{t^{-3}}\overset{\text{H}}{=}\lim_{t\to 0^+}\frac{3/t}{-3/t^4}=\lim_{t\to 0^+}(-t^3)=0$. Par conséquent, $L=0$ et $I=\frac{8}{3}\ln 2-\frac{8}{9}$. Intégrale convergente

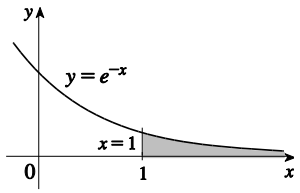
40. Intégrons par parties avec $u=\ln x$, $dv=dx/\sqrt{x} \Rightarrow du=dx/x, v=2\sqrt{x}$.

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx &= \lim_{t\to 0^+}\int_t^1\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=\lim_{t\to 0^+}\left(\left[2\sqrt{x}\ln x\right]_t^1-2\int_t^1\frac{dx}{\sqrt{x}}\right)=\lim_{t\to 0^+}\left(-2\sqrt{t}\ln t-4\left[\sqrt{x}\right]_t^1\right) \\ &= \lim_{t\to 0^+}\left(-2\sqrt{t}\ln t-4+4\sqrt{t}\right)=-4\end{aligned}$$

puisque $\lim_{t\to 0^+}\sqrt{t}\ln t=\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln t}{t^{-1/2}}\overset{\text{H}}{=}\lim_{t\to 0^+}\frac{1/t}{-t^{-3/2}/2}=\lim_{t\to 0^+}\left(-2\sqrt{t}\right)=0.$ Intégrale convergente

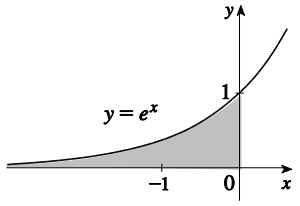
 © Groupe Modulo inc., 2013

41.



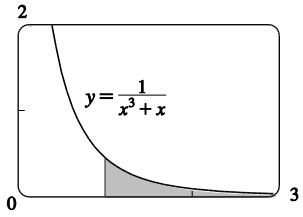
$$\text{Aire} = \int_1^\infty e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_1^t$$
$$= \lim_{t\to\infty}(-e^{-t} + e^{-1}) = 0 + e^{-1} = 1/e$$

42.



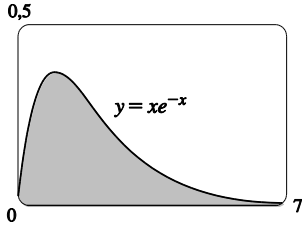
$$\text{Aire} = \int_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 e^x dx = \lim_{t\to-\infty}\left[e^x\right]_t^0$$
$$= \lim_{t\to-\infty}(e^0 - e^t) = 1 - 0 = 1$$

43.



$$\text{Aire} = \int_1^\infty \frac{1}{x^3+x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x(x^2+1)}dx$$
$$= \lim_{t\to\infty}\int_1^t \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)dx \quad \text{[fractions partielles]}$$
$$= \lim_{t\to\infty}\left[\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1|\right]_1^t = \lim_{t\to\infty}\left[\ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right]_1^t$$
$$= \lim_{t\to\infty}\left(\ln\frac{t}{\sqrt{t^2+1}} - \ln\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \ln 1 - \ln 2^{-1/2} = \frac{1}{2}\ln 2$$

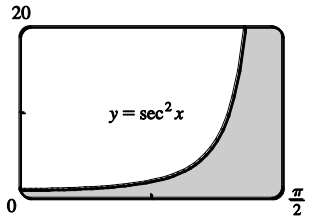
44.



$$\text{Aire} = \int_0^\infty xe^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t xe^{-x}dx$$
$$= \lim_{t\to\infty}\left[-xe^{-x} - e^{-x}\right]_0^t \quad \text{[intégration par parties avec } u = x \text{ et } dv = e^{-x}dx\text{]}$$
$$= \lim_{t\to\infty}\left[(-te^{-t} - e^{-t}) - (-1)\right]$$
$$= 0 \quad \text{[règle de l'Hospital]} \quad -0 + 1 = 1$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

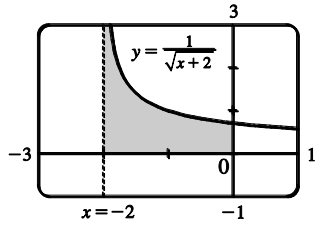
45.



$$\text{Aire} = \int_0^{\pi/2} \sec^2 x\,dx = \lim_{t\to(\pi/2)^-} \int_0^t \sec^2 x\,dx = \lim_{t\to(\pi/2)^-} \left[\tan x\right]_0^t$$
$$= \lim_{t\to(\pi/2)^-} (\tan t - 0) = \infty$$

Aire infinie

46.



$$\text{Aire} = \int_{-2}^{0} \frac{1}{\sqrt{x+2}}\,dx = \lim_{t\to-2^+} \int_t^0 \frac{1}{\sqrt{x+2}}\,dx = \lim_{t\to-2^+} \left[2\sqrt{x+2}\right]_t^0$$
$$= \lim_{t\to-2^+} \left(2\sqrt{2} - 2\sqrt{t+2}\right) = 2\sqrt{2} - 0 = 2\sqrt{2}$$

47. a)

t	$\int_1^t g(x)\,dx$
2	0,447 453
5	0,577 101
10	0,621 306
100	0,668 479
1000	0,672 957
10 000	0,673 407

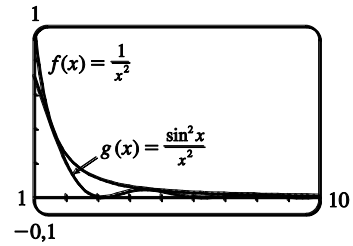
$g(x) = \dfrac{\sin^2 x}{x^2}$. L'intégrale semble être convergente.

b) $-1 \le \sin x \le 1 \;\Rightarrow\; 0 \le \sin^2 x \le 1 \;\Rightarrow\; 0 \le \dfrac{\sin^2 x}{x^2} \le \dfrac{1}{x^2}$. Puisque $\int_1^\infty \dfrac{1}{x^2}\,dx$ est convergente [formule 2 avec $p = 2 > 1$],

$\int_1^\infty \dfrac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$ est convergente par comparaison.

 © Groupe Modulo inc., 2013

c)



Puisque l'intégrale $\int_1^\infty f(x)\,dx$ est convergente et que l'aire de la région sous la courbe $g(x)$ est inférieure à l'aire de la région sous la courbe $f(x)$ sur tout intervalle $[1, t]$, l'intégrale $\int_1^\infty g(x)\,dx$ doit être convergente.

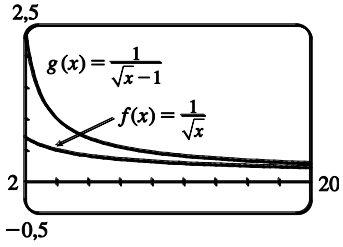
48. a)

t	$\int_2^t g(x)dx$
5	3,830 327
10	6,801 200
100	23,328 769
1000	69,023 361
10 000	208,124 560

$g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$. L'intégrale semble être divergente.

b) Pour $x \geq 2$, $\sqrt{x} > \sqrt{x}-1 \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{\sqrt{x}} < \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$. Puisque l'intégrale $\int_2^\infty \dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$ est divergente [formule 2 avec $p = \frac{1}{2} \leq 1$], l'intégrale $\int_2^\infty \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}dx$ est divergente par comparaison.

c)



Puisque l'intégrale $\int_2^\infty f(x)\,dx$ est divergente et que l'aire de la région sous la courbe $g(x)$ est plus grande que l'aire de la région sous la courbe $f(x)$ sur tout intervalle $[2, t]$, l'intégrale $\int_2^\infty g(x)\,dx$ doit être divergente.

 © Groupe Modulo inc., 2013

49. Pour $x > 0$, $\dfrac{x}{x^3+1} < \dfrac{x}{x^3} = \dfrac{1}{x^2}$. L'intégrale $\int_1^\infty \dfrac{1}{x^2}\,dx$ est convergente selon la formule 2 avec $p = 2 > 1$, donc l'intégrale $\int_1^\infty \dfrac{x}{x^3+1}\,dx$ est convergente par comparaison. L'intégrale $\int_0^1 \dfrac{x}{x^3+1}\,dx$ est une constante, donc l'intégrale $\int_0^\infty \dfrac{x}{x^3+1}\,dx = \int_0^1 \dfrac{x}{x^3+1}\,dx + \int_1^\infty \dfrac{x}{x^3+1}\,dx$ est également convergente.

50. Pour $x \geq 1$, $\dfrac{2+e^{-x}}{x} > \dfrac{2}{x}$ [puisque $e^{-x} > 0$] $> \dfrac{1}{x}$. L'intégrale $\int_1^\infty \dfrac{1}{x}\,dx$ est divergente selon la formule 2 avec $p = 1 \leq 1$, donc l'intégrale $\int_1^\infty \dfrac{2+e^{-x}}{x}\,dx$ est divergente par comparaison.

51. Pour $x > 1$, $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^4-x}} > \dfrac{x+1}{\sqrt{x^4}} > \dfrac{x}{x^2} = \dfrac{1}{x}$, donc l'intégrale $\int_2^\infty f(x)\,dx$ est divergente par comparaison avec l'intégrale $\int_2^\infty \dfrac{1}{x}\,dx$, qui est divergente selon la formule 2 avec $p = 1 \leq 1$. Par conséquent, l'intégrale $\int_1^\infty f(x)\,dx = \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^\infty f(x)\,dx$ est également divergente.

52. Pour $x \geq 0$, $\arctan x < \dfrac{\pi}{2} < 2$, donc $\dfrac{\arctan x}{2+e^x} < \dfrac{2}{2+e^x} < \dfrac{2}{e^x} = 2e^{-x}$.

Or, $I = \int_0^\infty 2e^{-x}dx = \lim\limits_{t\to\infty}\int_0^t 2e^{-x}dx = \lim\limits_{t\to\infty}\left[-2e^{-x}\right]_0^t = \lim\limits_{t\to\infty}\left(-\dfrac{2}{e^t}+2\right) = 2$, donc I est convergente et, par comparaison, l'intégrale $\int_0^\infty \dfrac{\arctan x}{2+e^x}\,dx$ est convergente.

53. Pour $0 < x \leq 1$, $\dfrac{\sec^2 x}{x\sqrt{x}} > \dfrac{1}{x^{3/2}}$. Or, $I = \int_0^1 x^{-3/2}dx = \lim\limits_{t\to 0^+}\int_t^1 x^{-3/2}dx = \lim\limits_{t\to 0^+}\left[-2x^{-1/2}\right]_t^1 = \lim\limits_{t\to 0^+}\left(-2+\dfrac{2}{\sqrt{t}}\right) = \infty$, donc I est divergente et, par comparaison, l'intégrale $\int_0^1 \dfrac{\sec^2 x}{x\sqrt{x}}$ est divergente.

54. Pour $0 < x \leq 1$, $\dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{x}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Or, $I = \int_0^\pi \dfrac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim\limits_{t\to 0^+}\int_t^\pi x^{-1/2}dx = \lim\limits_{t\to 0^+}\left[2x^{1/2}\right]_t^\pi = \lim\limits_{t\to 0^+}\left(2\pi - 2\sqrt{t}\right) = 2\pi - 0 = 2\pi$, donc I est convergente et, par comparaison, l'intégrale $\int_0^\pi \dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{x}}\,dx$ est convergente.

 © Groupe Modulo inc., 2013

55. $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} + \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} + \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$.

Or, $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \int \frac{2u\,du}{u(1+u^2)} \quad \begin{bmatrix} u=\sqrt{x}, x=u^2, \\ dx=2udu \end{bmatrix} = 2\int \frac{du}{1+u^2} = 2\arctan u + C = 2\arctan\sqrt{x} + C$, donc

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} &= \lim_{t\to 0^+}\left[2\arctan\sqrt{x}\right]_t^1 + \lim_{t\to\infty}\left[2\arctan\sqrt{x}\right]_1^t \\ &= \lim_{t\to 0^+}\left[2\left(\tfrac{\pi}{4}\right) - 2\arctan\sqrt{t}\right] + \lim_{t\to\infty}\left[2\arctan\sqrt{t} - 2\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right] = \tfrac{\pi}{2} - 0 + 2\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - \tfrac{\pi}{2} = \pi.\end{aligned}$$

56. $\int_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}} = \int_2^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}} + \int_3^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}} = \lim_{t\to 2^+}\int_t^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}} + \lim_{t\to\infty}\int_3^t \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$.

Or, $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}} = \int \frac{2\sec\theta\tan\theta d\theta}{2\sec\theta 2\tan\theta} \quad \begin{bmatrix} x = 2\sec\theta, \text{ où} \\ 0 \le \theta < \pi/2 \text{ ou } \pi \le \theta < 3\pi/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\theta + C = \frac{1}{2}\operatorname{arcsec}\left(\frac{1}{2}x\right) + C$, donc

$\int_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}} = \lim_{t\to 2^+}\left[\frac{1}{2}\operatorname{arcsec}\left(\frac{1}{2}x\right)\right]_t^3 + \lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{2}\operatorname{arcsec}\left(\frac{1}{2}x\right)\right]_3^t = \frac{1}{2}\operatorname{arcsec}\left(\frac{3}{2}\right) - 0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{arcsec}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.

57. Si $p = 1$, alors $\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{dx}{x} = \lim_{t\to 0^+}[\ln x]_t^1 = \infty$. Intégrale divergente.

Si $p \neq 1$, alors

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{x^p} &= \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{dx}{x^p} \quad \text{[on constate que l'intégrale n'est pas impropre si } p < 0\text{]} \\ &= \lim_{t\to 0^+}\left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_t^1 = \lim_{t\to 0^+}\frac{1}{1-p}\left[1 - \frac{1}{t^{p-1}}\right]\end{aligned}$$

Si $p > 1$, alors $p - 1 > 0$, donc $\frac{1}{t^{p-1}} \to \infty$ à mesure que $t \to 0^+$ et l'intégrale est divergente.

Si $p < 1$, alors $p - 1 < 0$, donc $\frac{1}{t^{p-1}} \to 0$ à mesure que $t \to 0^+$ et $\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p}\left[\lim_{t\to 0^+}(1 - t^{1-p})\right] = \frac{1}{1-p}$. Par conséquent, l'intégrale est convergente si et seulement si $p < 1$ et, dans ce cas, sa valeur est $\frac{1}{1-p}$.

58. Soit $u = \ln x$. Alors, $du = dx/x \quad \Rightarrow \quad \int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \int_1^\infty \frac{du}{u^p}$. Selon la formule 4, cette intégrale est convergente vers $\frac{1}{p-1}$ dans le cas où $p > 1$ et divergente dans tous les autres cas.

59. Posons d'abord que $p = -1$. Alors, $\int_0^1 x^p \ln x\, dx = \int_0^1 \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{t\to 0^+}\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_t^1 = -\frac{1}{2}\lim_{t\to 0^+}(\ln t)^2 = -\infty$; l'intégrale est donc divergente. Maintenant, posons que $p \neq -1$. Alors, en intégrant par parties, nous

 © Groupe Modulo inc., 2013

obtenons $\int x^p \ln x dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}\ln x - \int \frac{x^p}{p+1}dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}\ln x - \frac{x^{p+1}}{(p+1)^2} + C$. Si $p < -1$, alors $p + 1 < 0$, donc

$$\int_0^1 x^p \ln x\, dx = \lim_{t\to 0^+}\left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\ln x - \frac{x^{p+1}}{(p+1)^2}\right]_t^1 = \frac{-1}{(p+1)^2} - \left(\frac{1}{p+1}\right)\lim_{t\to 0^+}\left[t^{p+1}\left(\ln t - \frac{1}{p+1}\right)\right] = \infty .$$

Si $p > -1$, alors $p + 1 > 0$ et

$$\int_0^1 x^p \ln x\, dx = \frac{-1}{(p+1)^2} - \left(\frac{1}{p+1}\right)\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln t - 1/(p+1)}{t^{-(p+1)}} \overset{\text{H}}{=} \frac{-1}{(p+1)^2} - \left(\frac{1}{p+1}\right)\lim_{t\to 0^+}\frac{1/t}{-(p+1)t^{-(p+2)}}$$
$$= \frac{-1}{(p+1)^2} + \frac{1}{(p+1)^2}\lim_{t\to 0^+} t^{p+1} = \frac{-1}{(p+1)^2}$$

Par conséquent, l'intégrale est convergente vers $-\frac{1}{(p+1)^2}$ si $p > -1$ et divergente dans tous les autres cas.

60. a)

$n = \mathbf{0}$: $\int_0^\infty x^n e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^t = \lim_{t\to\infty}\left[-e^{-t}+1\right] = 0+1 = 1$

$n = \mathbf{1}$: $\int_0^\infty x^n e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t xe^{-x}dx$. Pour évaluer $\int xe^{-x}dx$, intégrons par parties avec $u = x$,

$dv = e^{-x}dx \quad \Rightarrow \quad du = dx, v = -e^{-x}$.

Donc, $\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - \int -e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C = (-x-1)e^{-x} + C$ et

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t xe^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}\left[(-x-1)e^{-x}\right]_0^t = \lim_{t\to\infty}\left[(-t-1)e^{-t}+1\right] = \lim_{t\to\infty}\left[-te^{-t} - e^{-t} + 1\right]$$
$$= 0 - 0 + 1 \quad [\text{règle de l'Hospital}] \quad = 1$$

$n = \mathbf{2}$: $\int_0^\infty x^n e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t x^2 e^{-x}dx$. Pour évaluer $\int x^2 e^{-x}dx$, nous pourrions intégrer parties une seconde fois

ou bien utiliser la formule 97. Par conséquent,

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t x^2 e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}\left[-x^2e^{-x}\right]_0^t + 2\lim_{t\to\infty}\int_0^t xe^{-x}dx$$
$$= 0 + 0 + 2(1) \quad [\text{règle de l'Hospital et résultat du cas } n = 1] = 2$$

$n = \mathbf{3}$: $\int_0^\infty x^n e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t x^3 e^{-x}dx \overset{97}{=} \lim_{t\to\infty}\left[-x^3e^{-x}\right]_0^t + 3\lim_{t\to\infty}\int_0^t x^2e^{-x}dx$
$$= 0 + 0 + 3(2) \quad [\text{règle de l'Hospital et résultat du cas } n = 2] = 6$$

b) Pour n = 1, 2 et 3, nous obtenons $\int_0^\infty x^n e^{-x}dx = 1$, 2 et 6. Comme les valeurs de l'intégrale correspondent aux factorielles de n,

nous en déduisons que $\int_0^\infty x^n e^{-x}dx = n!$.

c) Supposons que $\int_0^\infty x^k e^{-x}dx = k!$ pour un entier positif quelconque k. Alors, $\int_0^\infty x^{k+1}e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t x^{k+1}e^{-x}dx$.

Pour évaluer $\int x^{k+1}e^{-x}dx$, intégrons par parties avec $u = x^{k+1}, dv = e^{-x}dx \quad \Rightarrow \quad du = (k+1)x^k dx, v = -e^{-x}$

 © Groupe Modulo inc., 2013

Donc, $\int x^{k+1}e^{-x}dx = -x^{k+1}e^{-x} - \int -(k+1)x^k e^{-x}dx = -x^{k+1}e^{-x} + (k+1)\int x^k e^{-x}dx$ et

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\int_0^t x^{k+1}e^{-x}dx &= \lim_{t\to\infty}\left[-x^{k+1}e^{-x}\right]_0^t + (k+1)\lim_{t\to\infty}\int_0^t x^k e^{-x}dx \\ &= \lim_{t\to\infty}\left[-t^{k+1}e^{-t} + 0\right] + (k+1)k! = 0 + 0 + (k+1)! = (k+1)!,\end{aligned}$$

Ce qui montre que la formule est vraie avec $k + 1$. Par induction mathématique, la formule est bonne pour tous les entiers positifs. (Puisque 0! = 1, la formule est également valable pour $n = 0$.)

61. a) $I = \int_{-\infty}^{\infty} x\,dx = \int_{-\infty}^{0} x\,dx + \int_0^{\infty} x\,dx$ et $\int_0^{\infty} x\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t x\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^t = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{2}t^2 - 0\right] = \infty$, donc I est divergente.

b) $\int_{-t}^{t} x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-t}^{t} = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t^2 = 0$, donc $\lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t} x\,dx = 0$. Par conséquent, $\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx \neq \lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t} x\,dx$.

62. Posons $k = \dfrac{M}{2RT}$. Ainsi, $\overline{v} = \dfrac{4}{\sqrt{\pi}}k^{3/2}\int_0^{\infty} v^3 e^{-kv^2}dv$. Notons l'intégrale I et intégrons par parties. Soit $\alpha = v^2$,

$d\beta = ve^{-kv^2}dv \quad\Rightarrow\quad d\alpha = 2v\,dv$, $\beta = -\dfrac{1}{2k}e^{-kv^2}$:

$$\begin{aligned}I &= \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{2k}v^2e^{-kv^2}\right]_0^t + \frac{1}{k}\int_0^{\infty} ve^{-kv^2}dv = -\frac{1}{2k}\lim_{t\to\infty}\left(t^2e^{-kt^2}\right) + \frac{1}{k}\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{2k}e^{-kv^2}\right] \\ &\overset{\text{H}}{=} -\frac{1}{2k}\cdot 0 - \frac{1}{2k^2}(0-1) = \frac{1}{2k^2}\end{aligned}$$

Par conséquent, $\overline{v} = \dfrac{4}{\sqrt{\pi}}k^{3/2}\cdot\dfrac{1}{2k^2} = \dfrac{2}{(k\pi)^{1/2}} = \dfrac{2}{[\pi M/(2RT)]^{1/2}} = \dfrac{2\sqrt{2}\sqrt{RT}}{\sqrt{\pi M}} = \sqrt{\dfrac{8RT}{\pi M}}$.

63. $\text{Volume} = \int_1^{\infty}\pi\left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi\lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{dx}{x^2} = \pi\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^t = \pi\lim_{t\to\infty}\left(1 - \frac{1}{t}\right) = \pi$.

64. $\text{Travail} = \int_R^{\infty}\frac{GMm}{r^2}dr = \lim_{t\to\infty}\int_R^t \frac{GMm}{r^2}dr = \lim_{t\to\infty} GMm\left[\frac{-1}{r}\right]_R^t = GMm\lim_{t\to\infty}\left(\frac{-1}{t} + \frac{1}{R}\right) = \frac{GMm}{R}$, où M = masse de la terre = $5{,}98 \times 10^{24}$ kg,

m = masse du véhicule spatial = 10^3 kg, R = rayon de la terre = $6{,}37 \times 10^6$ m et G = constante gravitationnelle

= $6{,}67 \times 10^{-11}$ N·m^2/kg.

Par conséquent, $\text{Travail} = \dfrac{6{,}67\times10^{-11}\cdot 5{,}98\times10^{24}\cdot 10^3}{6{,}37\times10^6} \approx 6{,}26\times10^{10}$ J.

65. $\text{Travail} = \int_R^{\infty} F dr = \lim_{t\to\infty}\int_R^t \frac{GmM}{r^2}dr = \lim_{t\to\infty} GmM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{t}\right) = \frac{GmM}{R}$.

L'énergie cinétique initiale fournit le travail requis, donc $\frac{1}{2}mv_0^2 = \dfrac{GmM}{R} \quad\Rightarrow\quad v_0 = \sqrt{\dfrac{2GM}{R}}$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

66. $y(s)=\int_s^R \frac{2r}{\sqrt{r^2-s^2}}x(r)dr$ et $x(r)=\frac{1}{2}(R-r)^2 \quad \Rightarrow$

$$\begin{aligned} y(s) &= \lim_{t\to s^+}\int_t^R \frac{r(R-r)^2}{\sqrt{r^2-s^2}}\,dr = \lim_{t\to s^+}\int_t^R \frac{r^3-2Rr^2+R^2r}{\sqrt{r^2-s^2}}\,dr \\ &= \lim_{t\to s^+}\left[\int_t^R \frac{r^3dr}{\sqrt{r^2-s^2}} - 2R\int_t^R \frac{r^2dr}{\sqrt{r^2-s^2}} + R^2\int_t^R \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-s^2}}\right] = \lim_{t\to s^+}(I_1-2RI_2+R^2I_3) = L \end{aligned}$$

Pour I_1 : Soit $u=\sqrt{r^2-s^2} \quad \Rightarrow \quad u^2=r^2-s^2$, $r^2=u^2+s^2$, $2r\,dr=2u\,du$; donc, en omettant les limites et la constante d'intégration,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{(u^2+s^2)u}{u}\,du = \int (u^2+s^2)du = \tfrac{1}{3}u^3+s^2u = \tfrac{1}{3}u(u^2+3s^2) \\ &= \tfrac{1}{3}\sqrt{r^2-s^2}\,(r^2-s^2+3s^2) = \tfrac{1}{3}\sqrt{r^2-s^2}\,(r^2+2s^2) \end{aligned}$$

Pour I_2 : Au moyen de la formule 44, $I_2=\frac{r}{2}\sqrt{r^2-s^2}+\frac{s^2}{2}\ln\left|r+\sqrt{r^2-s^2}\right|$.

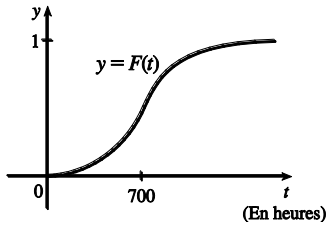
Pour I_3 : Soit $u=r^2-s^2 \quad \Rightarrow \quad du=2r\,dr$. Alors, $I_3=\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{u}}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{u}=\sqrt{r^2-s^2}$.

Par conséquent,

$$\begin{aligned} L &= \lim_{t\to s^+}\left[\tfrac{1}{3}\sqrt{r^2-s^2}\,(r^2+2s^2) - 2R\left(\frac{r}{2}\sqrt{r^2-s^2}+\frac{s^2}{2}\ln\left|r+\sqrt{r^2-s^2}\right|\right)+R^2\sqrt{r^2-s^2}\right]_t^R \\ &= \lim_{t\to s^+}\left[\tfrac{1}{3}\sqrt{R^2-s^2}\,(R^2+2s^2) - 2R\left(\frac{R}{2}\sqrt{R^2-s^2}+\frac{s^2}{2}\ln\left|R+\sqrt{R^2-s^2}\right|\right)+R^2\sqrt{R^2-s^2}\right] \\ &\quad - \lim_{t\to s^+}\left[\tfrac{1}{3}\sqrt{t^2-s^2}\,(t^2+2s^2) - 2R\left(\frac{t}{2}\sqrt{t^2-s^2}+\frac{s^2}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2-s^2}\right|\right)+R^2\sqrt{t^2-s^2}\right] \\ &= \left[\tfrac{1}{3}\sqrt{R^2-s^2}\,(R^2+2s^2) - Rs^2\ln\left|R+\sqrt{R^2-s^2}\right|\right] - \left[-Rs^2\ln|s|\right] \\ &= \tfrac{1}{3}\sqrt{R^2-s^2}\,(R^2+2s^2) - Rs^2\ln\left(\frac{R+\sqrt{R^2-s^2}}{s}\right) \end{aligned}$$

67. On pourrait s'attendre à ce que la durée de vie d'un petit pourcentage des ampoules soit de quelques centaines d'heures, que celle de la plupart des ampoules soit de près de 700 heures et que celle de quelques ampoules soit prolongée.

a)



b) $r(t)=F'(t)$ est le taux auquel la fraction $F(t)$ d'ampoules grillées augmente à mesure que t augmente. On pourrait interpréter cette fraction comme un taux de grillage fractionnel.

c) $\int_0^\infty r(t)\,dt=\lim_{x\to\infty}F(x)=1$, puisque toutes les ampoules vont éventuellement griller.

 © Groupe Modulo inc., 2013

68. $I=\int_0^\infty te^{kt}dt=\lim_{s\to\infty}\left[\frac{1}{k^2}(kt-1)e^{kt}\right]_0^s$ [Formula 96, ou intégration par parties] $=\lim_{s\to\infty}\left[\left(\frac{1}{k}se^{ks}-\frac{1}{k^2}e^{ks}\right)-\left(-\frac{1}{k^2}\right)\right]$. Puisque $k<0$, les deux premiers termes se rapprochent de 0 (il est possible de vérifier que c'est le cas du premier terme en se servant de la règle de L'Hospital); la limite est donc égale à $1/k^2$.

Par conséquent, $M=-kI=-k\left(1/k^2\right)=-1/k=-1/(-0,000\,121)\approx 8\,264,5$ années.

69. $I=\int_a^\infty\frac{1}{x^2+1}dx=\lim_{t\to\infty}\int_a^t\frac{1}{x^2+1}dx=\lim_{t\to\infty}[\arctan x]_a^t=\lim_{t\to\infty}(\arctan t-\arctan a)=\frac{\pi}{2}-\arctan a$

$I<0,001 \;\Rightarrow\; \frac{\pi}{2}-\arctan a<0,001 \;\Rightarrow\; \arctan a>\frac{\pi}{2}-0,001 \;\Rightarrow\; a>\tan(\frac{\pi}{2}-0,001)\approx 1000$.

70. $f(x)=e^{-x^2}$ et $\Delta x=\frac{4-0}{8}=\frac{1}{2}$.

$$\int_0^4 f(x)dx\approx S_8=\tfrac{1}{2\cdot 3}[f(0)+4f(0,5)+2f(1)+\cdots+2f(3)+4f(3,5)+f(4)]\approx\tfrac{1}{6}(5,317\,178\,08)\approx 0,8862$$

Or, $x>4 \;\Rightarrow\; -x\cdot x<-x\cdot 4 \;\Rightarrow\; e^{-x^2}<e^{-4x} \;\Rightarrow\; \int_4^\infty e^{-x^2}dx<\int_4^\infty e^{-4x}dx$.

$\int_4^\infty e^{-4x}dx=\lim_{t\to\infty}[-\frac{1}{4}e^{-4x}]_4^t=-\frac{1}{4}(0-e^{-16})=1/(4e^{16})\approx 0,000\,000\,028\,1<0,000\,000\,1$, ce qu'il fallait démontrer.

71. a) $F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt=\int_0^\infty e^{-st}dt=\lim_{n\to\infty}\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^{-sn}}{-s}+\frac{1}{s}\right)$. Cette intégrale converge vers $\frac{1}{s}$ seulement si $s>0$. Par conséquent, $F(s)=\frac{1}{s}$ et le domaine de F est $\{s\mid s>0\}$.

b) $F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt=\int_0^\infty e^te^{-st}dt=\lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{t(1-s)}dt=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1-s}e^{t(1-s)}\right]_0^n$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^{(1-s)n}}{1-s}-\frac{1}{1-s}\right)$

Cette intégrale est convergente seulement si $1-s<0 \;\Rightarrow\; s>1$, dans lequel cas $F(s)=\frac{1}{s-1}$ et le domaine de F est $\{s\mid s>1\}$.

c) $F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt=\lim_{n\to\infty}\int_0^n te^{-st}dt$. Intégrons par parties : soit $u=t, dv=e^{-st}dt \;\Rightarrow\; du=dt,\ v=\frac{-e^{-st}}{s}$.

Alors, $F(s)=\lim_{n\to\infty}\left[-\frac{t}{s}e^{-st}-\frac{1}{s^2}e^{-st}\right]_0^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-n}{se^{sn}}-\frac{1}{s^2e^{sn}}+0+\frac{1}{s^2}\right)=\frac{1}{s^2}$ seulement si $s>0$. Par conséquent, $F(s)=\frac{1}{s^2}$ et le domaine de F est $\{s\mid s>0\}$.

72. $0\le f(t)\le Me^{at} \;\Rightarrow\; 0\le f(t)e^{-st}\le Me^{at}e^{-st}$ pour $t\ge 0$. Utilisons maintenant le théorème de comparaison :

$$\int_0^\infty Me^{at}e^{-st}dt=\lim_{n\to\infty}M\int_0^n e^{t(a-s)}dt=M\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{a-s}e^{t(a-s)}\right]_0^n=M\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a-s}[e^{n(a-s)}-1]$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

Cette intégrale n'est convergente que si $a - s < 0 \quad \Rightarrow \quad s > a$. Par conséquent, par comparaison, $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ est aussi convergente pour $s > a$.

73. $G(s) = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt$. Intégrons par parties avec $u = e^{-st},\ dv = f'(t)dt \quad \Rightarrow \quad du = -se^{-st}$, $v = f(t)$:

$$G(s) = \lim_{n\to\infty}[f(t)e^{-st}]_0^n + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \lim_{n\to\infty} f(n)e^{-sn} - f(0) + sF(s)$$

Cependant, $0 \le f(t) \le Me^{at} \quad \Rightarrow \quad 0 \le f(t)e^{-st} \le Me^{at}e^{-st}$ et $\lim_{t\to\infty} Me^{t(a-s)} = 0$ pour $s > a$. Donc, selon le théorème du sandwich,

$\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-st} = 0$ pour $s > a \quad \Rightarrow \quad G(s) = 0 - f(0) + sF(s) = sF(s) - f(0)$ pour $s > a$.

74. Supposons, sans perte de généralité, que $a < b$. Alors,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^\infty f(x)dx &= \lim_{t\to-\infty}\int_t^a f(x)dx + \lim_{u\to\infty}\int_a^u f(x)dx \\
&= \lim_{t\to-\infty}\int_t^a f(x)dx + \lim_{u\to\infty}\left[\int_a^b f(x)dx + \int_b^u f(x)dx\right] \\
&= \lim_{t\to-\infty}\int_t^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx + \lim_{u\to\infty}\int_b^u f(x)dx \\
&= \lim_{t\to-\infty}\left[\int_t^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx\right] + \int_b^\infty f(x)dx \\
&= \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)dx + \int_b^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^b f(x)dx + \int_b^\infty f(x)dx
\end{aligned}$$

75. Intégrons par parties : soit $u = x,\ dv = xe^{-x^2}dx \quad \Rightarrow \quad du = dx$, $v = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$. Donc,

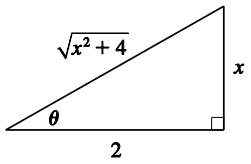
$$\int_0^\infty x^2e^{-x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{2}xe^{-x^2}\right]_0^t + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{t}{2e^{t^2}}\right] + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x^2}dx$$

(La limite est 0 selon la règle de L'Hospital.)

76. $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ est l'aire de la région sous la courbe $y = e^{-x^2}$ pour $0 \le x < \infty$ et $0 < y \le 1$. En exprimant $y = e^{-x^2}$ en termes de x, nous obtenons $y = e^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad \ln y = -x^2 \quad \Rightarrow \quad -\ln y = x^2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{-\ln y}$. Puisque x est positif, $x = \sqrt{-\ln y}$. L'aire est donc donnée par $\int_0^1 \sqrt{-\ln y}\ dy$. Par conséquent, les deux intégrales donnent la même aire et elles sont donc égales.

77. Pour la première partie de l'intégrale, soit $x = 2\tan\theta \quad \Rightarrow \quad dx = 2\sec^2\theta d\theta$.

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx = \int \frac{2\sec^2\theta}{2\sec\theta}d\theta = \int \sec\theta d\theta = \ln|\sec\theta + \tan\theta|$. Selon la figure $\tan\theta = \frac{x}{2}$ et $\sec\theta = \frac{\sqrt{x^2+4}}{2}$. Donc,



 © Groupe Modulo inc., 2013

$$I=\int_0^\infty\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}-\frac{C}{x+2}\right)dx=\lim_{t\to\infty}\left[\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4}}{2}+\frac{x}{2}\right|-C\ln|x+2|\right]_0^t$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left[\ln\frac{\sqrt{t^2+4}+t}{2}-C\ln(t+2)-(\ln 1-C\ln 2)\right]$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left[\ln\left(\frac{\sqrt{t^2+4}+t}{2(t+2)^C}\right)+\ln 2^C\right]=\ln\left(\lim_{t\to\infty}\frac{t+\sqrt{t^2+4}}{(t+2)^C}\right)+\ln 2^{C-1}$$

Or, $L=\lim_{t\to\infty}\frac{t+\sqrt{t^2+4}}{(t+2)^C}\overset{\text{H}}{=}\lim_{t\to\infty}\frac{1+t/\sqrt{t^2+4}}{C(t+2)^{C-1}}=\frac{2}{C\lim_{t\to\infty}(t+2)^{C-1}}$.

Si $C<1$, $L=\infty$ et l'intégrale I est divergente.

Si $C=1$, $L=2$ et l'intégrale I est convergente vers $\ln 2+\ln 2^0=\ln 2$.

Si $C>1$, $L=0$ et l'intégrale I est divergente vers $-\infty$.

78. $I=\int_0^\infty\left(\frac{x}{x^2+1}-\frac{C}{3x+1}\right)dx=\lim_{t\to\infty}[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\frac{1}{3}C\ln(3x+1)]_0^t=\lim_{t\to\infty}[\ln(t^2+1)^{1/2}-\ln(3t+1)^{C/3}]$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(\ln\frac{(t^2+1)^{1/2}}{(3t+1)^{C/3}}\right)=\ln\left(\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2+1}}{(3t+1)^{C/3}}\right)$$

Pour $C\le 0$, l'intégrale est divergente. Pour $C>0$, nous avons

$$L=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2+1}}{(3t+1)^{C/3}}\overset{\text{H}}{=}\lim_{t\to\infty}\frac{t/\sqrt{t^2+1}}{C(3t+1)^{(C/3)-1}}=\frac{1}{C}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{(3t+1)^{(C/3)-1}}$$

Pour $C/3<1 \iff C<3$, $L=\infty$ et l'intégrale I est divergente.

Pour $C=3$, $L=\frac{1}{3}$ et $I=\ln\frac{1}{3}$.

Pour $C>3$, $L=0$ et l'intégrale I est divergente vers $-\infty$.

79. Non, $I=\int_0^\infty f(x)dx$ est *divergente*. En effet, puisque $\lim_{x\to\infty}f(x)=1$, il existe une valeur N telle que si $x\ge N$, alors $f(x)\ge\frac{1}{2}$. Par conséquent, $I=I_1+I_2=\int_0^N f(x)dx+\int_N^\infty f(x)dx$, où I_2 est une intégrale impropre qui diverge par comparaison avec l'intégrale divergente $\int_N^\infty\frac{1}{2}dx$.

80. Comme à l'exercice 55, notons $I=\int_0^\infty\frac{x^a}{1+x^b}dx=I_1+I_2$, où $I_1=\int_0^1\frac{x^a}{1+x^b}dx$ et $I_2=\int_1^\infty\frac{x^a}{1+x^b}dx$. Nous allons montrer que I_1 est convergente pour $a>-1$ et que I_2 est convergente pour $b>a+1$, de sorte que I est convergente lorsque $a>-1$ et $b>a+1$.

I_1 est impropre seulement lorsque $a<0$. Lorsque $0\le x\le 1$, nous avons $\frac{1}{1+x^b}\le 1 \implies \frac{1}{x^{-a}(1+x^b)}\le\frac{1}{x^{-a}}$.

L'intégrale $\int_0^1\frac{1}{x^{-a}}dx$ est convergente pour $-a<1$ [ou $a>-1$] selon l'exercice 57; donc, par comparaison,

 © Groupe Modulo inc., 2013

l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{x^{-a}(1+x^b)}dx$ est convergente pour $-1 < a < 0$. I_1 n'est pas impropre lorsque $a \geq 0$; elle a donc une valeur réelle dans ce cas. Par conséquent, I_1 a une valeur réelle finie (est convergente) lorsque $a > -1$.

I_2 est toujours impropre. Lorsque $x \geq 1$, $\frac{x^a}{1+x^b} = \frac{1}{x^{-a}(1+x^b)} = \frac{1}{x^{-a}+x^{b-a}} < \frac{1}{x^{b-a}}$. Selon la formule 2, l'intégrale $\int_1^\infty \frac{1}{x^{b-a}}dx$ est convergente pour $b - a > 1$ (ou $b > a+ 1$); donc, par comparaison, l'intégrale $\int_1^\infty \frac{x^a}{1+x^b}dx$ est convergente pour $b > a+ 1$.

Par conséquent, I est convergente si $a > -1$ et $b > a + 1$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

3. Révision

Compréhension de concepts

1. Voir formule 3.1.1 ou 3.1.2. Nous désirons choisir $u = f(x)$ de façon à obtenir une fonction qui deviendra plus simple lorsqu'on en prendra la dérivée (ou, à tout le moins, qui ne deviendra pas plus compliquée) pourvu qu'on puisse aisément effectuer l'intégration de $dv = g'(x)\,dx$ afin d'obtenir v.

2. Voir Technique pour le calcul de $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$ aux pages 130 et 131.

3. S'il s'agit de $\sqrt{a^2 - x^2}$, on pose $x = a \sin\theta$; s'il s'agit de $\sqrt{a^2 + x^2}$, on pose $x = a \tan\theta$, et s'il s'agit de $\sqrt{x^2 - a^2}$, on pose $x = a \sec\theta$. Voir Table des substitutions trigonométriques à la page 136.

4. Voir formule 2 et les expressions 7, 9 et 11 à la section 3.4.

5. Voir la méthode des milieux des sous-intervalles, la méthode des trapèzes et la méthode de Simpson, ainsi qu'aux incertitudes sur les approximations qui leur sont associées, à la section 3.6. Nous nous attendons à ce que la méthode de Simpson donne l'estimation la plus précise.

6. Voir définitions 1 a), b) et c) à la section 3.8.

7. Voir définitions 3 b), a) et c) à la section 3.8.

8. Voir le théorème de comparaison apparaissant après l'exemple 8 à la section 3.8.

Vrai ou faux

1. Faux. Puisque le degré du polynôme au numérateur est supérieur à celui au dénominateur,

$$\frac{x(x^2+4)}{x^2-4} = x + \frac{8x}{x^2-4} = x + \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2}.$$

2. Vrai. On trouve, $A = -1$, $B = C = 1$.

3. Faux. Le développement à écrire doit être $\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-4}$.

4. Faux. Le développement à écrire doit être $\frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

5. Faux. Il s'agit d'une intégrale impropre, puisque le dénominateur s'annule lorsque $x = 1$.

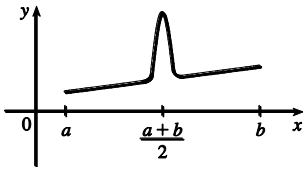
$\int_0^4 \frac{x}{x^2-1}dx = \int_0^1 \frac{x}{x^2-1}dx + \int_1^4 \frac{x}{x^2-1}dx$ et

$\int_0^1 \frac{x}{x^2-1}dx = \lim_{t\to 1^-}\int_0^t \frac{x}{x^2-1}dx = \lim_{t\to 1^-}[\frac{1}{2}\ln|x^2-1|]_0^t = \lim_{t\to 1^-}\frac{1}{2}\ln|t^2-1| = \infty$ L'intégrale est donc divergente.

6. Vrai selon le théorème 3.8.2 avec $p = \sqrt{2} > 1$.

7. Faux. Voir l'exercice 61 à la section 3.8.

8. Faux. Par exemple, avec $n = 1$, la méthode des trapèzes est meilleure que celle des milieux des sous-intervalles dans le cas de la fonction montrée dans le graphique.



9. a) Vrai. Voir la fin de la section 3.5.

b) Faux. Voici quelques exemples : $f(x) = e^{x^2}$, $g(x) = \sin(x^2)$ et $h(x) = \frac{\sin x}{x}$.

10. Vrai. Si la fonction f est continue sur l'intervalle $[0, \infty[$, elle l'est sur $[0, 1]$ et donc l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$ est un nombre réel. Puisque l'intégrale $\int_1^\infty f(x)dx$ cenverge, l'intégrale $\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^\infty f(x)dx$ converge également.

11. Faux. Si $f(x) = 1/x$, alors f est continue et décroissante sur l'intervalle $[1, \infty[$ où $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, mais l'intégrale $\int_1^\infty f(x)dx$ est divergente.

12. Vrai.

$$\begin{aligned}\int_a^\infty [f(x)+g(x)]dx &= \lim_{t\to\infty}\int_a^t [f(x)+g(x)]dx = \lim_{t\to\infty}\left(\int_a^t f(x)dx + \int_a^t g(x)dx\right)\\ &= \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx + \lim_{t\to\infty}\int_a^t g(x)dx \quad \left[\begin{array}{l}\text{puisque chaque limite}\\ \text{dans cette somme existent}\end{array}\right]\\ &= \int_a^\infty f(x)dx + \int_a^\infty g(x)dx\end{aligned}$$

Puisque les deux intégrales sont finies, leur somme l'est également.

 © Groupe Modulo inc., 2013

13. Faux. Posons $f(x) = 1$ pour tout x et $g(x) = -1$ pour tout x. Alors, $\int_a^\infty f(x)dx = \infty$ [intégrale divergente] et $\int_a^\infty g(x)dx = -\infty$ [intégrale divergente], mais $\int_a^\infty [f(x) + g(x)]dx = 0$ [intégrale convergente].

14. Faux. L'intégrale $\int_0^\infty f(x)dx$ pourrait être convergente ou divergente. Par exemple, si $g(x) = 1$, alors l'intégrale $\int_0^\infty f(x)dx$ est divergente si $f(x) = 1$ et convergente si $f(x) = 0$.

Exercices récapitulatifs

1. $$\int_1^2 \frac{(x+1)^2}{x}dx = \int_1^2 \frac{x^2+2x+1}{x}dx = \int_1^2 \left(x+2+\frac{1}{x}\right)dx = \left[\frac{1}{2}x^2+2x+\ln|x|\right]_1^2$$
$$= (2+4+\ln 2) - (\tfrac{1}{2}+2+0) = \tfrac{7}{2}+\ln 2$$

2. $$\int_1^2 \frac{x}{(x+1)^2}dx = \int_2^3 \frac{u-1}{u^2}du \quad \begin{bmatrix} u = x+1, \\ du = dx \end{bmatrix}$$
$$= \int_2^3 \left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u^2}\right)du = \left[\ln|u|+\frac{1}{u}\right]_2^3 = \left(\ln 3+\frac{1}{3}\right)-\left(\ln 2+\frac{1}{2}\right) = \ln\frac{3}{2}-\frac{1}{6}$$

3. $$\int_0^{\pi/2} \sin\theta e^{\cos\theta}d\theta = \int_1^0 e^u(-du) \quad \begin{bmatrix} u = \cos\theta, \\ du = -\sin\theta d\theta \end{bmatrix}$$
$$= \int_0^1 e^u du = [e^u]_0^1 = e^1 - e^0 = e-1$$

4. $$\int_0^{\pi/6} t\sin 2t\ dt = [-\tfrac{1}{2}t\cos 2t]_0^{\pi/6} - \int_0^{\pi/6}(-\tfrac{1}{2}\cos 2t)dt \quad \begin{bmatrix} u = t, & dv = \sin 2t \\ du = dt, & v = -\frac{1}{2}\cos 2t \end{bmatrix}$$
$$= (-\tfrac{\pi}{12}\cdot\tfrac{1}{2}) - (0) + [\tfrac{1}{4}\sin 2t]_0^{\pi/6} = -\tfrac{\pi}{24}+\tfrac{1}{8}\sqrt{3}$$

5. $$\int \frac{dt}{2t^2+3t+1} = \int \frac{1}{(2t+1)(t+1)}dt = \int\left(\frac{2}{2t+1}-\frac{1}{t+1}\right)dt \quad \text{[fractions partielles]} \quad = \ln|2t+1| - \ln|t+1| + C$$

6. $$\int_1^2 x^5 \ln x\ dx = [\tfrac{1}{6}x^6\ln x]_1^2 - \int_1^2 \tfrac{1}{6}x^5 dx \quad \begin{bmatrix} u = \ln x, & dv = x^5dx \\ du = \frac{1}{x}dx, & v = \frac{1}{6}x^6 \end{bmatrix}$$
$$= \tfrac{64}{6}\ln 2 - 0 - [\tfrac{1}{36}x^6]_1^2 = \tfrac{32}{3}\ln 2 - (\tfrac{64}{36}-\tfrac{1}{36}) = \tfrac{32}{3}\ln 2 - \tfrac{7}{4}$$

7. $$\int_0^{\pi/2} \sin^3\theta\cos^2\theta d\theta = \int_0^{\pi/2}(1-\cos^2\theta)\cos^2\theta\sin\theta d\theta = \int_1^0 (1-u^2)u^2(-du) \quad \begin{bmatrix} u = \cos\theta, \\ du = -\sin\theta d\theta \end{bmatrix}$$
$$= \int_0^1 (u^2-u^4)du = [\tfrac{1}{3}u^3 - \tfrac{1}{5}u^5]_0^1 = (\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{5}) - 0 = \tfrac{2}{15}$$

8. Posons $u = \sqrt{e^x - 1}$, de sorte que $u^2 = e^x - 1$, $2u\,du = e^x\,dx$ et $e^x = u^2 + 1$. Alors,

$$\int \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}dx = \int \frac{1}{u}\frac{2u\,du}{u^2+1} = 2\int \frac{1}{u^2+1}du = 2\arctan u + C = 2\arctan\sqrt{e^x-1} + C.$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

9. Posons $u = \ln t$, $du = dt/t$. Alors, $\int \frac{\sin(\ln t)}{t}\,dt = \int \sin u\ du = -\cos u + C = -\cos(\ln t) + C$.

10. Posons $u = \arctan x$, $du = dx/(1 + x^2)$. Alors, $\int_0^1 \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{u}\ du = \frac{2}{3}[u^{3/2}]_0^{\pi/4} = \frac{2}{3}\left[\frac{\pi^{3/2}}{4^{3/2}} - 0\right] = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}\pi^{3/2} = \frac{1}{12}\pi^{3/2}$.

11. Posons $x = \sec\theta$. Alors, $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx = \int_0^{\pi/3} \frac{\tan\theta}{\sec\theta}\sec\theta\tan\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/3} \tan^2\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/3} (\sec^2\theta - 1)\,d\theta = [\tan\theta - \theta]_0^{\pi/3} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$.

12. $\int \frac{e^{2x}}{1+e^{4x}}\,dx = \int \frac{1}{1+u^2}(\frac{1}{2}\,du) \quad \left[\begin{array}{c} u = e^{2x}, \\ du = 2e^{2x}dx \end{array}\right]$

$= \frac{1}{2}\arctan u + C = \frac{1}{2}\arctan e^{2x} + C$

13. Posons $w = \sqrt[3]{x}$. Alors, $w^3 = x$ et $3w^2\,dw = dx$, donc $\int e^{\sqrt[3]{x}}dx = \int e^w \cdot 3w^2 dw = 3I$. Afin d'évaluer I, posons $u = w^2$,

$dv = e^w dw \ \Rightarrow\ du = 2w\,dw$, $v = e^w$, donc $I = \int w^2 e^w dw = w^2e^w - \int 2we^w dw$. Maintenant, posons $U = w$,

$dV = e^w dw \ \Rightarrow\ dU = dw$, $V = e^w$. Donc, $I = w^2e^w - 2\left[we^w - \int e^w dw\right] = w^2e^w - 2we^w + 2e^w + C_1$ et, par

conséquent, $3I = 3e^w(w^2 - 2w + 2) + C = 3e^{\sqrt[3]{x}}(x^{2/3} - 2x^{1/3} + 2) + C$.

14. $\int \frac{x^2+2}{x+2}\,dx = \int\left(x - 2 + \frac{6}{x+2}\right)dx = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 6\ln|x+2| + C$

15. $\frac{x-1}{x^2+2x} = \frac{x-1}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} \ \Rightarrow\ x - 1 = A(x+2) + Bx$. En substituant $x = -2$, nous obtenons $-3 = -2B$, donc $B = \frac{3}{2}$. En

substituant $x = 0$, nous obtenons $-1 = 2A$, donc $A = -\frac{1}{2}$. Par conséquent, $\int \frac{x-1}{x^2+2x}\,dx = \int\left(\frac{-\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{3}{2}}{x+2}\right)dx = -\frac{1}{2}\ln|x| + \frac{3}{2}\ln|x+2| + C$.

16. $\int \frac{\sec^6\theta}{\tan^2\theta}\,d\theta = \int \frac{(\tan^2\theta+1)^2\sec^2\theta}{\tan^2\theta}\,d\theta \quad \left[\begin{array}{c} u = \tan\theta, \\ du = \sec^2\theta\,d\theta \end{array}\right] \quad = \int \frac{(u^2+1)^2}{u^2}\,du = \int \frac{u^4+2u^2+1}{u^2}\,du$

$= \int\left(u^2 + 2 + \frac{1}{u^2}\right)du = \frac{u^3}{3} + 2u - \frac{1}{u} + C = \frac{1}{3}\tan^3\theta + 2\tan\theta - \cot\theta + C$

17. Intégrons par parties avec $u = x$ et $dv = \sec x\tan x\,dx \ \Rightarrow\ du = dx$, $v = \sec x$:

$\int x\sec x\tan x\,dx = x\sec x - \int \sec x\,dx \overset{14}{=} x\sec x - \ln|\sec x + \tan x| + C$.

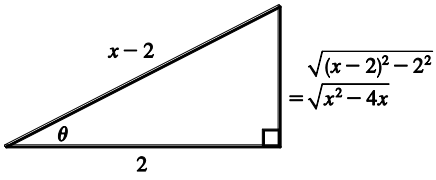
 © Groupe Modulo inc., 2013

18. $\dfrac{x^2+8x-3}{x^3+3x^2}=\dfrac{x^2+8x-3}{x^2(x+3)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x+3} \quad\Rightarrow\quad x^2+8x-3=Ax(x+3)+B(x+3)+Cx^2$. En substituant $x=0$, nous obtenons $-3=3B$, donc $B=-1$. En substituant $x=-3$, nous obtenons $-18=9C$, donc $C=-2$. En substituant $x=1$, nous obtenons $6=4A+4B+C=4A-4-2$, donc $4A=12$ et $A=3$. Maintenant, $\displaystyle\int\frac{x^2+8x-3}{x^3+3x^2}dx=\int\left(\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x+3}\right)dx=3\ln|x|+\frac{1}{x}-2\ln|x+3|+C$.

19.
$$\begin{aligned}\int\frac{x+1}{9x^2+6x+5}dx&=\int\frac{x+1}{(9x^2+6x+1)+4}dx=\int\frac{x+1}{(3x+1)^2+4}dx \quad \begin{bmatrix}u=3x+1,\\ du=3\,dx\end{bmatrix}\\
&=\int\frac{[\frac{1}{3}(u-1)]+1}{u^2+4}\left(\frac{1}{3}du\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\int\frac{(u-1)+3}{u^2+4}du\\
&=\frac{1}{9}\int\frac{u}{u^2+4}du+\frac{1}{9}\int\frac{2}{u^2+2^2}du=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2}\ln(u^2+4)+\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}u\right)+C\\
&=\tfrac{1}{18}\ln(9x^2+6x+5)+\tfrac{1}{9}\arctan[\tfrac{1}{2}(3x+1)]+C\end{aligned}$$

20.
$$\begin{aligned}\int\tan^5\theta\sec^3\theta d\theta&=\int\tan^4\theta\sec^2\theta\sec\theta\tan\theta d\theta=\int(\sec^2\theta-1)^2\sec^2\theta\sec\theta\tan\theta d\theta \quad \begin{bmatrix}u=\sec\theta,\\ du=\sec\theta\tan\theta d\theta\end{bmatrix}\\
&=\int(u^2-1)^2u^2du=\int(u^6-2u^4+u^2)du\\
&=\tfrac{1}{7}u^7-\tfrac{2}{5}u^5+\tfrac{1}{3}u^3+C=\tfrac{1}{7}\sec^7\theta-\tfrac{2}{5}\sec^5\theta+\tfrac{1}{3}\sec^3\theta+C\end{aligned}$$

21.
$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x}}&=\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2-4x+4)-4}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2-2^2}}\\
&=\int\frac{2\sec\theta\tan\theta d\theta}{2\tan\theta} \quad \begin{bmatrix}x-2=2\sec\theta,\\ dx=2\sec\theta\tan\theta d\theta\end{bmatrix}\\
&=\int\sec\theta d\theta=\ln|\sec\theta+\tan\theta|+C_1\\
&=\ln\left|\frac{x-2}{2}+\frac{\sqrt{x^2-4x}}{2}\right|+C_1\\
&=\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x}\right|+C,\ \text{où } C=C_1-\ln 2\end{aligned}$$



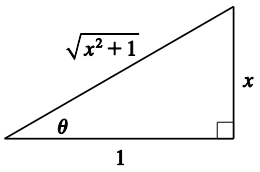
22. Posons $x=\sqrt{t}$, de sorte que $x^2=t$ et $2x\,dx=dt$. Alors,

$$\begin{aligned}\int te^{\sqrt{t}}dt&=\int x^2e^x(2x\,dx)=\int 2x^3e^xdx \quad \begin{bmatrix}u_1=2x^3, & dv_1=e^xdx,\\ du_1=6x^2dx & v_1=e^x\end{bmatrix}\\
&=2x^3e^x-\int 6x^2e^xdx \quad \begin{bmatrix}u_2=6x^2, & dv_2=e^xdx,\\ du_2=12x\,dx & v_2=e^x\end{bmatrix}\\
&=2x^3e^x-\left(6x^2e^x-\int 12xe^xdx\right) \quad \begin{bmatrix}u_3=12x, & dv_3=e^xdx,\\ du_3=12dx & v_3=e^x\end{bmatrix}\\
&=2x^3e^x-6x^2e^x+\left(12xe^x-\int 12e^xdx\right)=2x^3e^x-6x^2e^x+12xe^x-12e^x+C\\
&=2e^x(x^3-3x^2+6x-6)+C=2e^{\sqrt{t}}\left(t\sqrt{t}-3t+6\sqrt{t}-6\right)+C\end{aligned}$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

23. Posons $x = \tan\theta$, de sorte que $dx = \sec^2\theta\, d\theta$. Alors,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\tan\theta\sec\theta} = \int \frac{\sec\theta}{\tan\theta}\, d\theta$$
$$= \int \csc\theta\, d\theta = \ln|\csc\theta - \cot\theta| + C$$
$$= \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} - \frac{1}{x}\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right| + C$$



24. Posons $u = \cos x$, $dv = e^x dx \;\Rightarrow\; du = -\sin x\, dx$, $v = e^x$: (*) $I = \int e^x \cos x\, dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x\, dx$. Intégrons $\int e^x \sin x\, dx$ par parties en posant $U = \sin x$ et $dV = e^x dx \;\Rightarrow\; dU = \cos x\, dx$, $V = e^x$. Alors, $\int e^x \sin x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - I$. En effectuant un changement de variable dans (*), nous obtenons $I = e^x \cos x + e^x \sin x - I \;\Rightarrow\; 2I = e^x(\cos x + \sin x) + \mathrm{C} \;\Rightarrow\; I = \frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) + C$ où $C = \dfrac{C_1}{2}$.

25. $\dfrac{3x^3 - x^2 + 6x - 4}{(x^2+1)(x^2+2)} = \dfrac{Ax+B}{x^2+1} + \dfrac{Cx+D}{x^2+2} \;\Rightarrow\; 3x^3 - x^2 + 6x - 4 = (Ax+B)(x^2+2) + (Cx+D)(x^2+1)$. En posant l'égalité des coefficients, nous obtenons $A + C = 3$, $B + D = -1$, $2A + C = 6$ et $2B + D = -4 \;\Rightarrow\; A = 3$, $C = 0$, $B = -3$ et $D = 2$. Maintenant,

$$\int \frac{3x^3 - x^2 + 6x - 4}{(x^2+1)(x^2+2)}\, dx = 3\int \frac{x-1}{x^2+1}\, dx + 2\int \frac{dx}{x^2+2} = \frac{3}{2}\ln(x^2+1) - 3\arctan x + \sqrt{2}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

26. $\displaystyle\int x\sin x\cos x\, dx = \int \tfrac{1}{2}x\sin 2x\, dx \quad \begin{bmatrix} u = \frac{1}{2}x, & dv = \sin 2x\, dx, \\ du = \frac{1}{2}dx & v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{bmatrix}$
$$= -\tfrac{1}{4}x\cos 2x + \int \tfrac{1}{4}\cos 2x\, dx = -\tfrac{1}{4}x\cos 2x + \tfrac{1}{8}\sin 2x + C$$

27. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \sin 2x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^3 x(2\sin x\cos x)dx = \int_0^{\pi/2} 2\cos^4 x \sin x\, dx = [-\tfrac{2}{5}\cos^5 x]_0^{\pi/2} = \tfrac{2}{5}$

28. Posons $u = \sqrt[3]{x}$. Alors, $x = u^3$, $dx = 3u^2 du \;\Rightarrow$

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x}-1}\, dx = \int \frac{u+1}{u-1} 3u^2 du = 3\int \left(u^2 + 2u + 2 + \frac{2}{u-1}\right) du$$
$$= u^3 + 3u^2 + 6u + 6\ln|u-1| + C = x + 3x^{2/3} + 6\sqrt[3]{x} + 6\ln\left|\sqrt[3]{x} - 1\right| + C$$

29. L'intégrande est une fonction impaire, donc $\displaystyle\int_{-3}^{3} \frac{x}{1+|x|}\, dx = 0$ [selon 1.7.7 b)].

 © Groupe Modulo inc., 2013

30. Posons $u = e^{-x}$, $du = -e^{-x}\,dx$. Alors,

$$\int \frac{dx}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}} = \int \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{1-(e^{-x})^2}} = \int \frac{-du}{\sqrt{1-u^2}} = -\arcsin u + C = -\arcsin(e^{-x}) + C.$$

31. Posons $u = \sqrt{e^x - 1}$. Alors, $u^2 = e^x - 1$ et $2u\,du = e^x\,dx$. De plus, $e^x + 8 = u^2 + 9$. Par conséquent,

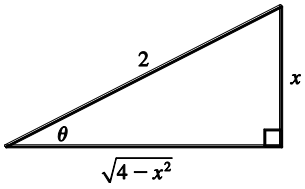
$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 10} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+8}dx &= \int_0^3 \frac{u\cdot 2u\,du}{u^2+9} = 2\int_0^3 \frac{u^2}{u^2+9}du = 2\int_0^3\left(1-\frac{9}{u^2+9}\right)du \\ &= 2\left[u - \frac{9}{3}\arctan\left(\frac{u}{3}\right)\right]_0^3 = 2[(3-3\arctan 1)-0] = 2\left(3-3\cdot\frac{\pi}{4}\right) = 6-\frac{3\pi}{2}\end{aligned}$$

32. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx = \int_0^{\pi/4} x\tan x\sec^2 x\,dx \quad \begin{bmatrix} u = x, & dv = \tan x\sec^2 x\,dx, \\ du = dx & v = \frac{1}{2}\tan^2 x \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}&= \left[\frac{x}{2}\tan^2 x\right]_0^{\pi/4} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\tan^2 x\,dx = \frac{\pi}{8}\cdot 1^2 - 0 - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}(\sec^2 x - 1)dx \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}[\tan x - x]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

33. Posons $x = 2\sin\theta \;\Rightarrow\; (4-x^2)^{3/2} = (2\cos\theta)^3$, $dx = 2\cos\theta\,d\theta$, donc

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(4-x^2)^{3/2}}dx &= \int \frac{4\sin^2\theta}{8\cos^3\theta}2\cos\theta d\theta = \int \tan^2\theta d\theta = \int(\sec^2\theta - 1)d\theta \\ &= \tan\theta - \theta + C = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} - \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + C\end{aligned}$$



34. Intégrons par parties deux fois en posant $u = (\arcsin x)^2$ et $dv = dx$:

$$I = \int(\arcsin x)^2 dx = x(\arcsin x)^2 - \int 2x\arcsin x\left(\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

Ensuite, posons $U = \arcsin x$ et $dV = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx \;\Rightarrow\; dU = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$, $V = -\sqrt{1-x^2}$. Donc

$$I = x(\arcsin x)^2 - 2\left[\arcsin x\left(-\sqrt{1-x^2}\right) + \int dx\right] = x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C$$

35. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+x^{3/2}}}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x\left(1+\sqrt{x}\right)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}} \quad \begin{bmatrix} u = 1+\sqrt{x}, \\ du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \end{bmatrix} = \int \frac{2du}{\sqrt{u}} = \int 2u^{-1/2}du$

$$= 4\sqrt{u} + C = 4\sqrt{1+\sqrt{x}} + C$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

36. $\displaystyle\int\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}d\theta=\int\frac{\dfrac{\cos\theta}{\cos\theta}-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\dfrac{\cos\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}d\theta=\int\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}d\theta=\ln|\cos\theta+\sin\theta|+C$

37. $\displaystyle\int(\cos x+\sin x)^2\cos 2x\,dx=\int(\cos^2 x+2\sin x\cos x+\sin^2 x)\cos 2x\,dx=\int(1+\sin 2x)\cos 2x\,dx$

$\displaystyle=\int\cos 2x\,dx+\tfrac{1}{2}\int\sin 4x\,dx=\tfrac{1}{2}\sin 2x-\tfrac{1}{8}\cos 4x+C$

Autre solution : $\displaystyle\int(\cos x+\sin x)^2\cos 2x\,dx=\int(\cos x+\sin x)^2(\cos^2 x-\sin^2 x)dx$

$\displaystyle=\int(\cos x+\sin x)^3(\cos x-\sin x)dx=\tfrac{1}{4}(\cos x+\sin x)^4+C_1$

38. $\displaystyle\int\frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int 2^u(2du)\quad\begin{bmatrix}u=\sqrt{x},\\ du=1/\left(2\sqrt{x}\right)dx\end{bmatrix}$

$\displaystyle=2\cdot\frac{2^u}{\ln 2}+C=\frac{2^{\sqrt{x}+1}}{\ln 2}+C$

39. Intégrons par parties $\displaystyle I=\int\frac{xe^{2x}}{(1+2x)^2}dx$. Posons $u=xe^{2x}$ et $\displaystyle dv=\frac{dx}{(1+2x)^2}$. Alors, $du=(x\cdot 2e^{2x}+e^{2x}\cdot 1)\,dx$ et $\displaystyle v=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+2x}$, donc

$$I=-\frac{1}{2}\cdot\frac{xe^{2x}}{1+2x}-\int\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{2x}(2x+1)}{1+2x}\right]dx=-\frac{xe^{2x}}{4x+2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2x}+C=e^{2x}\left(\frac{1}{4}-\frac{x}{4x+2}\right)+C\,.$$

Par conséquent, $\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{xe^{2x}}{(1+2x)^2}dx=\left[e^{2x}\left(\frac{1}{4}-\frac{x}{4x+2}\right)\right]_0^{1/2}=e\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)-1\left(\frac{1}{4}-0\right)=\frac{1}{8}e-\frac{1}{4}$.

40. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{\sqrt{\tan\theta}}{\sin 2\theta}d\theta=\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{\sqrt{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}}{2\sin\theta\cos\theta}d\theta=\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{1}{2}(\sin\theta)^{-1/2}(\cos\theta)^{-3/2}d\theta=\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^{-1/2}(\cos\theta)^{-2}d\theta$

$\displaystyle=\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{1}{2}(\tan\theta)^{-1/2}\sec^2\theta d\theta=\left[\sqrt{\tan\theta}\right]_{\pi/4}^{\pi/3}=\sqrt{\sqrt{3}}-\sqrt{1}=\sqrt[4]{3}-1$

41. $\displaystyle\int_1^\infty\frac{1}{(2x+1)^3}dx=\lim_{t\to\infty}\int_1^t\frac{1}{(2x+1)^3}dx=\lim_{t\to\infty}\int_1^t\tfrac{1}{2}(2x+1)^{-3}2dx=\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{4(2x+1)^2}\right]_1^t$

$\displaystyle=-\frac{1}{4}\lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{(2t+1)^2}-\frac{1}{9}\right]=-\frac{1}{4}\left(0-\frac{1}{9}\right)=\frac{1}{36}$

42. $\displaystyle\int_1^\infty\frac{\ln x}{x^4}dx=\lim_{t\to\infty}\int_1^t\frac{\ln x}{x^4}dx\quad\begin{bmatrix}u=\ln x, & dv=dx/x^4,\\ du=dx/x & v=-1/(3x^3)\end{bmatrix}$

$\displaystyle=\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{\ln x}{3x^3}\right]_1^t+\int_1^t\frac{1}{3x^4}dx=\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{\ln t}{3t^3}+0+\left[\frac{-1}{9x^3}\right]_1^t\right)\overset{\text{H}}{=}\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{9t^3}+\left[\frac{-1}{9t^3}+\frac{1}{9}\right]\right)$

$=0+0+\frac{1}{9}=\frac{1}{9}$

43. $\displaystyle\int\frac{dx}{x\ln x}\quad\begin{bmatrix}u=\ln x,\\ du=dx/x\end{bmatrix}=\int\frac{du}{u}=\ln|u|+C=\ln|\ln x|+C$, donc $\displaystyle\int_2^\infty\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{t\to\infty}\int_2^t\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{t\to\infty}[\ln|\ln x|]_2^t=\lim_{t\to\infty}[\ln(\ln t)-\ln(\ln 2)]=\infty$;

l'intégrale est donc divergente.

 © Groupe Modulo inc., 2013

44. Posons $u = \sqrt{y-2}$. Alors, $y = u^2 + 2$ et $dy = 2u\,du$, donc

$$\int \frac{y\,dy}{\sqrt{y-2}} = \int \frac{(u^2+2)2u\,du}{u} = 2\int (u^2+2)du = 2[\tfrac{1}{3}u^3 + 2u] + C$$

Par conséquent, $\int_2^6 \frac{y\,dy}{\sqrt{y-2}} = \lim_{t\to 2^+}\int_t^6 \frac{y\,dy}{\sqrt{y-2}} = \lim_{t\to 2^+}\left[\tfrac{2}{3}(y-2)^{3/2} + 4\sqrt{y-2}\right]_t^6$

$$= \lim_{t\to 2^+}\left[\tfrac{16}{3} + 8 - \tfrac{2}{3}(t-2)^{3/2} - 4\sqrt{t-2}\right] = \tfrac{40}{3}.$$

45. $\int_0^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = \lim_{t\to 0^+}\int_t^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx \overset{*}{=} \lim_{t\to 0^+}\left[2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x}\right]_t^4$

$$= \lim_{t\to 0^+}\left[(2\cdot 2\ln 4 - 4\cdot 2) - \left(2\sqrt{t}\ln t - 4\sqrt{t}\right)\right] \overset{**}{=} (4\ln 4 - 8) - (0-0) = 4\ln 4 - 8$$

(*) Posons $u = \ln x,\ dv = \frac{1}{\sqrt{x}}dx \quad\Rightarrow\quad du = \frac{1}{x}dx,\ v = 2\sqrt{x}$. Alors,

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\ln x - 2\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + C$$

(**) $\lim_{t\to 0^+}\left(2\sqrt{t}\ln t\right) = \lim_{t\to 0^+}\frac{2\ln t}{t^{-1/2}} \overset{\text{H}}{=} \lim_{t\to 0^+}\frac{2/t}{-\frac{1}{2}t^{-3/2}} = \lim_{t\to 0^+}\left(-4\sqrt{t}\right) = 0$

46. Notons que $f(x) = 1/(2-3x)$ présente une discontinuité à l'infini en $x = \frac{2}{3}$. Or,

$$\int_0^{2/3}\frac{1}{2-3x}dx = \lim_{t\to(2/3)^-}\int_0^t \frac{1}{2-3x}dx = \lim_{t\to(2/3)^-}[-\tfrac{1}{3}\ln|2-3x|]_0^t = -\tfrac{1}{3}\lim_{t\to(2/3)^-}[\ln|2-3t| - \ln 2] = \infty .$$

Puisque l'intégrale $\int_0^{2/3}\frac{1}{2-3x}dx$ est divergente, l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{2-3x}dx$ l'est également.

47. $\int_0^1 \frac{x-1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{t\to 0^+}\int_t^1\left(\frac{x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 (x^{1/2} - x^{-1/2})dx = \lim_{t\to 0^+}[\tfrac{2}{3}x^{3/2} - 2x^{1/2}]_t^1$

$$= \lim_{t\to 0^+}[(\tfrac{2}{3} - 2) - (\tfrac{2}{3}t^{3/2} - 2t^{1/2})] = -\tfrac{4}{3} - 0 = -\tfrac{4}{3}$$

48. $I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2-2x} = \int_{-1}^1 \frac{dx}{x(x-2)} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x(x-2)} + \int_0^1 \frac{dx}{x(x-2)} = I_1 + I_2$. Or, $\frac{1}{x(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} \quad\Rightarrow\quad 1 = A(x-2) + Bx$. En substituant

$x = 2$, nous obtenons $1 = 2B$, donc $B = \frac{1}{2}$. En substituant $x = 0$, nous obtenons $1 = -2A,\ A = -\frac{1}{2}$. Par conséquent,

$$I_2 = \lim_{t\to 0^+}\int_t^1\left(\frac{-\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{x-2}\right)dx = \lim_{t\to 0^+}[-\tfrac{1}{2}\ln|x| + \tfrac{1}{2}\ln|x-2|]_t^1 = \lim_{t\to 0^+}[(0+0) - (-\tfrac{1}{2}\ln t + \tfrac{1}{2}\ln|t-2|)]$$

$$= -\tfrac{1}{2}\ln 2 + \tfrac{1}{2}\lim_{t\to 0^+}\ln t = -\infty.$$

Puisque I_2 est divergente, I l'est également.

49. Posons $u = 2x + 1$. Alors,

 © Groupe Modulo inc., 2013

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{4x^2+4x+5}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}du}{u^2+4}=\tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}\frac{du}{u^2+4}+\tfrac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\frac{du}{u^2+4}$$
$$=\tfrac{1}{2}\lim_{t\to-\infty}[\tfrac{1}{2}\arctan(\tfrac{1}{2}u)]_t^0+\tfrac{1}{2}\lim_{t\to\infty}[\tfrac{1}{2}\arctan(\tfrac{1}{2}u)]_0^t=\tfrac{1}{4}[0-(-\tfrac{\pi}{2})]+\tfrac{1}{4}[\tfrac{\pi}{2}-0]=\tfrac{\pi}{4}.$$

50. $\int_1^{\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx=\lim_{t\to\infty}\int_1^{t}\frac{\arctan x}{x^2}dx$. Intégrons par parties :

$$\int\frac{\arctan x}{x^2}dx=\frac{-\arctan x}{x}+\int\frac{1}{x}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{-\arctan x}{x}+\int\left[\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right]dx$$
$$=\frac{-\arctan x}{x}+\ln|x|-\tfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+C=\frac{-\arctan x}{x}+\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{x^2+1}+C$$

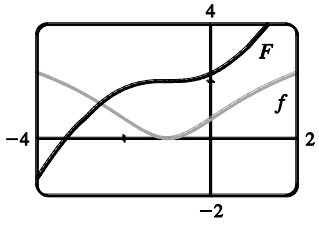
Par conséquent,

$$\int_1^{\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx=\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{\arctan x}{x}+\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{x^2+1}\right]_1^t=\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{\arctan t}{t}+\frac{1}{2}\ln\frac{t^2}{t^2+1}+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}\right]$$
$$=0+\tfrac{1}{2}\ln 1+\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{1}{2}\ln 2=\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{1}{2}\ln 2$$

51. Posons d'abord le changement de variable $t = x + 1$; donc, $\ln(x^2 + 2x + 2) = \ln[(x+1)^2 + 1] = \ln(t^2 + 1)$. Ensuite, intégrons par parties avec $u = \ln(t^2+1)$ et $dv = dt$:

$$\int\ln(t^2+1)dt=t\ln(t^2+1)-\int\frac{t(2t)dt}{t^2+1}=t\ln(t^2+1)-2\int\frac{t^2dt}{t^2+1}=t\ln(t^2+1)-2\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt$$
$$=t\ln(t^2+1)-2t+2\arctan t+C$$
$$=(x+1)\ln(x^2+2x+2)-2x+2\arctan(x+1)+K,\ \text{où } K=C-2$$

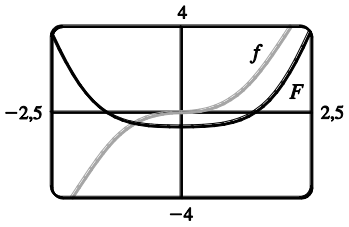
[Une autre façon de procéder aurait été d'intégrer par parties immédiatement avec $u = \ln(x^2 + 2x + 2)$.] Le graphique montre que $f = 0$ lorsque F a une tangente horizontale. De plus, F est toujours croissante et $f \geq 0$.



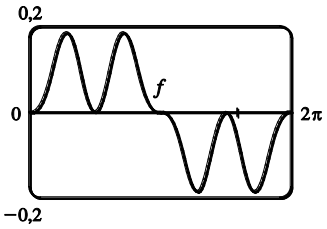
52. Posons $u = x^2 + 1$. Alors, $x^2 = u - 1$ et $x\,dx = \frac{1}{2}du$, donc

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int\frac{(u-1)}{\sqrt{u}}(\tfrac{1}{2}du)=\frac{1}{2}\int(u^{1/2}-u^{-1/2})du$$
$$=\tfrac{1}{2}(\tfrac{2}{3}u^{3/2}-2u^{1/2})+C=\tfrac{1}{3}(x^2+1)^{3/2}-(x^2+1)^{1/2}+C$$
$$=\tfrac{1}{3}(x^2+1)^{1/2}[(x^2+1)-3]+C=\tfrac{1}{3}\sqrt{x^2+1}(x^2-2)+C$$

 © Groupe Modulo inc., 2013



53. Le graphique semble montrer que l'intégrale $\int_0^{2\pi} \cos^2 x \sin^3 x \, dx$ est nulle. Afin d'évaluer l'intégrale, réécrivons-la sous la forme $I = \int_0^{2\pi} \cos^2 x(1-\cos^2 x)\sin x \, dx$ et posons $u = \cos x \quad \Rightarrow \quad du = -\sin x \, dx$. Par conséquent, $I = \int_1^1 u^2(1-u^2)(-du) = 0$.

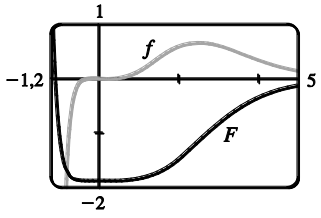


54. a) Pour calculer papier-crayon $\int x^5 e^{-2x} dx$, nous intégrerions par parties à répétition, en posant toujours $dv = e^{-2x}$ et en commençant par $u = x^5$. Chaque intégration par parties permettrait de réduire de 1 la puissance de x.

b) Pour calculer l'intégrale à l'aide d'une table d'intégrales, nous utiliserions la formule 97 (laquelle est prouvée au moyen de l'intégration par parties) jusqu'à ce que l'exposant de x soit réduit à 1. Nous utiliserions ensuite la formule 96.

c) $\int x^5 e^{-2x} dx = -\frac{1}{8} e^{-2x}(4x^5 + 10x^4 + 20x^3 + 30x^2 + 30x + 15) + C$

d)



55. $$\int \sqrt{4x^2 - 4x - 3}\, dx = \int \sqrt{(2x-1)^2 - 4}\, dx \quad \begin{bmatrix} u = 2x - 1, \\ du = 2dx \end{bmatrix} \quad = \int \sqrt{u^2 - 2^2}\, (\tfrac{1}{2} du)$$
$$\overset{39}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{u}{2}\sqrt{u^2 - 2^2} - \frac{2^2}{2} \ln\left| u + \sqrt{u^2 - 2^2} \right| \right) + C = \tfrac{1}{4} u \sqrt{u^2 - 4} - \ln\left| u + \sqrt{u^2 - 4} \right| + C$$
$$= \tfrac{1}{4}(2x-1)\sqrt{4x^2 - 4x - 3} - \ln\left| 2x - 1 + \sqrt{4x^2 - 4x - 3} \right| + C$$

56. $$\int \csc^5 t \, dt \overset{78}{=} -\tfrac{1}{4} \cot t \csc^3 t + \tfrac{3}{4} \int \csc^3 t \, dt \overset{72}{=} -\tfrac{1}{4} \cot t \csc^3 t + \tfrac{3}{4}[-\tfrac{1}{2} \csc t \cot t + \tfrac{1}{2} \ln|\csc t - \cot t|] + C$$
$$= -\tfrac{1}{4} \cot t \csc^3 t - \tfrac{3}{8} \csc t \cot t + \tfrac{3}{8} \ln|\csc t - \cot t| + C$$

57. Posons $u = \sin x$, alors $du = \cos x \, dx$. Ainsi,

 © Groupe Modulo inc., 2013

$$\int \cos x\sqrt{4+\sin^2 x}\ dx = \int \sqrt{2^2+u^2}\,du \overset{21}{=} \frac{u}{2}\sqrt{2^2+u^2} + \frac{2^2}{2}\ln\left(u+\sqrt{2^2+u^2}\right)+C$$
$$= \tfrac{1}{2}\sin x\sqrt{4+\sin^2 x} + 2\ln\left(\sin x+\sqrt{4+\sin^2 x}\right)+C$$

58. Posons $u = \sin x$, alors, $du = \cos x\,dx$. Ainsi,

$$\int \frac{\cot x\,dx}{\sqrt{1+2\sin x}} = \int \frac{du}{u\sqrt{1+2u}} \overset{57\ avec\ a=1,b=2}{=} \ln\left|\frac{\sqrt{1+2u}-1}{\sqrt{1+2u}+1}\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{1+2\sin x}-1}{\sqrt{1+2\sin x}+1}\right| + C$$

59. a) $$\frac{d}{du}\left[-\frac{1}{u}\sqrt{a^2-u^2} - \arcsin\left(\frac{u}{a}\right)+C\right] = \frac{1}{u^2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-u^2/a^2}}\cdot\frac{1}{a}$$
$$= (a^2-u^2)^{-1/2}\left[\frac{1}{u^2}(a^2-u^2)+1-1\right] = \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u^2}$$

b) Posons $u = a\sin\theta \ \Rightarrow\ du = a\cos\theta\,d\theta$, $a^2 - u^2 = a^2(1 - \sin^2\theta) = a^2\cos^2\theta$.

$$\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u^2}\,du = \int \frac{a^2\cos^2\theta}{a^2\sin^2\theta}\,d\theta = \int \frac{1-\sin^2\theta}{\sin^2\theta}\,d\theta = \int (\csc^2\theta - 1)\,d\theta = -\cot\theta - \theta + C$$
$$= -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u} - \arcsin\left(\frac{u}{a}\right)+C$$

60. En procédant à rebours et en intégrant par parties avec $U = u^{-(n-1)}$ et $dV = (a+bu)^{-1/2}du \ \Rightarrow\ dU = \frac{-(n-1)du}{u^n}$ et $V = \frac{2}{b}\sqrt{a+bu}$, nous obtenons

$$\int \frac{du}{u^{n-1}\sqrt{a+bu}} = \int U\ dV = UV - \int V\ dU = \frac{2\sqrt{a+bu}}{bu^{n-1}} + \frac{2(n-1)}{b}\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u^n}\,du$$
$$= \frac{2\sqrt{a+bu}}{bu^{n-1}} + \frac{2(n-1)}{b}\int \frac{a+bu}{u^n\sqrt{a+bu}}\,du$$
$$= \frac{2\sqrt{a+bu}}{bu^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{du}{u^{n-1}\sqrt{a+bu}} + \frac{2a(n-1)}{b}\int \frac{du}{u^n\sqrt{a+bu}}$$

Si nous transformons l'égalité, nous obtenons $\frac{2a(n-1)}{b}\int \frac{du}{u^n\sqrt{a+bu}} = -\frac{2\sqrt{a+bu}}{bu^{n-1}} - (2n-3)\int \frac{du}{u^{n-1}\sqrt{a+bu}} \ \Rightarrow$

$$\int \frac{du}{u^n\sqrt{a+bu}} = \frac{-\sqrt{a+bu}}{a(n-1)u^{n-1}} - \frac{b(2n-3)}{2a(n-1)}\int \frac{du}{u^{n-1}\sqrt{a+bu}}$$

61. Pour $n \geq 0$, $\int_0^\infty x^n dx = \lim_{t\to\infty}[x^{n+1}/(n+1)]_0^t = \infty$. Pour $n < 0$, $\int_0^\infty x^n dx = \int_0^1 x^n dx + \int_1^\infty x^n dx$. Les deux intégrales sont impropres. Selon 3.8.2, la seconde intégrale est divergente si $-1 \leq n < 0$. Selon l'exercice 3.8.57, la première intégrale est divergente si $n \leq -1$. Par conséquent, l'intégrale $\int_0^\infty x^n dx$ est divergente pour toutes les valeurs de n.

 © Groupe Modulo inc., 2013

62. $I = \int_0^\infty e^{ax}\cos x\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{ax}\cos x\,dx \overset{\text{99 avec } b=1}{=} \lim_{t\to\infty}\left[\frac{e^{ax}}{a^2+1}(a\cos x+\sin x)\right]_0^t$

$= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{e^{at}}{a^2+1}(a\cos t+\sin t) - \frac{1}{a^2+1}\,(a)\right] = \frac{1}{a^2+1}\lim_{t\to\infty}[e^{at}(a\cos t+\sin t) - a].$

Pour $a \geq 0$, la limite n'existe pas en raison de l'oscillation. Pour $a < 0$, $\lim_{t\to\infty}[e^{at}(a\cos t+\sin t)] = 0$ selon le théorème du sandwich,

parce que $|e^{at}(a\cos t+\sin t)| \leq e^{at}(|a|+1)$; donc, $I = \frac{1}{a^2+1}(-a) = -\frac{a}{a^2+1}$.

63. $f(x) = \frac{1}{\ln x}$, $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-2}{10} = \frac{1}{5}$

a) $T_{10} = \frac{1}{5\cdot 2}\{f(2) + 2[f(2{,}2) + f(2{,}4) + \cdots + f(3{,}8)] + f(4)\} \approx 1{,}925\,444$

b) $M_{10} = \frac{1}{5}[f(2{,}1) + f(2{,}3) + f(2{,}5) + \cdots + f(3{,}9)] \approx 1{,}920\,915$

c) $S_{10} = \frac{1}{5\cdot 3}[f(2) + 4f(2{,}2) + 2f(2{,}4) + \cdots + 2f(3{,}6) + 4f(3{,}8) + f(4)] \approx 1{,}922\,470$

64. $f(x) = \sqrt{x}\cos x$, $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{10} = \frac{3}{10}$

a) $T_{10} = \frac{3}{10\cdot 2}\{f(1) + 2[f(1{,}3) + f(1{,}6) + \cdots + f(3{,}7)] + f(4)\} \approx -2{,}835\,151$

b) $M_{10} = \frac{3}{10}[f(1{,}15) + f(1{,}45) + f(1{,}75) + \cdots + f(3{,}85)] \approx -2{,}856\,809$

c) $S_{10} = \frac{3}{10\cdot 3}[f(1) + 4f(1{,}3) + 2f(1{,}6) + \cdots + 2f(3{,}4) + 4f(3{,}7) + f(4)] \approx -2{,}849\,672$

65. $f(x) = \frac{1}{\ln x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x(\ln x)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2+\ln x}{x^2(\ln x)^3} = \frac{2}{x^2(\ln x)^3} + \frac{1}{x^2(\ln x)^2}$. Nous constatons que chaque terme de $f''(x)$ est

décroissant sur l'intervalle [2, 4]; nous poserons donc $K = f''(2) \approx 2{,}022$. $|E_T| \leq \frac{K(b-a)^3}{12n^2} \approx \frac{2{,}022(4-2)^3}{12(10)^2} = 0{,}013\,48$ et

$|EM| \leq \frac{K(b-a)^3}{24n^2} = 0{,}006\,74$. $|E_T| \leq 0{,}000\,01 \Leftrightarrow \frac{2{,}022(8)}{12n^2} \leq \frac{1}{10^5} \Leftrightarrow n^2 \geq \frac{10^5(2{,}022)(8)}{12} \Rightarrow n \geq 367{,}2$. Prenons n = 368

pour T_n. $|E_M| \leq 0{,}000\,01 \Leftrightarrow n^2 \geq \frac{10^5(2{,}022)(8)}{24} \Rightarrow n \geq 259{,}6$. Prenons n = 260 pour M_n.

66. $\int_1^4 \frac{e^x}{x}dx \approx S_6 = \frac{(4-1)/6}{3}[f(1) + 4f(1{,}5) + 2f(2) + 4f(2{,}5) + 2f(3) + 4f(3{,}5) + f(4)] \approx 17{,}739\,438$

67. $\Delta t = (\frac{10}{60} - 0)/10 = \frac{1}{60}$.

Distance parcourue $= \int_0^{10} v\,dt \approx S_{10}$

$= \frac{1}{60\cdot 3}[64 + 4(68) + 2(72) + 4(79) + 2(84) + 4(87) + 2(90) + 4(92) + 2(92) + 4(88) + 90]$

$= \frac{1}{180}(2486) = 13{,}87$ km

 © Groupe Modulo inc., 2013

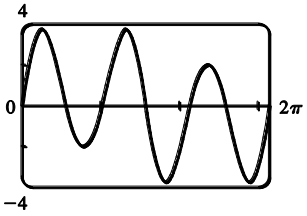
68. Utilisons la méthode de Simpson avec $n = 6$ et $\Delta t = \frac{24-0}{6} = 4$:

$$\begin{aligned}\text{Augmentation de la population d'abeilles} &= \int_0^{24} r(t)dt \approx S6 \\ &= \tfrac{4}{3}[r(0) + 4r(4) + 2r(8) + 4r(12) + 2r(16) + 4r(20) + r(24)] \\ &= \tfrac{4}{3}[0 + 4(300) + 2(3000) + 4(11\,000) + 2(4000) + 4(400) + 0] \\ &= \tfrac{4}{3}(60\,800) \approx 81\,067 \text{ abeilles}\end{aligned}$$

69. a) $f(x) = \sin(\sin x)$. Un logiciel de calcul symbolique donne $f^{(4)}(x) = \sin(\sin x)[\cos^4 x + 7\cos^2 x - 3] + \cos(\sin x)[6\cos^2 x \sin x + \sin x]$.

Le graphique montre que

$|f^{(4)}(x)| < 3{,}8$ pour $x \in [0, \pi]$.



b) Utilisons la méthode de Simpson avec $f(x) = \sin(\sin x)$ et $\Delta x = \frac{\pi}{10}$:

$$\int_0^{\pi} f(x)dx \approx \tfrac{\pi}{10 \cdot 3}[f(0) + 4f(\tfrac{\pi}{10}) + 2f(\tfrac{2\pi}{10}) + \cdots + 4f(\tfrac{9\pi}{10}) + f(\pi)] \approx 1{,}786\,721$$

Nous avons trouvé à la sous-question a) que $|f^{(4)}(x)| < 3{,}8$ sur l'intervalle $[0, \pi]$; utilisons donc le théorème 3.6.4 avec $K = 3{,}8$ pour évaluer l'erreur commise sur l'approximation : $|E_S| \le \dfrac{3{,}8(\pi - 0)^5}{180(10)^4} \approx 0{,}000\,646$.

c) Si nous désirons que l'erreur commise sur l'approximation soit inférieure à 0,000 01, nous devons avoir

$|E_S| \le \dfrac{3{,}8\pi^5}{180n^4} \le 0{,}000\,01$, donc $n^4 \ge \dfrac{3{,}8\pi^5}{180(0{,}000\,01)} \approx 646\,041{,}6 \quad \Rightarrow \quad n \ge 28{,}35$. Puisque la méthode de Simpson exige que n soit pair, nous devons avoir $n \ge 30$ pour garantir l'exactitude requise.

70. Si l'axe des x horizontal en à $x = 7$ nous avons $C = 2\pi r = 45 \quad \Rightarrow \quad r(7) = \frac{2\pi}{45}$. En utilisant la méthode de Simpson avec $n = 4$ et $\Delta x = 7$, nous obtenons $V = \int_0^{28} \pi[r(x)]^2 dx \approx S_4 = \frac{7}{3}[0 + 4\pi(\frac{45}{2\pi})^2 + 2\pi(\frac{53}{2\pi})^2 + 4\pi(\frac{45}{2\pi})^2 + 0] = \frac{7}{3}(\frac{21\,818}{4\pi}) \approx 4051 \text{ cm}^3$.

71. a) $\dfrac{2 + \sin x}{\sqrt{x}} \ge \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ pour tout x sur l'intervalle $[1, \infty[$. Selon 3.8.2, l'intégrale $\int_1^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} dx$ est divergente avec $p = \dfrac{1}{2} \le 1$. Par conséquent, l'intégrale $\int_1^{\infty} \dfrac{2 + \sin x}{\sqrt{x}} dx$ est divergente par comparaison.

 © Groupe Modulo inc., 2013

b) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}} < \dfrac{1}{\sqrt{x^4}} = \dfrac{1}{x^2}$ pour tout x sur l'intervalle $[1, \infty[$. Selon 3.8.2, l'intégrale $\int_1^\infty \dfrac{1}{x^2}dx$ est convergente avec $p = 2 > 1$. Par conséquent, l'intégrale $\int_1^\infty \dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}dx$ est convergente par comparaison.

72. La droite $y = 3$ coupe l'hyperbole $y^2 - x^2 = 1$ en deux points de sa branche supérieure, soit $\left(-2\sqrt{2},3\right)$ et $\left(2\sqrt{2},3\right)$. L'aire cherchée est donc

$$A = \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \left(3 - \sqrt{x^2+1}\right)dx = 2\int_0^{2\sqrt{2}} \left(3 - \sqrt{x^2+1}\right)dx \overset{21}{=} 2\left[3x - \tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} - \tfrac{1}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^{2\sqrt{2}}$$
$$= \left[6x - x\sqrt{x^2+1} - \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^{2\sqrt{2}} = 12\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\cdot 3 - \ln\left(2\sqrt{2}+3\right) = 6\sqrt{2} - \ln\left(3+2\sqrt{2}\right)$$

Autre méthode : Avec $A = 2\int_1^3 \sqrt{y^2-1}\,dy$, utilisons la formule 39.

73. Pour tout x sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \le \cos^2 x \le \cos x$. Pour tout x sur l'intervalle $[\frac{\pi}{2}, \pi]$, $\cos x \le 0 \le \cos^2 x$. Par conséquent,

$$\text{aire} = \int_0^{\pi/2} (\cos x - \cos^2 x)dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (\cos^2 x - \cos x)dx$$
$$= [\sin x - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\sin 2x]_0^{\pi/2} + [\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\sin 2x - \sin x]_{\pi/2}^{\pi} = [(1 - \tfrac{\pi}{4}) - 0] + [\tfrac{\pi}{2} - (\tfrac{\pi}{4} - 1)] = 2$$

74. Les deux courbes $y = \dfrac{1}{2 \pm \sqrt{x}}$ sont définies pour $x \ge 0$. Pour $x > 0$, $\dfrac{1}{2-\sqrt{x}} > \dfrac{1}{2+\sqrt{x}}$. Par conséquent, l'aire cherchée est

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{2-\sqrt{x}} - \frac{1}{2+\sqrt{x}}\right)dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2-u} - \frac{1}{2+u}\right)2u\,du \quad \left[u = \sqrt{x}\right] \quad = 2\int_0^1 \left(-\frac{u}{u-2} - \frac{u}{u+2}\right)du$$
$$= 2\int_0^1 \left(-1 - \frac{2}{u-2} - 1 + \frac{2}{u+2}\right)du = 2\left[2\ln\left|\frac{u+2}{u-2}\right| - 2u\right]_0^1 = 4\ln 3 - 4$$

75. En utilisant la méthode des disques, le volume est

$$V = \int_0^{\pi/2} \pi[f(x)]^2 dx = \pi\int_0^{\pi/2} (\cos^2 x)^2 dx = \pi\int_0^{\pi/2} \left[\tfrac{1}{2}(1 + \cos\ 2x)\right]^2 dx$$
$$= \tfrac{\pi}{4}\int_0^{\pi/2} (1 + \cos^2 2x + 2\cos 2x)dx = \tfrac{\pi}{4}\int_0^{\pi/2} \left[1 + \tfrac{1}{2}(1 + \cos 4x) + 2\cos 2x\right]dx$$
$$= \tfrac{\pi}{4}\left[\tfrac{3}{2}x + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{4}\sin 4x\right) + 2\left(\tfrac{1}{2}\sin\ 2x\right)\right]_0^{\pi/2} = \tfrac{\pi}{4}\left[\left(\tfrac{3\pi}{4} + \tfrac{1}{8}\cdot 0 + 0\right) - 0\right] = \tfrac{3}{16}\pi^2$$

76. En utilisant la méthode des coquilles cylindriques, le volume est

$$V = \int_0^{\pi/2} 2\pi x f(x)dx = 2\pi\int_0^{\pi/2} x\cos^2 x\,dx = 2\pi\int_0^{\pi/2} x\left[\tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)\right]dx = 2\left(\tfrac{1}{2}\right)\pi\int_0^{\pi/2} (x + x\cos 2x)\,dx$$
$$= \pi\left(\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^{\pi/2} + \left[x\left(\tfrac{1}{2}\sin 2x\right)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{2}\sin 2x\,dx\right) \quad \left[\begin{array}{c}\text{intégration par parties avec}\\ u = x, dv = \cos 2x\,dx\end{array}\right]$$
$$= \pi\left[\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^2 + 0 - \tfrac{1}{2}\left[-\tfrac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\pi/2}\right] = \tfrac{\pi^3}{8} + \tfrac{\pi}{4}(-1-1) = \tfrac{1}{8}(\pi^3 - 4\pi)$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

77. Selon le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral,

$$\int_0^\infty f'(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t f'(x)dx = \lim_{t\to\infty}\,[f(t)-f(0)] = \lim_{t\to\infty} f(t) - f(0) = 0 - f(0) = -f(0).$$

78. a) $$(\arctan x)_{moy} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t-0}\int_0^t \arctan x\,dx \overset{89}{=} \lim_{t\to\infty}\left\{\frac{1}{t}\left[x\arctan x - \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^t\right\}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{t}\left(t\arctan t - \tfrac{1}{2}\ln(1+t^2)\right)\right] = \lim_{t\to\infty}\left[\arctan t - \frac{\ln(1+t^2)}{2t}\right]$$

$$\overset{\text{H}}{=} \frac{\pi}{2} - \lim_{t\to\infty}\frac{2t/(1+t^2)}{2} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

b) $f(x) \geq 0$ et

L'intégrale $\int_a^\infty f(x)dx$ est divergente $\Rightarrow$ $\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx = \infty$. $f_{moy} = \lim_{t\to\infty}\frac{\int_a^t f(x)dx}{t-a}dx \overset{\text{H}}{=} \lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{1}$ $\left[\text{selon TFC1}\right] = \lim_{x\to\infty} f(x)$, si cette limite existe.

c) Supposons que l'intégrale $\int_a^\infty f(x)dx$ soit convergente, c'est-à-dire $\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx = L$. Alors,

$$f_{\text{moy}} = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{t-a}\int_a^t f(x)dx\right] = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t-a}\cdot\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx = 0\cdot L = 0.$$

d) $$(\sin x)_{moy} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \sin x\,dx = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}[-\cos x]_0^t\right) = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{\cos t}{t} + \frac{1}{t}\right) = \lim_{t\to\infty}\frac{1-\cos t}{t} = 0$$

79. Posons $u = 1/x \Rightarrow x = 1/u \Rightarrow dx = -(1/u^2)du$. $\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}dx = \int_\infty^0 \frac{\ln(1/u)}{\ln(1/u^2)}\left(-\frac{du}{u^2}\right) = \int_\infty^0 \frac{-\ln u}{u^2+1}(-du) = \int_\infty^0 \frac{\ln u}{1+u^2}du = -\int_0^\infty \frac{\ln u}{1+u^2}du$

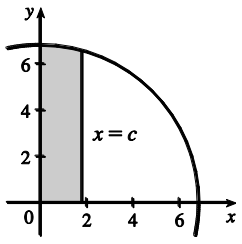
Par conséquent, $\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}dx = -\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}dx = 0$.

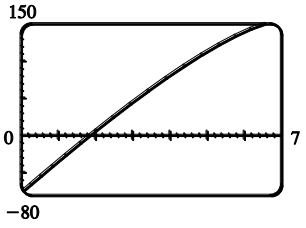
80. Si la distance entre P et la charge ponctuelle est d, alors le potentiel V au point P est

$$V = W = \int_\infty^d F dr = \int_\infty^d \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = \lim_{t\to\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_t^d = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{d}+\frac{1}{t}\right) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d}.$$

Problèmes supplémentaires

1.





 © Groupe Modulo inc., 2013

Par symétrie, le problème peut se réduire à trouver une droite $x = c$ telle que l'aire ombrée soit égale au tiers de l'aire du quart de cercle. Une équation du demi-cercle est $y = \sqrt{49 - x^2}$. Il faut donc que

$\int_0^c \sqrt{49 - x^2}\,dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}\pi(7)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\frac{1}{2}x\sqrt{49 - x^2} + \frac{49}{2}\arcsin(x/7)\right]_0^c = \frac{49}{12}\pi$ [selon la formule 30] $\Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}c\sqrt{49 - c^2} + \frac{49}{2}\arcsin(c/7) = \frac{49}{12}\pi$. Cette équation serait difficile à résoudre avec exactitude. Nous traçons donc le membre de gauche de l'équation comme si elle était une fonction de c et trouvons que l'équation est vérifiée avec $c \approx 1{,}85$. Les coupes parallèles devraient donc être effectuées à des distances d'environ 1,85 pouces du centre de la pizza.

2.
$$\int \frac{1}{x^7 - x}dx = \int \frac{dx}{x(x^6 - 1)} = \int \frac{x^5}{x^6(x^6 - 1)}dx = \frac{1}{6}\int \frac{1}{u(u-1)}du \quad \begin{bmatrix} u = x^6, \\ du = 6x^5dx \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{6}\int\left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u}\right)du = \frac{1}{6}(\ln|u-1| - \ln|u|) + C$$
$$= \frac{1}{6}\ln\left|\frac{u-1}{u}\right| + C = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x^6 - 1}{x^6}\right| + C$$

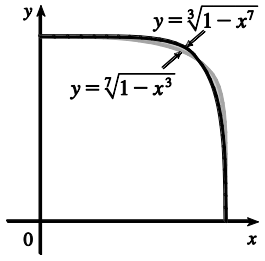
Autres méthodes :

1) $\int \frac{1}{x^7 - x}dx = \int \frac{x^{-7}}{1 - x^{-6}}dx \quad \begin{bmatrix} u = 1 - x^{-6}, \\ du = 6x^{-7}dx \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\int du/u = \frac{1}{16}\ln|u| + C = \frac{1}{6}\ln|1 - x^{-6}| + C$

2) Effectuons le changement de variable $u = x^3$ ou $x^3 = \sec\theta$.

3. L'intégrale représente la différence entre les aires ombrées, laquelle semble être 0. Elle peut être calculée en effectuant l'intégration par rapport à x ou à y; nous exprimons donc x en fonction de y pour chaque courbe :

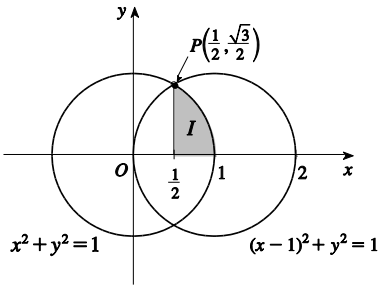
$y = \sqrt[3]{1 - x^7} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[7]{1 - y^3}$ et $y = \sqrt[7]{1 - x^3} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{1 - y^7}$, donc $\int_0^1\left(\sqrt[3]{1 - y^7} - \sqrt[7]{1 - y^3}\right)dy = \int_0^1\left(\sqrt[7]{1 - x^3} - \sqrt[3]{1 - x^7}\right)dx$. Cette égalité est cependant de la forme $z = -z$. Donc, $\int_0^1\left(\sqrt[3]{1 - x^7} - \sqrt[7]{1 - x^3}\right)dx = 0$.



4. L'aire de chaque disque est $\pi(1)^2 = \pi$. Par symétrie, l'aire de l'union des deux disques est $A = \pi + \pi - 4I$.

$$I = \int_{1/2}^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx$$
$$\overset{30}{=}\left[\frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x}{1}\right)\right]_{1/2}^1 \quad \text{[ou en effectuant le changement de variable } x = \sin\theta\text{]}$$
$$= \left(0 + \frac{\pi}{4}\right) - \left(\frac{1}{4}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$

 © Groupe Modulo inc., 2013



Par conséquent, $A = 2\pi - 4\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right) = 2\pi - \frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

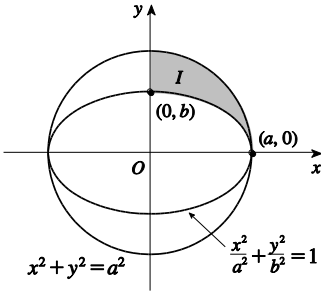
Autre solution (qui ne fait pas appel au calcul différentiel et intégral) : L'aire du secteur, avec un angle au centre à l'origine, qui contient I est $\frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}(1)^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$. L'aire du triangle avec hypoténuse OP est $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{8}$. Par conséquent, l'aire de I est $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$, tel que nous l'avons calculé précédemment.

5. L'aire A de la partie restante du disque est donnée par

$$A = 4I = 4\int_0^a \left(\sqrt{a^2 - x^2} - \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\right) dx = 4\left(1 - \frac{b}{a}\right)\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

$$\overset{30}{=} \frac{4}{a}(a-b)\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right]_0^a,$$

$$= \frac{4}{a}(a-b)\left[\left(0 + \frac{a^2}{2}\frac{\pi}{2} - 0\right)\right] = \frac{4}{a}(a-b)\left(\frac{a^2\pi}{4}\right) = \pi a(a-b)$$



qui est l'aire d'une ellipse dont les demi-axes sont a et $a - b$.

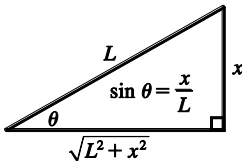
Autre solution : En soustrayant l'aire de l'ellipse de l'aire du disque, nous obtenons $\pi a^2 - \pi ab = \pi a\,(a - b)$, tel que nous l'avons calculé précédemment. (La formule de l'aire d'une ellipse a été obtenue à l'exemple 2 de la section 3.3.)

6. a) L'équation de la tangente à la courbe $y = f(x)$ en $x = x_0$ est $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. L'ordonnée du point d'intersection de cette tangente avec l'axe des y est $f(x_0) - f'(x_0)x_0$. Par conséquent, L est la distance entre le point $(0, f(x_0) - f'(x_0)x_0)$ et le point $(x_0, f(x_0))$; c'est-à-dire que $L^2 = x_0^2 + [f'(x_0)]^2 x_0^2$, donc $[f'(x_0)]^2 = \frac{L^2 - x_0^2}{x_0^2}$ et $f'(x_0) = -\frac{\sqrt{L^2 - x_0^2}}{x_0}$ pour $0 < x0 < L$.

b) $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{L^2 - x^2}}{x} \quad \Rightarrow \quad y = \int\left(-\frac{\sqrt{L^2 - x^2}}{x}\right)dx$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

Posons $x = L\sin\theta$. Alors, $dx = L\cos\theta\, d\theta$ et



$$y = \int \frac{-L\cos\theta L\cos\theta d\theta}{L\sin\theta} = L\int \frac{\sin^2\theta - 1}{\sin\theta} d\theta = L\int (\sin\theta - \csc\theta) d\theta$$
$$= -L\cos\theta - L\ln|\csc\theta - \cot\theta| + C = -\sqrt{L^2 - x^2} - L\ln\left(\frac{L}{x} - \frac{-\sqrt{L^2 - x^2}}{x}\right) + C$$

Lorsque $x = L$, $y = 0$ et $0 = -0 - L\ln(1 - 0) + C$, donc $C = 0$. Par conséquent, $y = -\sqrt{L^2 - x^2} - L\ln\left(\frac{L - \sqrt{L^2 - x^2}}{x}\right)$.

7. Rappelons $\cos A\cos B = \frac{1}{2}\left[\cos(A + B) + \cos(A - B)\right]$. Alors,

$$f(x) = \int_0^{\pi} \cos t\cos(x - t)\, dt = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} [\cos(t + x - t) + \cos(t - x + t)]dt = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} [\cos x + \cos(2t - x)]\, dt$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[t\cos x + \tfrac{1}{2}\sin(2t - x)\right]_0^{\pi} = \tfrac{\pi}{2}\cos x + \tfrac{1}{4}\sin(2\pi - x) - \tfrac{1}{4}\sin(-x)$$
$$= \tfrac{\pi}{2}\cos x + \tfrac{1}{4}\sin(-x) - \tfrac{1}{4}\sin(-x) = \tfrac{\pi}{2}\cos x$$

La valeur minimale de $\cos x$ dans ce domaine est -1, donc la valeur minimale de $f(x)$ est $f(\pi) = -\pi/2$.

8. Soit n est un entier positif, alors

$$\int (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - \int x \cdot n(\ln x)^{n-1}(dx/x) \quad [\text{par parties}] = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1} dx$$

Par conséquent,

$$\int_0^1 (\ln x)^n dx = \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 (\ln x)^n dx = \lim_{t\to 0^+} [x(\ln x)^n]_t^1 - n\lim_{t\to 0^+}\int_t^1 (\ln x)^{n-1} dx$$
$$= -\lim_{t\to 0^+}\frac{(\ln t)^n}{1/t} - n\int_0^1 (\ln x)^{n-1} dx = -n\int_0^1 (\ln x)^{n-1} dx$$

en appliquant la règle de L'Hospital à plusieurs reprises. Nous désirons montrer que $\int_0^1 (\ln x)^n dx = (-1)^n n!$ pour tout entier positif n.

Pour $n = 1$, nous avons

$$\int_0^1 (\ln x)^1 dx = (-1)\int_0^1 (\ln x)^0 dx = -\int_0^1 dx = -1 \quad \left[\text{ou} \int_0^1 \ln x dx = \lim_{t\to 0}[x\ln x - x]_t^1 = -1\right]$$

En supposant que la formule soit vraie pour n, nous trouvons que

$$\int_0^1 (\ln x)^{n+1} dx = -(n+1)\int_0^1 (\ln x)^n\, dx = -(n+1)(-1)^n n! = (-1)^{n+1}(n+1)!$$

qui est la formule pour $n + 1$. Il s'ensuit, par induction mathématique, que la formule est bonne pour tout entier positif n.

 © Groupe Modulo inc., 2013

9. Selon l'indice donné, posons $I_k = \int_0^1 (1-x^2)^k dx$ et trouvons une expression pour I_{k+1} en terme de I_k. Nous intégrons par parties I_{k+1} avec $u = (1-x^2)^{k+1} \Rightarrow du = (k+1)(1-x^2)^k(-2x)$ et $dv = dx \Rightarrow v = x$ et nous divisons ensuite l'intégrale restante en expressions identifiables :

$$\begin{aligned} I_{k+1} &= x(1-x^2)^{k+1}\,|_0^1 + 2(k+1)\int_0^1 x^2(1-x^2)^k dx = (2k+2)\int_0^1 (1-x^2)^k\,[1-(1-x^2)]dx \\ &= (2k+2)(I_k - I_{k+1}) \end{aligned}$$

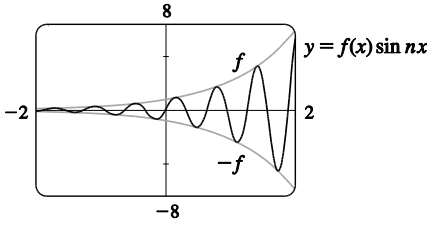
Donc, $I_{k+1}[1+(2k+2)] = (2k+2)I_k \Rightarrow I_{k+1} = \dfrac{2k+2}{2k+3} I_k$. Prouvons maintenant la formule par induction mathématique :

$I_0 = 1 = \dfrac{2^0(0!)^2}{1!}$, donc la formule est vérifiée avec $n = 0$. Supposons maintenant qu'elle soit bonne avec $n = k$. Alors,

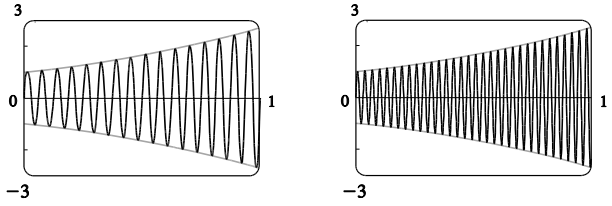
$$\begin{aligned} I_{k+1} &= \frac{2k+2}{2k+3} I_k = \frac{2k+2}{2k+3}\left[\frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}\right] = \frac{2(k+1)2^{2k}(k!)^2}{(2k+3)(2k+1)!} = \frac{2(k+1)}{2k+2}\cdot\frac{2(k+1)2^{2k}(k!)^2}{(2k+3)(2k+1)!} \\ &= \frac{[2(k+1)]^2 2^{2k}(k!)^2}{(2k+3)(2k+2)(2k+1)!} = \frac{2^{2(k+1)}\,[(k+1)!]^2}{[2(k+1)+1]!} \end{aligned}$$

Donc, par l'axiome d'induction, la formule est bonne pour tous les nombres entiers $n \geq 0$.

10. a) Puisque $-1 \leq \sin \leq 1$, nous avons $-f(x) \leq f(x) \sin nx \leq f(x)$ et la courbe de $y = f(x) \sin nx$ oscille entre $f(x)$ et $-f(x)$. (Le graphique montre le cas où $f(x) = e^x$ et $n = 10$.) À mesure que $n \to \infty$, la courbe oscille de plus en plus fréquemment, comme le montrent les graphiques à la sous-question b).



b) Les graphiques de l'intégrande semblent montrer que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x) \sin nx dx = 0$, puisque à mesure que n augmente, la courbe de l'intégrande oscille de plus en plus rapidement. Donc (puisque la fonction f' est continue), il semble logique que les aires au-dessus et au-dessous de l'axe des x durant chaque oscillation se rapprochent de l'égalité.



 © Groupe Modulo inc., 2013

c) Intégrons par parties avec $u = f(x) \Rightarrow du = f'(x)dx$ et $dv = \sin nxdx \Rightarrow v = -\frac{\cos nx}{n}$:

$$\int_0^1 f(x)\sin nxdx = \left[-\frac{f(x)\cos nx}{n}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos nx}{n} f'(x)dx = \frac{1}{n}\left(\int_0^1 \cos nxf'(x)dx - [f(x)\cos nx]_0^1\right)$$
$$= \tfrac{1}{n}\left[\int_0^1 \cos nxf'(x)dx + f(0) - f(1)\cos n\right]$$

En prenant la valeur absolue du premier et du dernier terme dans cette égalité et sachant que $|\alpha \pm \beta| \le |\alpha| + |\beta|$,

$\int_0^1 f(x)dx \le \int_0^1 |f(x)|dx$, $|f(0)| = f(0)$ [f est positive], $|f'(x)| \le M$ pour $0 \le x \le 1$ et $|\cos nx| \le 1$,

$$\left|\int_0^1 f(x)\sin nxdx\right| \le \tfrac{1}{n}\left[\left|\int_0^1 Mdx\right| + |f(0)| + |f(1)|\right] = \tfrac{1}{n}\left[M + |f(0)| + |f(1)|\right]$$

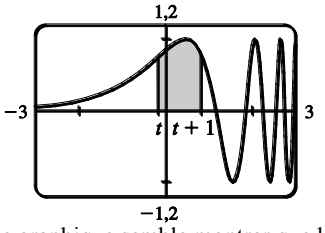
qui se rapproche de 0 à mesure que $n \to \infty$. Ce résultat se fonde sur le théorème du sandwich.

11. Considérons $0 < a < b$. $\int_0^1 [bx + a(1-x)]^t dx = \int_a^b \frac{ut}{(b-a)}du \quad [u = bx + a(1-x)] = \left[\frac{u^{t+1}}{(t+1)(b-a)}\right]_a^b = \frac{b^{t+1} - a^{t+1}}{(t+1)(b-a)}$. Maintenant,

posons $y = \lim_{t\to 0}\left[\frac{b^{t+1} - a^{t+1}}{(t+1)(b-a)}\right]^{1/t}$. Alors, $\ln y = \lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{t}\ln\frac{b^{t+1} - a^{t+1}}{(t+1)(b-a)}\right]$. Cette limite est une indétermination du type 0/0; nous pouvons donc appliquer la règle de L'Hospital et obtenir

$\ln y = \lim_{t\to 0}\left[\frac{b^{t+1}\ln b - a^{t+1}\ln a}{b^{t+1} - a^{t+1}} - \frac{1}{t+1}\right] = \frac{b\ln b - a\ln a}{b-a} - 1 = \frac{b\ln b}{b-a} - \frac{a\ln a}{b-a} - \ln e = \ln\frac{b^{b/(b-a)}}{ea^{a/(b-a)}}$. Par conséquent, $y = e^{-1}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{1/(b-a)}$.

12.



Le graphique semble montrer que l'aire de la région sous la courbe de $f(x) = \sin(e^x)$ sur l'intervalle $[t;\ t+1]$ est maximale lorsque $t \approx -0{,}2$. Pour trouver la valeur exacte, nous exprimons l'intégrale sous la forme $I = \int_t^{t+1} f(x)dx = \int_0^{t+1} f(x)dx - \int_0^t f(x)dx$ et utilisons le TFC1 pour trouver

$dI/dt = f(t+1) - f(t) = \sin(e^{t+1}) - \sin(e^t) = 0$ lorsque $\sin(e^{t+1}) = \sin(e^t)$. Or, nous trouvons que $\sin x = \sin y$ chaque fois que $x - y = 2k\pi$ et chaque fois que x et y sont à la même distance de $(k + \frac{1}{2})\pi$, k étant unnombre entier quelconque, puisque $\sin x$ est symétrique par rapport à la droite $x = (k + \frac{1}{2})\pi$. La première possibilité est la plus évidente, mais en résolvant pour $t\,e^{t+1} - e^t = 2k\pi$, nous obtenons $t = \ln(2k\pi/(e-1))$, qui est environ 1,3 avec $k = 1$ (la plus petite valeur possible de k). Selon le graphique, il ne semble pas que ceci soit la valeur maximale que nous recherchons. Posons donc plutôt

 © Groupe Modulo inc., 2013

$e^{t+1}-(k+\frac{1}{2})\pi=(k+\frac{1}{2})\pi-e^t \;\Leftrightarrow\; e^{t+1}+e^t=(2k+1)\pi \;\Leftrightarrow\; e^t(e+1)=(2k+1)\pi \;\Leftrightarrow\; t=\ln((2k+1)\pi/(e+1))$.

Maintenant, $k=0 \;\Rightarrow\; t=\ln(\pi/(e+1))\approx -0{,}168\,53$, qui est la valeur maximale cherchée, déjà identifiée sur le graphique de *f*.

13. Écrivons $I=\int\frac{x^8}{(1+x^6)^2}\,dx=\int x^3\cdot\frac{x^5}{(1+x^6)^2}\,dx$. Intégrons par parties avec $u=x^3$ et $dv=\frac{x^5}{(1+x^6)^2}\,dx$. Alors, $du=3x^2\,dx$,

$v=-\frac{1}{6(1+x^6)} \;\Rightarrow\; I=-\frac{x^3}{6(1+x^6)}+\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^6}dx$. Effectuons le changement de variable $t=x^3$ dans cette dernière intégrale. $\int\frac{x^2}{1+x^6}\,dx=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{1+t^2}=\frac{1}{3}\arctan t+C=\frac{1}{3}\arctan(x^3)+C$. Par conséquent, $I=-\frac{x^3}{6(1+x^6)}+\frac{1}{6}\arctan(x^3)+C$.

Considérons maintenant l'intégrale impropre,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{\infty}\left(\frac{x^4}{1+x^6}\right)^2dx&=\lim_{t\to\infty}\int_{-1}^{t}\frac{x^8}{(1+x^6)^2}\,dx=\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{x^3}{6(1+x^6)}+\frac{1}{6}\arctan(x^3)\right]_{-1}^{t}\\&=\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{t^3}{6(1+t^6)}+\frac{1}{6}\arctan(t^3)+\frac{-1}{6(1+1)}-\frac{1}{6}\arctan(-1)\right)\\&=0+\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{12}-\frac{1}{6}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{12}-\frac{1}{12}+\frac{\pi}{24}=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{12}\end{aligned}$$

14. $\int\sqrt{\tan x}dx=\int u\left(\frac{2u}{u^4+1}du\right)\quad\left[\begin{array}{ll}u=\sqrt{\tan x}, & u^2=\tan x\\ 2udu=\sec^2 x dx, & (\tan^2 x+1)dx=(u^4+1)dx\end{array}\right]$

Enfactorisant le dénominateur, nous obtenons

$u^4+1=u^4+2u^2+1-2u^2=(u^2+1)^2-\left(\sqrt{2}u\right)^2=\left(u^2+\sqrt{2}u+1\right)\left(u^2-\sqrt{2}u+1\right)$. Donc,

$\frac{2u^2}{u^4+1}=\frac{Au+B}{u^2+\sqrt{2}u+1}+\frac{Cu+D}{u^2-\sqrt{2}u+1} \;\Rightarrow\; 2u^2=(Au+B)(u^2-\sqrt{2}u+1)+(Cu+D)(u^2+\sqrt{2}u+1)$. En égalisant les coefficients des puissances de *u*, nous obtenons $A+C=0$ (termes en u^3), $B-\sqrt{2}A+D+\sqrt{2}C=2$ (termes en u^2),

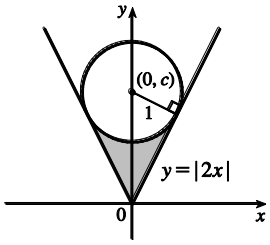
$A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D=0$ (termes en *u*), $B+D=0$ (termes constants). En remplaçant *C* par $-A$ et *D* par $-B$ dans l'équation *termes de u)*, nous obtenons $B=0$ et $D=0$. En substituant ensuite ces valeurs dans l'équation *termes de* u^2), nous obtenons $A=-1/\sqrt{2}$

 © Groupe Modulo inc., 2013

$$\begin{aligned}
\int \frac{2u^2}{u^4+1}du &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{u}{u^2+\sqrt{2}u+1}du + \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{u}{u^2-\sqrt{2}u+1}\,du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\frac{1}{2}\left(2u-\sqrt{2}\right)1/\sqrt{2}}{u^2-\sqrt{2}u+1}\,du - \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\frac{1}{2}(2u+\sqrt{2})-1/\sqrt{2}}{u^2+\sqrt{2}u+1}\,du \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{2u-\sqrt{2}}{u^2-\sqrt{2}u+1}du + \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2-\sqrt{2}u+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{2u+\sqrt{2}}{u^2+\sqrt{2}u+1}du + \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+\sqrt{2}u+1} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln(u^2-\sqrt{2}u+1) + \frac{1}{2}\int \frac{du}{(u-1/\sqrt{2})^2+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(u^2+\sqrt{2}u+1\right) + \frac{1}{2}\int \frac{du}{(u+1/\sqrt{2})^2+\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{u^2-\sqrt{2}u+1}{u^2+\sqrt{2}u+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{1/\sqrt{2}}\arctan\frac{u-1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{1/\sqrt{2}}\arctan\frac{u+1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}} + C \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\frac{\tan x-\sqrt{2\tan x}+1}{\tan x+\sqrt{2\tan x}+1} + \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\sqrt{2\tan x}-1\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\sqrt{2\tan x}+1\right) + C
\end{aligned}$$

et $C = 1/\sqrt{2}$. Par conséquent,

15.



L'équation du cercle de centre (0, c) et de rayon 1 est $x^2 + (y - c)^2 = 1^2$, donc l'équation du demi-cercle inférieur est $y = c - \sqrt{1-x^2}$.

Aux points de tangence, les pentes de la droite et du demi-cercle doivent être égales. Pour $x \geq 0$, nous devons avoir

$$y' = 2 \;\Rightarrow\; \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 2 \;\Rightarrow\; x = 2\sqrt{1-x^2} \;\Rightarrow\; x^2 = 4(1-x^2) \;\Rightarrow\; 5x^2 = 4 \;\Rightarrow x^2 = \tfrac{4}{5} \;\Rightarrow\; x = \tfrac{2}{5}\sqrt{5} \text{ et}$$

donc, $y = 2(\frac{2}{5}\sqrt{5}) = \frac{4}{5}\sqrt{5}$. La pente du segment de droite perpendiculaire est $-\frac{1}{2}$, et une équation du segment de droite est

donc $y - \frac{4}{5}\sqrt{5} = -\frac{1}{2}(x - \frac{2}{5}\sqrt{5}) \;\Leftrightarrow\; y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{5}\sqrt{5} + \frac{4}{5}\sqrt{5} \;\Leftrightarrow\; y = -\frac{1}{2}x + \sqrt{5}$. Donc $c = \sqrt{5}$ et une équation du demi-cercle

inférieur est $y = \sqrt{5} - \sqrt{1-x^2}$. Par conséquent, l'aire ombrée est

$$\begin{aligned}
2\int_0^{(2/5)\sqrt{5}}\left[\left(\sqrt{5}-\sqrt{1-x^2}\right)-2x\right]dx &\overset{30}{=} 2\left[\sqrt{5}x - \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\arcsin x - x^2\right]_0^{(2/5)\sqrt{5}} \\
&= 2\left[2 - \frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) - \frac{4}{5}\right] - 2(0) \\
&= 2\left[1 - \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right] = 2 - \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)
\end{aligned}$$

16. a) $M\frac{dv}{dt} - ub = -Mg \;\Rightarrow\; (M_0 - bt)\frac{dv}{dt} = ub - (M_0 - bt)g \;\Rightarrow\; \frac{dv}{dt} = \frac{ub}{M_0 - bt} - g \;\Rightarrow$

$v(t) = -u\ln(M_0 - bt) - gt + C$. Or, $0 = v(0) = -u\ln M_0 + C$, donc $C = u\ln M_0$. Par conséquent,

$$v(t) = u\ln M_0 - u\ln(M_0 - bt) - gt = u\ln\frac{M_0}{M_0 - bt} - gt\,.$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

b) Vitesse de fin de combustion $= v\left(\frac{M_2}{b}\right) = u\ln\frac{M_0}{M_0 - M_2} - g\frac{M_2}{b} = u\ln\frac{M_0}{M_1} - g\frac{M_2}{b}$.

Remarque : Le terme « vitesse de fin de combustion » provient du fait que M_2 kilogrammes de carburant sont utilisés en M_2/b secondes, donc $v(M_2/b)$ est la vitesse de la fusée lorsque le carburant a été entièrement consommé.

c) Altitude au point de fin de combustion $= y\left(\frac{M_2}{b}\right)$. Or, $\frac{dy}{dt} = v(t) = u\ln M_0 - gt - u\ln(M_0 - bt)$,

donc $y(t) = (u\ln M_0)t - \frac{gt^2}{2} - \frac{u}{b}(M_0 - bt)\ln(M_0 - bt) + ut + C$. Puisque $0 = y(0) = \frac{u}{b}M_0 \ln M_0 + C$, nous

obtenons $C = -\frac{u}{b}M_0 \ln M_0$ et $y(t) = u(1 + \ln M_0)t - \frac{gt^2}{2} + \frac{u}{b}(M_0 - bt)\ln(M_0 - bt) - \frac{u}{b}M_0 \ln M_0$.

Par conséquent, l'altitude au point de fin de combustion est

$$y\left(\frac{M_2}{b}\right) = u(1 + \ln M_0)\frac{M_2}{b} - \frac{g}{2}\left(\frac{M_2}{b}\right)^2 + \frac{u}{b}M_1 \ln M_1 - \frac{u}{b}M_0 \ln M_0$$
$$= \frac{u}{b}M_2 - \frac{u}{b}M_1 \ln M_0 + \frac{u}{b}M_1 \ln M_1 - \frac{g}{2}\left(\frac{M_2}{b}\right)^2 = \frac{u}{b}M_2 + \frac{u}{b}M_1 \ln\frac{M_1}{M_0} - \frac{g}{2}\left(\frac{M_2}{b}\right)^2$$

[Dans le calcul de $y(M_2/b)$, on a utilisé à plusieurs reprises la relation $M_0 = M_1 + M_2$. En particulier,

$t = M_2/b \;\Rightarrow\; M_0 - bt = M_1$.]

d) La formule pour $y(t)$ obtenue à la sous-question c) est valide tant qu'il reste du carburant. Une fois que le carburant a été entièrement consommé, la seule force qui a un effet sur la fusée est dûe à la gravité.

$-M_1 g = M_1\frac{dv}{dt} \;\Rightarrow\; \frac{dv}{dt} = -g \;\Rightarrow\; v(t) = -gt + c_1$,

où $c_1 = v\left(\frac{M_2}{b}\right) + \frac{gM_2}{b} \;\Rightarrow\; v(t) = v\left(\frac{M_2}{b}\right) - g\left(t - \frac{M_2}{b}\right) \;\Rightarrow\; y(t) = v\left(\frac{M_2}{b}\right)\left(t - \frac{M_2}{b}\right) - \frac{g}{2}\left(t - \frac{M_2}{b}\right)^2 + c_2$, où $c_2 = y\left(\frac{M_2}{b}\right)$,

donc $y(t) = y\left(\frac{M_2}{b}\right) + v\left(\frac{M_2}{b}\right)\left(t - \frac{M_2}{b}\right) - \frac{g}{2}\left(t - \frac{M_2}{b}\right)^2$, $t \ge \frac{M_2}{b}$.

En résumé : Pour $0 \le t \le \frac{M_2}{b}$, $y(t) = u(1 + \ln M_0)t - \frac{gt^2}{2} + \frac{u}{b}(M_0 - bt)\ln(M_0 - bt) - \frac{u}{b}M_0 \ln M_0$ [selon la sous-question c)] et

pour $t \ge \frac{M_2}{b}$, $y(t) = y\left(\frac{M_2}{b}\right) + v\left(\frac{M_2}{b}\right)\left(t - \frac{M_2}{b}\right) - \frac{g}{2}\left(t - \frac{M_2}{b}\right)^2$ [selon l'analyse qui précède]. $y\left(\frac{M_2}{b}\right)$ et $v\left(\frac{M_2}{b}\right)$ apparaissent

aux sous-questions c) et b) respectivement.

 © Groupe Modulo inc., 2013

4. D'AUTRES APPLICATIONS DE L'INTÉGRATION

4.1 La longueur d'un arc de courbe

1. $y = 2x - 5 \;\Rightarrow\; L = \int_{-1}^{3} \sqrt{1 + (dy/dx)^2}\,dx = \int_{-1}^{3} \sqrt{1 + (2)^2}\,dx = \sqrt{5}[3 - (-1)] = 4\sqrt{5}$.

Puisque la courbe est un segment de droite, la longueur de l'arc de courbe peut être calculée au moyen de la formule de la distance, donc $L = [\text{distance entre } (-1,-7) \text{ et } (3,1)] = \sqrt{[3-(-1)]^2 + [1-(-7)]^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

2. Au moyen de la formule de la longueur d'un arc de courbe, avec $y = \sqrt{2 - x^2} \;\Rightarrow\; \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{\sqrt{2-x^2}}$, nous obtenons

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{x^2}{2-x^2}}\,dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{2}\,dx}{\sqrt{2-x^2}} = \sqrt{2}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 - x^2}}$$

$$= \sqrt{2}\left[\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}\right]_0^1 = \sqrt{2}\left[\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \arcsin 0\right] = \sqrt{2}[\tfrac{\pi}{4} - 0] = \sqrt{2}\,\tfrac{\pi}{4}$$

La courbe représente un huitième d'un cercle de rayon $\sqrt{2}$; la longueur de l'arc de courbe est donc $\frac{1}{8}\left(2\pi \cdot \sqrt{2}\right) = \sqrt{2}\,\frac{\pi}{4}$, soit le résultat obtenu précédemment.

3. $y = \sin x \;\Rightarrow\; dy/dx = \cos x \;\Rightarrow\; 1 + (dy/dx)^2 = 1 + \cos^2 x$. Donc, $L = \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x}\,dx \approx 3{,}8202$.

4. $y = xe^{-x} \;\Rightarrow\; dy/dx = x(-e^{-x}) + e^{-x}(1) = e^{-x}(1-x) \;\Rightarrow\; 1 + (dy/dx)^2 = 1 + [e^{-x}(1-x)]^2$. Donc, $L = \int_0^2 \sqrt{1 + e^{-2x}(1-x)^2}\,dx \approx 2{,}1024$.

5. $x = \sqrt{y} - y \;\Rightarrow\; dx/dy = 1/\left(2\sqrt{y}\right) - 1 \;\Rightarrow\; 1 + (dx/dy)^2 = \left(\dfrac{1}{2\sqrt{y}} - 1\right)^2$. Donc, $L = \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\dfrac{1}{2\sqrt{y}} - 1\right)^2}\,dy \approx 3{,}6095$.

6. $x = y^2 - 2y \;\Rightarrow\; dx/dy = 2y - 2 \;\Rightarrow\; 1 + (dx/dy)^2 = 1 + (2y-2)^2$. Donc, $L = \int_0^2 \sqrt{1 + (2y-2)^2}\,dy \approx 2{,}9579$.

7. $y = 1 + 6x^{3/2} \;\Rightarrow\; dy/dx = 9x^{1/2} \;\Rightarrow\; 1 + (dy/dx)^2 = 1 + 81x$. Donc,

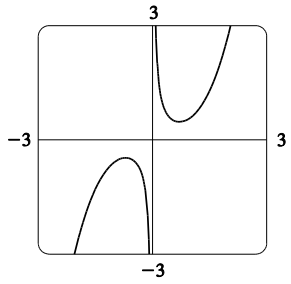
$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + 81x}\;dx = \int_0^{82} u^{1/2}\left(\tfrac{1}{81}d\right) \quad \begin{bmatrix} u = 1 + 81x, \\ du = 81dx \end{bmatrix} \quad = \tfrac{1}{81} \cdot \tfrac{2}{3}[u^{3/2}]_1^{82} = \tfrac{2}{243}\left(82\sqrt{82} - 1\right)$$

8. $y^2 = 4(x+4)^3,\; y > 0 \;\Rightarrow\; y = 2(x+4)^{3/2} \;\Rightarrow\; dy/dx = 3(x+4)^{1/2} \;\Rightarrow\; 1 + (dy/dx)^2 = 1 + 9(x+4) = 9x + 37$. Donc,

$$L = \int_0^2 \sqrt{9x + 37}\,dx \quad \begin{bmatrix} u = 9x + 37, \\ du = 9dx \end{bmatrix} \quad = \int_{37}^{55} u^{1/2}\left(\tfrac{1}{9}du\right) = \tfrac{1}{9} \cdot \tfrac{2}{3}[u^{3/2}]_{37}^{55} = \tfrac{2}{27}\left(55\sqrt{55} - 37\sqrt{37}\right).$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

9.



$y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{4x} \;\Rightarrow\; y' = x^2 - \dfrac{1}{4x^2} \;\Rightarrow\; 1 + (y')^2 = 1 + \left(x^4 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{16x^4}\right) = x^4 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{16x^4} = \left(x^2 + \dfrac{1}{4x^2}\right)^2$. Donc,

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + (y')^2}\,dx = \int_1^2 \left|x^2 + \frac{1}{4x^2}\right| dx = \int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{4x^2}\right) dx$$
$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4x}\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{8}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{3} + \frac{1}{8} = \frac{59}{24}$$

10. $x = \dfrac{y^4}{8} + \dfrac{1}{4y^2} \;\Rightarrow\; \dfrac{dx}{dy} = \frac{1}{2}y^3 - \frac{1}{2}y^{-3} \;\Rightarrow\; 1 + (dx/dy)^2 = 1 + \frac{1}{4}y^6 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}y^{-6} = \frac{1}{4}y^6 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}y^{-6} = (\frac{1}{2}y^3 + \frac{1}{2}y^{-3})^2$. Donc,

$$L = \int_1^2 \sqrt{(\tfrac{1}{2}y^3 + \tfrac{1}{2}y^{-3})^2}\,dy = \int_1^2 (\tfrac{1}{2}y^3 + \tfrac{1}{2}y^{-3})dy = [\tfrac{1}{8}y^4 - \tfrac{1}{4}y^{-2}]_1^2 = (2 - \tfrac{1}{16}) - (\tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{4})$$
$$= 2 + \tfrac{1}{16} = \tfrac{33}{16}$$

11. $x = \frac{1}{3}\sqrt{y}(y-3) = \frac{1}{3}y^{3/2} - y^{1/2} \;\Rightarrow\; dx/dy = \frac{1}{2}y^{1/2} - \frac{1}{2}y^{-1/2} \;\Rightarrow\; 1 + (dx/dy)^2 = 1 + \frac{1}{4}y - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}y^{-1} = \frac{1}{4}y + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}y^{-1} = (\frac{1}{2}y^{1/2} + \frac{1}{2}y^{-1/2})^2$.

Donc,

$$L = \int_1^9 \left(\tfrac{1}{2}y^{1/2} + \tfrac{1}{2}y^{-1/2}\right) dy = \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{2}{3}y^{3/2} + 2y^{1/2}\right]_1^9 = \tfrac{1}{2}[(\tfrac{2}{3}\cdot 27 + 2\cdot 3) - (\tfrac{2}{3}\cdot 1 + 2\cdot 1)]$$
$$= \tfrac{1}{2}(24 - \tfrac{8}{3}) = \tfrac{1}{2}(\tfrac{64}{3}) = \tfrac{32}{3}$$

12. $y = \ln(\cos x) \;\Rightarrow\; dy/dx = -\tan x \;\Rightarrow\; 1 + (dy/dx)^2 = 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$. Donc,

$$L = \int_0^{\pi/3} \sqrt{\sec^2 x}\; dx = \int_0^{\pi/3} |\sec x|\; dx = \int_0^{\pi/3} \sec x\; dx = [\ln|\sec x + \tan x|]_0^{\pi/3} = \ln\left(2 + \sqrt{3}\right) - \ln(1+0) = \ln\left(2 + \sqrt{3}\right).$$

13. $y = \ln(\sec x) \;\Rightarrow\; \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sec x \tan x}{\sec x} = \tan x \;\Rightarrow\; 1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$. Donc,

$$L = \int_0^{\pi/4} \sqrt{\sec^2 x}\,dx = \int_0^{\pi/4} |\sec x|dx = \int_0^{\pi/4} \sec x\; dx = [\ln(\sec x + \tan x)]_0^{\pi/4}$$
$$= \ln\left(\sqrt{2} + 1\right) - \ln(1+0) = \ln\left(\sqrt{2} + 1\right)$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

14. $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2} \;\Rightarrow\; y'=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2} \;\Rightarrow\; 1+(dy/dx)^2=1+\dfrac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}=\dfrac{e^{2x}+e^{-2x}+2}{4}=\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2$. Donc,

$$L=\int_0^1\sqrt{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx=\int_0^1\left|\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right|dx=\int_0^1\frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx=\left[\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]_0^1=\frac{e^1-e^{-1}}{2}-\frac{e^0-e^{-0}}{2}=\tfrac{1}{2}\left(e-e^{-1}\right).$$

15. $y=\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{2}\ln x \;\Rightarrow\; y'=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2x} \;\Rightarrow\; 1+(y')^2=1+\left(\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4x^2}\right)=\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4x^2}=\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2x}\right)^2$.

Donc,

$$\begin{aligned}L&=\int_1^2\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_1^2\left|\frac{1}{2}x+\frac{1}{2x}\right|dx=\int_1^2\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2x}\right)dx\\&=\left[\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\ln|x|\right]_1^2=\left(1+\frac{1}{2}\ln 2\right)-\left(\frac{1}{4}+0\right)=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln 2\end{aligned}$$

16. $y=\sqrt{x-x^2}+\arcsin\left(\sqrt{x}\right) \;\Rightarrow\; \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}=\dfrac{2-2x}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}=\sqrt{\dfrac{1-x}{x}} \;\Rightarrow\; 1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2=1+\dfrac{1-x}{x}=\dfrac{1}{x}$. Les extrémités de la courbe sont les points (0, 0) et $(1,\frac{\pi}{2})$, Donc, $L=\int_0^1\sqrt{\dfrac{1}{x}}dx=\left[2\sqrt{x}\right]_0^1=2$.

17. $y=\ln(1-x^2) \;\Rightarrow\; y'=\dfrac{1}{1-x^2}\cdot(-2x) \;\Rightarrow\; 1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2=1+\dfrac{4x^2}{(1-x^2)^2}=\dfrac{1-2x^2+x^4+4x^2}{(1-x^2)^2}=\dfrac{1+2x^2+x^4}{(1-x^2)^2}=\dfrac{(1+x^2)^2}{(1-x^2)^2} \;\Rightarrow$

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^2}=\frac{1+x^2}{1-x^2}=-1+\frac{2}{1-x^2}\quad\text{[division euclidienne]}\quad=-1+\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\quad\text{[fractions partielles]}.$$

Donc, $L=\int_0^{1/2}\left(-1+\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-x}\right)dx=\left[-x+\ln|1+x|-\ln|1-x|\right]_0^{1/2}=(-\frac{1}{2}+\ln\frac{3}{2}-\ln\frac{1}{2})-0=\ln 3-\frac{1}{2}$.

18. $y=1-e^{-x} \;\Rightarrow\; y'=-(-e^{-x})=e^{-x} \;\Rightarrow\; 1+(dy/dx)^2=1+e^{-2x}$. Donc,

$$\begin{aligned}L&=\int_0^2\sqrt{1+e^{-2x}}\,dx=\int_1^{e^{-2}}\sqrt{1+u^2}\left(-\frac{1}{u}du\right)\quad[u=e^{-x}]\\&\overset{23}{=}\left[\ln\left|\frac{1+\sqrt{1+u^2}}{u}\right|-\sqrt{1+u^2}\right]_1^{e^{-2}}\quad\text{[changement de variable } u=\tan\theta\text{]}\\&=\ln\left|\frac{1+\sqrt{1+e^{-4}}}{e^{-2}}\right|-\sqrt{1+e^{-4}}-\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}}{1}\right|+\sqrt{2}\\&=\ln\left(1+\sqrt{1+e^{-4}}\right)-\ln e^{-2}-\sqrt{1+e^{-4}}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}\\&=\ln\left(1+\sqrt{1+e^{-4}}\right)+2-\sqrt{1+e^{-4}}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}\end{aligned}$$

19. $y=\frac{1}{2}x^2 \;\Rightarrow\; dy/dx=x \;\Rightarrow\; 1+(dy/dx)^2=1+x^2$. Donc,

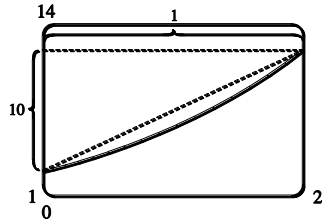
 © Groupe Modulo inc., 2013

$$L=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+x^2}\,dx=2\int_{0}^{1}\sqrt{1+x^2}\,dx \quad \text{[par symétrie]} \quad \overset{21}{=}2\left[\tfrac{\pi}{2}\sqrt{1+x^2}+\tfrac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]_0^1 \quad \left[\text{changement de variable } x=\tan\theta\right]$$
$$=2\left[\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}+\tfrac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)-\left(0+\tfrac{1}{2}\ln 1\right)\right]=\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

20. $x^2=(y-4)^3 \;\Rightarrow\; x=(y-4)^{3/2}$ [pour $x>0$] $\Rightarrow dx/dy=\tfrac{3}{2}(y-4)^{1/2} \;\Rightarrow\; 1+(dx/dy)^2=1+\tfrac{9}{4}(y-4)=\tfrac{9}{4}y-8$. Donc,

$$L=\int_5^8\sqrt{\tfrac{9}{4}y-8}\;dy=\int_{13/4}^{10}\sqrt{u}\,(\tfrac{4}{9}du)\quad\begin{bmatrix}u=\tfrac{9}{4}y-8,\\ du=\tfrac{9}{4}dy\end{bmatrix}\quad=\tfrac{4}{9}\left[\tfrac{2}{3}u^{3/2}\right]_{13/4}^{10}$$
$$=\tfrac{8}{27}[10^{3/2}-(\tfrac{13}{4})^{3/2}]\quad\left[\text{ou }\tfrac{1}{27}\left(80\sqrt{10}-13\sqrt{13}\right)\right]$$

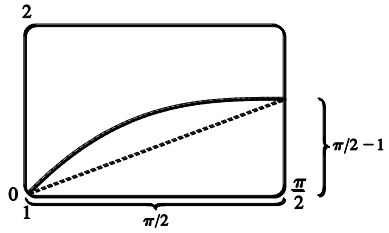
21.



Le graphique montre que la longueur de la courbe est légèrement supérieure à la longueur de l'hypoténuse du triangle formé par les points (1, 2), (1, 12) et (2, 12). Cette longueur étant d'environ $\sqrt{10^2+1^2}\approx 10$, nous estimons que la longueur de la courbe est 10.

$y=x^2+x^3 \;\Rightarrow\; y'=2x+3x^2 \;\Rightarrow\; 1+(y')^2=1+(2x+3x^2)^2$. Donc, $L=\int_1^2\sqrt{1+(2x+3x^2)^2}\,dx\approx 10{,}0556$.

22.



Le graphique montre que la longueur de la courbe est légèrement supérieure à la longueur de l'hypoténuse du triangle formé par les points (1, 1), $(\tfrac{\pi}{2},1)$ et $(\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2})$. Cette longueur étant d'environ $\sqrt{(\tfrac{\pi}{2})^2+(\tfrac{\pi}{2}-1)^2}\approx 1{,}7$, nous pouvons estimer que la longueur de la courbe est 1,7. $y=x+\cos x \;\Rightarrow\; y'=1-\sin x \;\Rightarrow\; 1+(y')^2=1+(1-\sin x)^2$. Donc, $L=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+(1-\sin x)^2}\,dx\approx 1{,}7294$.

23. $y=x\sin x \;\Rightarrow\; dy/dx=x\cos x+(\sin x)(1) \;\Rightarrow\; 1+(dy/dx)^2=1+(x\cos x+\sin x)^2$. Soit

$f(x)=\sqrt{1+(dy/dx)^2}=\sqrt{1+(x\cos x+\sin x)^2}$. Alors, $L=\int_0^{2\pi}f(x)dx$. Puisque $n=10$, $\Delta x=\tfrac{2\pi-0}{10}=\tfrac{\pi}{5}$. Or,

$L\approx S_{10}$
$=\tfrac{\pi/5}{3}f(0)+4f(\tfrac{\pi}{5})+2f(\tfrac{2\pi}{5})+4f(\tfrac{3\pi}{5})+2f(\tfrac{4\pi}{5})+4f(\tfrac{5\pi}{5})+2f(\tfrac{6\pi}{5})+4f(\tfrac{7\pi}{5})+2f(\tfrac{8\pi}{5})+4f(\tfrac{9\pi}{5})+f(2\pi)]$
$\approx 15{,}498\,085$

La valeur de l'intégrale fournie par une calculatrice est 15,374 568 (à six décimales près).

 © Groupe Modulo inc., 2013

24. $y = \sqrt[3]{x} \Rightarrow dy/dx = \frac{1}{3}x^{-2/3} \Rightarrow L = \int_1^6 f(x)dx$, où $f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{9}x^{-4/3}}$. Puisque $n = 10$, $\Delta x = \frac{6-1}{10} = \frac{1}{2}$.

Or,

$$\begin{aligned} L &\approx S_{10} \\ &= \tfrac{1/2}{3}[f(1) + 4f(1{,}5) + 2f(2) + 4f(2{,}5) + 2f(3) + 4f(3{,}5) + 2f(4) + 4f(4{,}5) + 2f(5) + 4f(5{,}5) + f(6)] \\ &\approx 5{,}074\,212 \end{aligned}$$

La valeur de l'intégrale fournie par une calculatrice est 5,074 094 (à six décimales près).

25. $y = \ln(1 + x^3) \Rightarrow dy/dx = \dfrac{1}{1+x^3} \cdot 3x^2 \Rightarrow L = \int_0^5 f(x)dx$, où $f(x) = \sqrt{1 + 9x^4/(1+x^3)^2}$. Puisque $n = 10$, $\Delta x = \frac{5-0}{10} = \frac{1}{2}$. Or,

$$\begin{aligned} L &\approx S_{10} \\ &= \tfrac{1/2}{3}[f(0) + 4f(0{,}5) + 2f(1) + 4f(1{,}5) + 2f(2) + 4f(2{,}5) + 2f(3) + 4f(3{,}5) + 2f(4) + 4f(4{,}5) + f(5)] \\ &\approx 7{,}094\,570 \end{aligned}$$

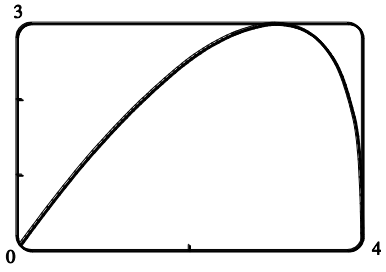
La valeur de l'intégrale fournie par une calculatrice est 7,118 819 (à six décimales près).

26. $y = e^{-x^2} \Rightarrow dy/dx = e^{-x^2}(-2x) \Rightarrow L = \int_0^2 f(x)dx$, où $f(x) = \sqrt{1 + 4x^2e^{-2x^2}}$. Puisque $n = 10$, $\Delta x = \frac{2-0}{10} = \frac{1}{5}$. Or,

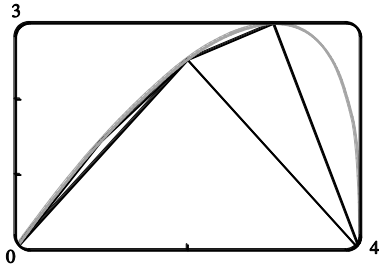
$$\begin{aligned} L &\approx S_{10} \\ &= \tfrac{1/5}{3}[f(0) + 4f(0{,}2) + 2f(0{,}4) + 4f(0{,}6) + 2f(0{,}8) + 4f(1) + 2f(1{,}2) + 4f(1{,}4) + 2f(1{,}6) + 4f(1{,}8) + f(2)] \\ &\approx 2{,}280\,559 \end{aligned}$$

La valeur de l'intégrale fournie par une calculatrice est 2,280 526.

27. a)



b)



 © Groupe Modulo inc., 2013

Soit $f(x) = y = x\sqrt[3]{4-x}$. Le polygone inscrit ayant un côté est simplement le segment de droite qui relie les points $(0, f(0)) = (0, 0)$ et $(4, f(4)) = (4, 0)$; sa longueur est $L_1 = 4$. Le polygone inscrit ayant deux côtés relie les points $(0, 0)$, $(2, f(2)) = \left(2, 2\sqrt[3]{2}\right)$ et $(4, 0)$. Sa longueur est

$$L_2 = \sqrt{(2-0)^2 + \left(2\sqrt[3]{2} - 0\right)^2} + \sqrt{(4-2)^2 + \left(0 - 2\sqrt[3]{2}\right)^2} = 2\sqrt{4 + 2^{8/3}} \approx 6,43$$

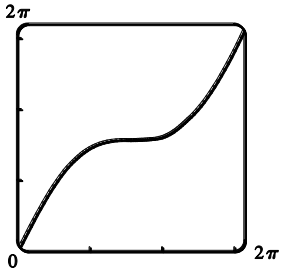
De façon similaire, le polygone inscrit ayant quatre côtés relie les points $(0, 0)$, $\left(1, \sqrt[3]{3}\right)$, $\left(2, 2\sqrt[3]{2}\right)$, $(3, 3)$ et $(4, 0)$. Sa longueur est donc

$$L_4 = \sqrt{1 + \left(\sqrt[3]{3}\right)^2} + \sqrt{1 + \left(2\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}\right)^2} + \sqrt{1 + \left(3 - 2\sqrt[3]{2}\right)^2} + \sqrt{1+9} \approx 7,50$$

c) À l'aide de la formule de la longueur d'un arc de courbe, où $\frac{dy}{dx} = x\left[\frac{1}{3}(4-x)^{-2/3}(-1)\right] + \sqrt[3]{4-x} = \frac{12-4x}{3(4-x)^{2/3}}$. La longueur L de la courbe est $L = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \left[\frac{12-4x}{3(4-x)^{2/3}}\right]^2}\, dx$.

d) La longueur de la courbe fournie par une calculatrice est $L \approx 7,7988$. Cette valeur est donc supérieure aux deux estimations obtenues à la sous-question b). Ceci est toujours vrai, puisque toute approximation au moyen d'une ligne droite entre deux points de la courbe sera plus courte que la longueur de la courbe elle-même entre ces deux points.

28. a) Soit $f(x) = y = x + \sin x$ avec $0 \le x \le 2\pi$.

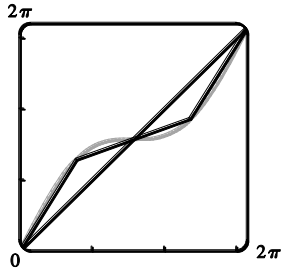


b) Le polygone inscrit ayant un côté est simplement le segment de droite qui relie les points $(0, f(0)) = (0, 0)$ et $(2\pi, f(2\pi)) = (2\pi, 2\pi)$; sa longueur est $\sqrt{(2\pi-0)^2 + (2\pi-0)^2} = 2\sqrt{2}\pi \approx 8,9$.

Le polygone inscrit ayant deux côtés relie les points $(0, 0)$, $(\pi, f(\pi)) = (\pi, \pi)$ et $(2\pi, 2\pi)$. Sa longueur est

$$\begin{aligned}\sqrt{(\pi-0)^2 + (\pi-0)^2} + \sqrt{(2\pi-\pi)^2 + (2\pi-\pi)^2} &= \sqrt{2}\pi + \sqrt{2}\pi \\ &= 2\sqrt{2}\pi \approx 8,9\end{aligned}$$

 © Groupe Modulo inc., 2013



Il n'est pas surprenant que les deux approximations soient identiques parce que les côtés du polygone ayant deux côtés sont en fait sur la même droite, puisque $f(\pi) = \pi = \frac{1}{2} f(2\pi)$.

Le polygone inscrit ayant quatre côtés relie les points (0; 0), $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 1)$, $(\pi; \pi)$, $(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} - 1)$ et $(2\pi; 2\pi)$. Sa longueur est donc

$$\sqrt{(\tfrac{\pi}{2})^2 + (\tfrac{\pi}{2}+1)^2} + \sqrt{(\tfrac{\pi}{2})^2 + (\tfrac{\pi}{2}-1)^2} + \sqrt{(\tfrac{\pi}{2})^2 + (\tfrac{\pi}{2}-1)^2} + \sqrt{(\tfrac{\pi}{2})^2 + (\tfrac{\pi}{2}+1)^2} \approx 9{,}4$$

c) Au moyen de la formule de la longueur d'un arc de courbe où $dy/dx = 1 + \cos x$. La longueur de la courbe est

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + (1 + \cos x)^2}\, dx = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2\cos x + \cos^2 x}\; dx$$

d) La valeur de l'intégrale fournie par une calculatrice est 9,5076. Cette longueur est supérieure aux approximations calculées à la sous-question b).

29. $y = \ln x \;\Rightarrow\; dy/dx = 1/x \;\Rightarrow\; 1 + (dy/dx)^2 = 1 + 1/x^2 = (x^2+1)/x^2 \;\Rightarrow$

$$L = \int_1^2 \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\, dx = \int_1^2 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\, dx \overset{23}{=} \left[\sqrt{1+x^2} - \ln\left| \frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x} \right| \right]_1^2$$

$$= \sqrt{5} - \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

30. $y = x^{4/3} \;\Rightarrow\; dy/dx = \frac{4}{3}x^{1/3} \;\Rightarrow\; 1 + (dy/dx)^2 = 1 + \frac{16}{9}x^{2/3} \;\Rightarrow$

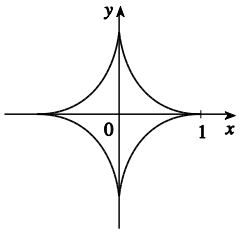
$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \tfrac{16}{9}x^{2/3}}\, dx = \int_0^{4/3} \sqrt{1+u^2}\, \tfrac{81}{64} u^2\, du \quad \left[\begin{array}{l} u = \frac{4}{3}x^{1/3}, du = \frac{4}{9}x^{-2/3}dx, \\ dx = \frac{9}{4}x^{2/3}du = \frac{9}{4}\cdot\frac{9}{16}u^2 du = \frac{81}{64}u^2 du \end{array} \right]$$

$$\overset{22}{=} \tfrac{81}{64}\left[\tfrac{1}{8}u(1+2u^2)\sqrt{1+u^2} - \tfrac{1}{8}\ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right) \right]_0^{4/3} = \tfrac{81}{64}\left[\tfrac{1}{6}(1+\tfrac{32}{9})\sqrt{\tfrac{25}{9}} - \tfrac{1}{8}\ln\left(\tfrac{4}{3} + \sqrt{\tfrac{25}{9}}\right) \right]$$

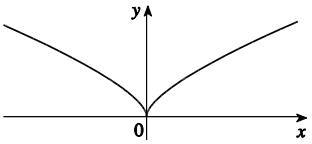
$$= \tfrac{81}{64}\left(\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{41}{9}\cdot\tfrac{5}{3} - \tfrac{1}{8}\ln 3\right) = \tfrac{205}{128} - \tfrac{81}{512}\ln 3 \approx 1{,}427\,758\,6$$

31. $y^{2/3} = 1 - x^{2/3} \;\Rightarrow\; y = (1-x^{2/3})^{3/2} \;\Rightarrow\; \dfrac{dy}{dx} = \frac{3}{2}(1-x^{2/3})^{1/2}\left(-\frac{2}{3}x^{-1/3}\right) = -x^{-1/3}(1-x^{2/3})^{1/2} \;\Rightarrow\; \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = x^{-2/3}(1-x^{2/3}) = x^{-2/3} - 1$. Par conséquent, $L = 4\int_0^1 \sqrt{1 + (x^{-2/3} - 1)}\, dx = 4\int_0^1 x^{-1/3}\, dx = 4 \lim_{t \to 0^+} [\frac{3}{2}x^{2/3}]_t^1 = 6$.

 © Groupe Modulo inc., 2013



32. a)



b) $y = x^{2/3} \quad \Rightarrow \quad 1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{2}{3}x^{-1/3}\right)^2 = 1 + \frac{4}{9}x^{-2/3}$. Donc, $L = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{4}{9}x^{-2/3}}\,dx$ [une intégrale impropre].

$x = y^{3/2} \quad \Rightarrow \quad 1 + \left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2 = 1 + \left(\frac{3}{2}y^{1/2}\right)^2 = 1 + \frac{9}{4}y$. Donc, $L = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}y}\,dy$.

La seconde intégrale est égale à $\frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3}\left[(1 + \frac{9}{4}y)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{8}{27}\left(\frac{13\sqrt{13}}{8} - 1\right) = \frac{13\sqrt{13} - 8}{27}$.

La première intégrale peut être évaluée comme suit :

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \tfrac{4}{9}x^{-2/3}}\,dx = \lim_{t \to 0^+} \int_t^1 \frac{\sqrt{9x^{2/3} + 4}}{3x^{1/3}}\,dx = \lim_{t \to 0^+} \int_{9t^{2/3}}^9 \frac{\sqrt{u + 4}}{18}\,du \quad \begin{bmatrix} u = 9x^{2/3}, \\ du = 6x^{-1/3}dx \end{bmatrix}$$

$$= \int_0^9 \frac{\sqrt{u + 4}}{18}\,du = \frac{1}{18} \cdot \left[\frac{2}{3}(u + 4)^{3/2}\right]_0^9 = \frac{1}{27}(13^{3/2} - 4^{3/2}) = \frac{13\sqrt{13} - 8}{27}$$

L = longueur de l'arc de courbe allant de $(-1,1)$ à $(8,4)$

c) $= \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}y}\,dy + \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}y}\,dy = \frac{13\sqrt{13} - 8}{27} + \frac{8}{27}\left[\left(1 + \frac{9}{4}y\right)^{3/2}\right]_0^4$ [selon la sous-question b)]

$$= \frac{13\sqrt{13} - 8}{27} + \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right) = \frac{13\sqrt{13} + 80\sqrt{10} - 16}{27}$$

33. $y = 2x^{3/2} \quad \Rightarrow \quad y' = 3x^{1/2} \quad \Rightarrow \quad 1 + (y')^2 = 1 + 9x$. La fonction longueur d'arc dont le point initial est $P_0(1, 2)$ est

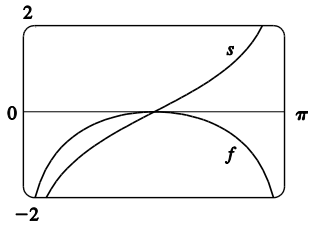
$s(x) = \int_1^x \sqrt{1 + 9t}\,dt = \left[\frac{2}{27}(1 + 9t)^{3/2}\right]_1^x = \frac{2}{27}\left[(1 + 9x)^{3/2} - 10\sqrt{10}\right]$.

34. a) $y = f(x) = \ln(\sin x) \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \cot x \quad \Rightarrow \quad 1 + (y')^2 = 1 + \cot^2 x = \csc^2 x \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{\csc^2 x} = |\csc x|$. Par conséquent,

$$s(x) = \int_{\pi/2}^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\,dt = \int_{\pi/2}^x \csc t\,dt = [\ln|\csc t - \cot t|]_{\pi/2}^x$$
$$= \ln|\csc x - \cot x| - \ln|1 - 0| = \ln(\csc x - \cot x)$$

b) Notons que la fonction s est croissante sur l'intervalle $]0, \pi[$ et que $x = 0$ et $x = \pi$ sont deux asymptotes verticales aux deux fonctions f et s.

 © Groupe Modulo inc., 2013



35. $y = \arcsin x + \sqrt{1-x^2} \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \Rightarrow$

$$1+(y')^2 = 1+\frac{(1-x)^2}{1-x^2} = \frac{1-x^2+1-2x+x^2}{1-x^2} = \frac{2-2x}{1-x^2} = \frac{2(1-x)}{(1+x)(1-x)} = \frac{2}{1+x} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{\frac{2}{1+x}}\,.$$

Par conséquent, la fonction longueur d'arc dont le point initial est (0, 1) est

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1+[f'(t)]^2}\,dt = \int_0^x \sqrt{\frac{2}{1+t}}\,dt = \sqrt{2}\left[2\sqrt{1+t}\right]_0^x = 2\sqrt{2}\left(\sqrt{1+x}-1\right).$$

36. $y = 50 - \frac{1}{10}(x-15)^2 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{1}{5}(x-15) \quad \Rightarrow \quad 1+(y')^2 = 1+\frac{1}{5^2}(x-15)^2\,.$

La distance parcourue par le cerf-volant est donc

$$L = \int_0^{25} \sqrt{1+\frac{1}{5^2}(x-15)^2}\,dx = \int_{-3}^{2} \sqrt{1+u^2}\,(5du) \quad \begin{bmatrix} u = \frac{1}{5}(x-15\ ), \\ du = \frac{1}{5}dx \end{bmatrix}$$

$$\overset{21}{=} 5\left[\tfrac{1}{2}u\sqrt{1+u^2} + \tfrac{1}{2}\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)\right]_{-3}^{2} = \tfrac{5}{2}\left[2\sqrt{5} + \ln\left(2+\sqrt{5}\right) + 3\sqrt{10} - \ln\left(-3+\sqrt{10}\right)\right]$$

$$= 5\sqrt{5} + \tfrac{15}{2}\sqrt{10} + \tfrac{5}{2}\ln\left(\tfrac{2+\sqrt{5}}{-3+\sqrt{10}}\right) \approx 43{,}1 \text{ m.}$$

37. La proie touche le sol lorsque $y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 180 - \frac{1}{45}x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 45 \cdot 180 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{8100} = 90$, puisque x doit être positif.

$y' = -\frac{2}{45}x \quad \Rightarrow \quad 1+(y')^2 = 1+\frac{4}{45^2}x^2$. La distance parcourue par la proie est donc

$$L = \int_0^{90} \sqrt{1+\frac{4}{45^2}x^2}\,dx = \int_0^4 \sqrt{1+u^2}\,(\tfrac{45}{2}du) \quad \begin{bmatrix} u = \frac{2}{45}x, \\ du = \frac{2}{45}dx \end{bmatrix}$$

$$\overset{21}{=} \tfrac{45}{2}\left[\tfrac{1}{2}u\sqrt{1+u^2} + \tfrac{1}{2}\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)\right]_0^4 = \tfrac{45}{2}\left[2\sqrt{17} + \tfrac{1}{2}\ln\left(4+\sqrt{17}\right)\right] = 45\sqrt{17} + \tfrac{45}{4}\ln\left(4+\sqrt{17}\right) \approx 209{,}1 \text{ m}$$

38. Soit $y = a - b\cosh cx$, où $a = 211{,}49$, $b = 20{,}96$ et $c = 0{,}032\,917\,65$. Alors, $y' = -bc\sinh cx \quad \Rightarrow \quad 1+(y')^2 = 1+b^2c^2\sinh^2(cx)$.

Donc, $L = \int_{-91.2}^{91.2} \sqrt{1+b^2c^2\sinh^2(cx)}\,dx \approx 451.137 \approx 451$, à un mètre près.

39. Puisqu'elle complète deux périodes sur une distance de 28 cm, l'onde sinusoïdale a une amplitude de 1 et une période de 14. Son équation est donc $y = 1\sin(\frac{2\pi}{14}x) = \sin(\frac{\pi}{7}x)$. La largeur l de la feuille de métal plane requise pour fabriquer le panneau est la longueur de l'arc de courbe de la fonction sinusoïdale allant de $x = 0$ à $x = 28$. Afin d'évaluer l au moyen d'une intégrale, nous utilisons la

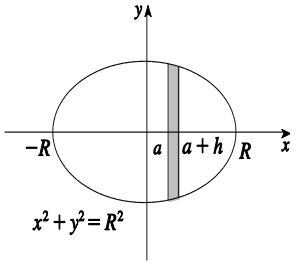
 © Groupe Modulo inc., 2013

formule de la longueur d'un arc de courbe avec $\frac{dy}{dx} = \frac{\pi}{7}\cos(\frac{\pi}{7}x)$: $L = \int_0^{28}\sqrt{1+[\frac{\pi}{7}\cos(\frac{\pi}{7}x)]^2}\,dx = 2\int_0^{14}\sqrt{1+[\frac{\pi}{7}\cos(\frac{\pi}{7}x)]^2}\,dx$. Il est difficile de trouver une primitive pour évaluer cette intégrale. Nous utilisons donc un logiciel de calcul symbolique et trouvons que $L \approx 29{,}36$ cm.

40. a) $y = c + a\cosh(\frac{x}{a}) \;\Rightarrow\; y' = \sinh(\frac{x}{a}) \;\Rightarrow\; 1+(y')^2 = 1+\sinh^2(\frac{x}{a}) = \cosh^2(\frac{x}{a})$.

Donc, $L = \int_{-b}^{b}\sqrt{\cosh^2(\frac{x}{a})}\,dx = 2\int_0^b \cosh(\frac{x}{a})dx = 2[a\sinh(\frac{x}{a})]_0^b = 2a\sinh(\frac{b}{a})$.

b) À $x = 0$, $y = c + a$, donc $c + a = 20$. Les poteaux téléphoniques sont espacés de 50 pi, donc $b = 25$ et $L = 51 \;\Rightarrow\; 51 = 2a\sinh(b/a)$ [selon la sous-question a)*]. La figure montre que la droite $y = 51$ coupe $y = 2x\sinh(25/x)$ à $x \approx 72{,}3843$ pour tout $x > 0$. Donc, $a \approx 72{,}3843$ et le fil doit être fixé à une hauteur de $y = c + a\cosh(25/a) = 20 - a + a\cosh(25/a) \approx 24{,}36$ pi au-dessus du sol.



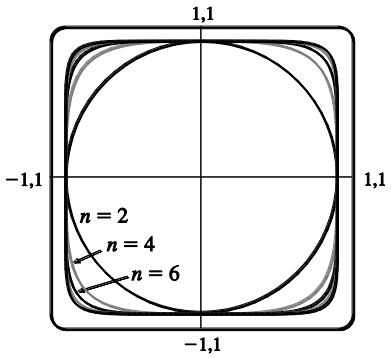
41. $y = \int_1^x \sqrt{t^3-1}\,dt \;\Rightarrow\; dy/dx = \sqrt{x^3-1}$ [selon le TFCl] $\Rightarrow 1+(dy/dx)^2 = 1+\left(\sqrt{x^3-1}\right)^2 = x^3 \;\Rightarrow$

$L = \int_1^4 \sqrt{x^3}\,dx = \int_1^4 x^{3/2}dx = \frac{2}{5}[x^{5/2}]_1^4 = \frac{2}{5}(32-1) = \frac{62}{5} = 12{,}4$

42. Par symétrie, la longueur de la courbe dans chaque quadrant est identique. Nous trouverons donc la longueur dans le premier quadrant et multiplierons le résultat par 4. $x^{2k} + y^{2k} = 1 \;\Rightarrow\; y^{2k} = 1 - x^{2k} \;\Rightarrow\; y = (1-x^{2k})^{1/(2k)}$ (dans le premier quadrant). Nous utilisons donc la formule de la longueur d'un arc de courbe avec $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2k}(1-x^{2k})^{1/(2k)-1}(-2kx^{2k-1}) = -x^{2k-1}(1-x^{2k})^{1/(2k)-1}$. Par conséquent, la longueur totale est

$$L_{2k} = 4\int_0^1 \sqrt{1+[-x^{2k-1}(1-x^{2k})^{1/(2k)-1}]^2}\,dx = 4\int_0^1 \sqrt{1+x^{2(2k-1)}(1-x^{2k})^{1/k-2}}\,dx$$

 © Groupe Modulo inc., 2013



La graphique montre qu'au fur et à mesure que la valeur de k augmente, les « coins » de ces cercles équarris se rapprochent des points $(\pm 1, \pm 1)$ et $(\pm 1, \mp 1)$ et leurs « extrémités » se rapprochent des droites qui relient ces quatre points. Il semble plausible qu'à mesure que $k \to \infty$, la longueur totale du cercle équarri avec $n = 2k$ se rapprochera de la longueur du périmètre du carré dont les côtés sont de longueur 2. Prenons la limite, à mesure que $k \to \infty$, de l'équation du cercle équarri dans le premier quadrant : $\lim_{k\to\infty}(1-x^{2k})^{1/(2k)} = 1$ pour $0 \le x < 1$, nous trouverons que ceci est bien le cas. Nous supposons donc que $\lim_{k\to\infty} L_{2k} = 4 \cdot 2 = 8$.

SUJET À EXPLORER : UNE COMPÉTITION ENTRE LONGUEURS D'ARC

Consultez l'article (en anglais) « Arc Length Contest », par Larry Riddle, dans *The College Mathematics Journal*, volume 29, no 4, septembre 1998, pages 314 à 320, pour des conseils sur la façon de lancer cette compétition et pour des exemples de propositions faites par des étudiants.

 © Groupe Modulo inc., 2013

4.2 L'aire d'une surface de révolution

1. a)

i) $y = \tan x \quad \Rightarrow \quad dy/dx = \sec^2 x \Rightarrow ds = \sqrt{1+(dy/dx)^2}\,dx = \sqrt{1+\sec^4 x}\;dx$. Selon la formule 7, une intégrale qui représente l'aire latérale de la surface résultant de la rotation de la courbe autour de l'axe des x est $S = \int 2\pi y ds = \int_0^{\pi/3} 2\pi \tan x \sqrt{1+\sec^4 x}\;dx$.

ii) Selon la formule 8, une intégrale qui représente l'aire latérale de la surface résultant de la rotation de la courbe autour de l'axe des y est $S = \int 2\pi x ds = \int_0^{\pi/3} 2\pi x \sqrt{1+\sec^4 x}\,dx$.

b)

i) 10,5017

ii) 7,9353

2. a)

i) $y = x^{-2} \quad \Rightarrow \quad dy/dx = -2x^{-3} \quad \Rightarrow \quad ds = \sqrt{1+(dy/dx)^2}\,dx = \sqrt{1+4x^{-6}}\,dx$. Selon la formule 7, $S = \int 2\pi y ds = \int_1^2 2\pi x^{-2}\sqrt{1+4x^{-6}}\,dx$.

ii) Selon la formule 8, $S = \int 2\pi x ds = \int_1^2 2\pi x \sqrt{1+4x^{-6}}\,dx$.

b)

i) 4,4566

ii) 11,7299

3. a)

i) $y = e^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad dy/dx = e^{-x^2}\cdot(-2x) \quad \Rightarrow \quad ds = \sqrt{1+(dy/dx)^2}\,dx = \sqrt{1+4x^2e^{-2x^2}}\,dx$. Selon la formule 7, $S = \int 2\pi y ds = \int_{-1}^1 2\pi e^{-x^2}\sqrt{1+4x^2e^{-2x^2}}\,dx$.

ii) Selon la formule 8, $S = \int 2\pi x ds = \int_0^1 2\pi x \sqrt{1+4x^2e^{-2x^2}}\,dx$ [symétrique par rapport à l'axe des y]

b)

i) 11,0753

ii) 3,9603

 © Groupe Modulo inc., 2013

4. a)

i) $x = \ln(2y+1) \;\Rightarrow\; dx/dy = \dfrac{2}{2y+1} \;\Rightarrow\; ds = \sqrt{1+(dx/dy)^2}\,dy = \sqrt{1+\dfrac{4}{(2y+1)^2}}\,dy$. Selon la formule 7,

$S = \int 2\pi y\,ds = \int_0^1 2\pi y\sqrt{1+\dfrac{4}{(2y+1)^2}}\,dy$.

ii) Selon la formule 8, $S = \int 2\pi x\,ds = \int_0^1 2\pi \ln(2y+1)\sqrt{1+\dfrac{4}{(2y+1)^2}}\,dy$.

b)

i) 4,2583

ii) 5,6053

5. $y = x^3 \;\Rightarrow\; y' = 3x^2$. Donc,

$$S = \int_0^2 2\pi y\sqrt{1+(y')^2}\,dx = 2\pi\int_0^2 x^3\sqrt{1+9x^4}\,dx \quad [u = 1+9x^4, du = 36x^3dx]$$
$$= \tfrac{2\pi}{36}\int_1^{145}\sqrt{u}\,du = \tfrac{\pi}{18}\left[\tfrac{2}{3}u^{3/2}\right]_1^{145} = \tfrac{\pi}{27}\left(145\sqrt{145}-1\right)$$

6. La courbe $9x = y^2 + 18$ est par rapport à l'axe des x. Nous n'utilisons donc que sa moitié supérieure, représentée par $y = 3\sqrt{x-2}$.

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{2\sqrt{x-2}}$, donc $1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 1+\dfrac{9}{4(x-2)}$. Par conséquent,

$$S = \int_2^6 2\pi\cdot 3\sqrt{x-2}\sqrt{1+\frac{9}{4(x-2)}}\,dx = 6\pi\int_2^6\sqrt{x-2+\tfrac{9}{4}}\,dx = 6\pi\int_2^6 (x+\tfrac{1}{4})^{1/2}\,dx$$
$$= 6\pi\cdot\tfrac{2}{3}[(x+\tfrac{1}{4})^{3/2}]_2^6 = 4\pi[(\tfrac{25}{4})^{3/2} - (\tfrac{9}{4})^{3/2}] = 4\pi(\tfrac{125}{8} - \tfrac{27}{8}) = 4\pi\cdot\tfrac{98}{8} = 49\pi$$

7. $y = \sqrt{1+4x} \;\Rightarrow\; y' = \tfrac{1}{2}(1+4x)^{-1/2}(4) = \dfrac{2}{\sqrt{1+4x}} \;\Rightarrow\; \sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\dfrac{4}{1+4x}} = \sqrt{\dfrac{5+4x}{1+4x}}$. Donc,

$$S = \int_1^5 2\pi y\sqrt{1+(y')^2}\,dx = 2\pi\int_1^5\sqrt{1+4x}\sqrt{\frac{5+4x}{1+4x}}\,dx = 2\pi\int_1^5\sqrt{4x+5}\,dx$$
$$= 2\pi\int_9^{25}\sqrt{u}(\tfrac{1}{4}du) \quad \begin{bmatrix} u = 4x+5 \\ du = 4dx \end{bmatrix} \quad = \tfrac{2\pi}{4}[\tfrac{2}{3}u^{3/2}]_9^{25} = \tfrac{\pi}{3}(25^{3/2} - 9^{3/2}) = \tfrac{\pi}{3}(125-27) = \tfrac{98}{3}\pi$$

8. $y = \sqrt{1+e^x} \;\Rightarrow\; y' = \tfrac{1}{2}(1+e^x)^{-1/2}(e^x) = \dfrac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}} \;\Rightarrow\; \sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\dfrac{e^{2x}}{4(1+e^x)}} = \sqrt{\dfrac{4+4e^x+e^{2x}}{4(1+e^x)}} = \sqrt{\dfrac{(e^x+2)^2}{4(1+e^x)}} = \dfrac{e^x+2}{2\sqrt{1+e^x}}$. Donc,

$$S = \int_0^1 2\pi y\sqrt{1+(y')^2}\,dx = 2\pi\int_0^1\sqrt{1+e^x}\,\frac{e^x+2}{2\sqrt{1+e^x}}\,dx = \pi\int_0^1(e^x+2)\,dx$$
$$= \pi[e^x+2x]_0^1 = \pi[(e+2)-(1+0)] = \pi(e+1)$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

9. $y=\sin \pi x \;\Rightarrow\; y'=\pi\cos \pi x \;\Rightarrow\; 1+(y')^2=1+\pi^2\cos^2(\pi x)$. Donc,

$$S=\int_0^1 2\pi y\sqrt{1+(y')^2}\,dx=2\pi\int_0^1 \sin \pi x\sqrt{1+\pi^2\cos^2(\pi x)}\,dx \quad \left[\begin{array}{l} u=\pi\cos \pi x, \\ du=-\pi^2\sin \pi x dx \end{array}\right]$$

$$=2\pi\int_{\pi}^{-\pi}\sqrt{1+u^2}\left(-\frac{1}{\pi^2}du\right)=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{1+u^2}\,du$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{1+u^2}\,du\overset{21}{=}\frac{4}{\pi}\left[\frac{u}{2}\sqrt{1+u^2}+\tfrac{1}{2}\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{4}{\pi}\left[\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{1+\pi^2}+\tfrac{1}{2}\ln\left(\pi+\sqrt{1+\pi^2}\right)\right)-0\right]=2\sqrt{1+\pi^2}+\frac{2}{\pi}\ln\left(\pi+\sqrt{1+\pi^2}\right)$$

10. $y=\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{1}{2x} \;\Rightarrow\; \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{2x^2} \;\Rightarrow\; \sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4x^4}}=\sqrt{\left(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2x^2}\right)^2}=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2x^2} \;\Rightarrow$

$$S=\int_{1/2}^1 2\pi\left(\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2x}\right)\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2x^2}\right)dx=2\pi\int_{1/2}^1\left(\frac{x^5}{12}+\frac{x}{12}+\frac{x}{4}+\frac{1}{4x^3}\right)dx$$

$$=2\pi\int_{1/2}^1\left(\frac{x^5}{12}+\frac{x}{3}+\frac{x^{-3}}{4}\right)dx=2\pi\left[\frac{x^6}{72}+\frac{x^2}{6}-\frac{x^{-2}}{8}\right]_{1/2}^1$$

$$=2\pi[(\tfrac{1}{72}+\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{8})-(\tfrac{1}{64\cdot 72}+\tfrac{1}{24}-\tfrac{1}{2})]=2\pi(\tfrac{263}{512})=\tfrac{263}{256}\pi$$

11. $x=\frac{1}{3}(y^2+2)^{3/2} \;\Rightarrow\; dx/dy=\frac{1}{2}(y^2+2)^{1/2}(2y)=y\sqrt{y^2+2} \;\Rightarrow\; 1+(dx/dy)^2=1+y^2(y^2+2)=(y^2+1)^2$. Donc,

$S=2\pi\int_1^2 y(y^2+1)dy=2\pi[\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{2}y^2]_1^2=2\pi(4+2-\frac{1}{4}-\frac{1}{2})=\frac{21\pi}{2}$.

12. $x=1+2y^2 \;\Rightarrow\; 1+(dx/dy)^2=1+(4y)^2=1+16y^2$. Donc,

$S=2\pi\int_1^2 y\sqrt{1+16y^2}dy=\frac{\pi}{16}\int_1^2(16y^2+1)^{1/2}32ydy=\frac{\pi}{16}[\frac{2}{3}(16y^2+1)^{3/2}]_1^2=\frac{\pi}{24}(65\sqrt{65}-17\sqrt{17})$.

13. $y=\sqrt[3]{x} \;\Rightarrow\; x=y^3 \;\Rightarrow\; 1+(dx/dy)^2=1+9y^4$. Donc,

$$S=2\pi\int_1^2 x\sqrt{1+(dx/dy)^2}dy=2\pi\int_1^2 y^3\sqrt{1+9y^4}dy=\tfrac{2\pi}{36}\int_1^2\sqrt{1+9y^4}36y^3dy=\tfrac{\pi}{18}[\tfrac{2}{3}(1+9y^4)^{3/2}]_1^2$$

$$=\tfrac{\pi}{27}\left(145\sqrt{145}-10\sqrt{10}\right)$$

14. $y=1-x^2 \;\Rightarrow\; 1+(dy/dx)^2=1+4x^2 \;\Rightarrow$

$S=2\pi\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}dx=\frac{\pi}{4}\int_0^1 8x\sqrt{4x^2+1}dx=\frac{\pi}{4}[\frac{2}{3}(4x^2+1)^{3/2}]_0^1=\frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)$

15. $x=\sqrt{a^2-y^2} \;\Rightarrow\; dx/dy=\frac{1}{2}(a^2-y^2)^{-1/2}(-2y)=-y/\sqrt{a^2-y^2} \;\Rightarrow\; 1+\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2=1+\dfrac{y^2}{a^2-y^2}=\dfrac{a^2-y^2}{a^2-y^2}+\dfrac{y^2}{a^2-y^2}=\dfrac{a^2}{a^2-y^2} \;\Rightarrow$

$$S=\int_0^{a/2}2\pi\sqrt{a^2-y^2}\,\frac{a}{\sqrt{a^2-y^2}}dy=2\pi\int_0^{a/2}a\,dy=2\pi a[y]_0^{a/2}=2\pi a\left(\frac{a}{2}-0\right)=\pi a^2.$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

On constate qu'il s'agit ici du quart de l'aire latérale de la surface d'une sphère de rayon a; la longueur de l'intervalle allant de $y = 0$ à $y = a/2$ est le quart de la longueur de l'intervalle allant de $y = -a$ à $y = a$.

16. $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x} \;\Rightarrow\; 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^2} = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^2} = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right)^2$. Donc,

$$S = \int_1^2 2\pi x\sqrt{\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right)^2}\,dx = 2\pi\int_1^2 x\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right)dx = \pi\int_1^2 (x^2+1)dx = \pi[\tfrac{1}{3}x^3 + x]_1^2$$
$$= \pi[(\tfrac{8}{3} + 2) - (\tfrac{1}{3} + 1)] = \tfrac{10}{3}\pi$$

17. $y = \frac{1}{5}x^5 \;\Rightarrow\; dy/dx = x^4 \;\Rightarrow\; 1 + (dy/dx)^2 = 1 + x^8 \;\Rightarrow\; S = \int_0^5 2\pi(\frac{1}{5}x^5)\sqrt{1+x^8}\,dx$. Soit $f(x) = \frac{2}{5}\pi x^5\sqrt{1+x^8}$. Puisque $n = 10$, $\Delta x = \frac{5-0}{10} = \frac{1}{2}$. Par conséquent,

$$S \approx S_{10}$$
$$= \tfrac{1/2}{3}[f(0) + 4f(0{,}5) + 2f(1) + 4f(1{,}5) + 2f(2) + 4f(2{,}5) + 2f(3) + 4f(3{,}5) + 2f(4) + 4f(4{,}5) + f(5)]$$
$$\approx 1\,230\,507$$

La valeur de cette intégrale produite par une calculatrice est environ 1 227 192.

18. $y = x + x^2 \;\Rightarrow\; dy/dx = 1 + 2x \;\Rightarrow\; 1 + (dy/dx)^2 = 1 + (1+2x)^2 \;\Rightarrow\; S = \int_0^1 2\pi(x+x^2)\sqrt{1+(1+2x)^2}\,dx$.

Soit $f(x) = 2\pi(x+x^2)\sqrt{1+(1+2x)^2}$. Puisque $n = 10$, $\Delta x = \frac{1-0}{10} = \frac{1}{10}$. Par conséquent,

$$S \approx S_{10}$$
$$= \tfrac{1/10}{3}[f(0) + 4f(0{,}1) + 2f(0{,}2) + 4f(0{,}3) + 2f(0{,}4) + 4f(0{,}5) + 2f(0{,}6) + 4f(0{,}7) + 2f(0{,}8) + 4f(0{,}9) + f(1)]$$
$$\approx 13{,}649\,368$$

La valeur de cette intégrale produite par une calculatrice est environ 13,649 370 (à six décimales près).

19. $y = xe^x \;\Rightarrow\; dy/dx = xe^x + e^x \;\Rightarrow\; 1 + (dy/dx)^2 = 1 + (xe^x + e^x)^2 \;\Rightarrow\; S = \int_0^1 2\pi xe^x\sqrt{1+(xe^x+e^x)^2}\,dx$.

Soit $f(x) = 2\pi xe^x\sqrt{1+(xe^x+e^x)^2}$. Puisque $n = 10$, $\Delta x = \frac{1-0}{10} = \frac{1}{10}$. Par conséquent,

$$S \approx S_{10}$$
$$= \frac{1/10}{3}[f(0) + 4f(0{,}1) + 2f(0{,}2) + 4f(0{,}3) + 2f(0{,}4) + 4f(0{,}5) + 2f(0{,}6) + 4f(0{,}7) + 2f(0{,}8) + 4f(0{,}9) + f(1)]$$
$$\approx 24{,}145\,807$$

La valeur de cette intégrale produite par une calculatrice est environ 24,144 251 (à six décimales près).

20. $y = x\ln x \;\Rightarrow\; dy/dx = x\cdot\frac{1}{x} + \ln x = 1 + \ln x \;\Rightarrow\; 1 + (dy/dx)^2 = 1 + (1+\ln x)^2 \;\Rightarrow\; S = \int_1^2 2\pi x\ln x\sqrt{1+(1+\ln x)^2}\,dx$.

Soit $f(x) = 2\pi x\ln x\sqrt{1+(1+\ln x)^2}$. Puisque $n = 10$, $\Delta x = \frac{2-1}{10} = \frac{1}{10}$. Par conséquent,

 © Groupe Modulo inc., 2013

$$\begin{aligned}
S &\approx S_{10} \\
&= \tfrac{1/10}{3}[f(1)+4f(1{,}1)+2f(1{,}2)+4f(1{,}3)+2f(1{,}4)+4f(1{,}5)+2f(1{,}6)+4f(1{,}7)+2f(1{,}8)+4f(1{,}9)+f(2)] \\
&\approx 7{,}248\,933
\end{aligned}$$

La valeur de cette intégrale produite par une calculatrice est environ 7,248 934 (à six décimales près).

21. $y = 1/x \;\Rightarrow\; ds = \sqrt{1+(dy/dx)^2}\,dx = \sqrt{1+(-1/x^2)^2}\,dx = \sqrt{1+1/x^4}\,dx \;\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
S &= \int_1^2 2\pi\cdot\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx = 2\pi\int_1^2\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}\,dx = 2\pi\int_1^4\frac{\sqrt{u^2+1}}{u^2}\left(\tfrac{1}{2}\,du\right) \quad [u=x^2, du=2x\,dx] \\
&= \pi\int_1^4\frac{\sqrt{1+u^2}}{u^2}\,du \overset{24}{=} \pi\left[-\frac{\sqrt{1+u^2}}{u}+\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)\right]_1^4 \\
&= \pi\left[-\tfrac{\sqrt{17}}{4}+\ln\left(4+\sqrt{17}\right)+\tfrac{\sqrt{2}}{1}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right] = \frac{\pi}{4}\left[4\ln\left(\sqrt{17}+4\right)-4\ln\left(\sqrt{2}+1\right)-\sqrt{17}+4\sqrt{2}\right]
\end{aligned}$$

22. $y = \sqrt{x^2+1} \;\Rightarrow\; \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \;\Rightarrow\; ds = \sqrt{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \sqrt{1+\dfrac{x^2}{x^2+1}}\,dx \;\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^3 2\pi\sqrt{x^2+1}\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+1}}\,dx = 2\pi\int_0^3\sqrt{2x^2+1}\,dx = 2\sqrt{2}\pi\int_0^3\sqrt{x^2+\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx \\
&\overset{21}{=} 2\sqrt{2}\pi\left[\tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2+\tfrac{1}{2}}+\tfrac{1}{4}\ln\left(x+\sqrt{x^2+\tfrac{1}{2}}\right)\right]_0^3 = 2\sqrt{2}\pi\left[\tfrac{3}{2}\sqrt{9+\tfrac{1}{2}}+\tfrac{1}{4}\ln\left(3+\sqrt{9+\tfrac{1}{2}}\right)-\tfrac{1}{4}\ln\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\
&= 2\sqrt{2}\pi\left[\tfrac{3}{2}\sqrt{\tfrac{19}{2}}+\tfrac{1}{4}\ln\left(3+\sqrt{\tfrac{19}{2}}\right)+\tfrac{1}{4}\ln\sqrt{2}\right] = 2\sqrt{2}\pi\left[\tfrac{3}{2}\tfrac{\sqrt{19}}{\sqrt{2}}+\tfrac{1}{4}\ln\left(3\sqrt{2}+\sqrt{19}\right)\right] \\
&= 3\sqrt{19}\pi+\tfrac{\pi}{\sqrt{2}}\ln\left(3\sqrt{2}+\sqrt{19}\right)
\end{aligned}$$

23. $y = x^3$ et $0 \le y \le 1 \;\Rightarrow\; y' = 3x^2$ et $0 \le x \le 1$.

$$S = \int_0^1 2\pi x\sqrt{1+(3x^2)^2}\,dx = 2\pi\int_0^3\sqrt{1+u^2}\,\tfrac{1}{6}\,du \quad \begin{bmatrix} u = 3x^2, \\ du = 6x\,dx \end{bmatrix} \quad = \tfrac{\pi}{3}\int_0^3\sqrt{1+u^2}\,du$$

$$\begin{aligned}
&\overset{21}{=} \text{[ou à l'aide d'un logiciel de calcul symbolique]}\ \tfrac{\pi}{3}\left[\tfrac{1}{2}u\sqrt{1+u^2}+\tfrac{1}{2}\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)\right]_0^3 \\
&= \tfrac{\pi}{3}\left[\tfrac{3}{2}\sqrt{10}+\tfrac{1}{2}\ln\left(3+\sqrt{10}\right)\right] = \tfrac{\pi}{6}\left[3\sqrt{10}+\ln\left(3+\sqrt{10}\right)\right]
\end{aligned}$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

24. $y = \ln(x+1)$, $0 \le x \le 1$. $ds = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \sqrt{1+\left(\frac{1}{x+1}\right)^2}\,dx$, donc

$$S = \int_0^1 2\pi x\sqrt{1+\frac{1}{(x+1)^2}}\,dx = \int_1^2 2\pi(u-1)\sqrt{1+\frac{1}{u^2}}\,du \quad [u = x+1, du = dx]$$

$$= 2\pi\int_1^2 u\frac{\sqrt{1+u^2}}{u}\,du - 2\pi\int_1^2 \frac{\sqrt{1+u^2}}{u}\,du = 2\pi\int_1^2 \sqrt{1+u^2}\,du - 2\pi\int_1^2 \frac{\sqrt{1+u^2}}{u}\,du$$

$$\overset{21,23}{=}\left[\begin{array}{c}\text{ou à l'aide d'un logiciel}\\ \text{de calcul symbolique}\end{array}\right] \quad 2\pi\left[\tfrac{1}{2}u\sqrt{1+u^2} + \tfrac{1}{2}\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)\right]_1^2 - 2\pi\left[\sqrt{1+u^2} - \ln\left(\frac{1+\sqrt{1+u^2}}{u}\right)\right]_1^2$$

$$= 2\pi\left[\sqrt{5} + \tfrac{1}{2}\ln\left(2+\sqrt{5}\right) - \tfrac{1}{2}\sqrt{2} - \tfrac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right] - 2\pi\left[\sqrt{5} - \ln\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$$

$$= 2\pi\left[\tfrac{1}{2}\ln\left(2+\sqrt{5}\right) + \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \tfrac{\sqrt{2}}{2} - \tfrac{3}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$$

25. $S = 2\pi\int_1^\infty y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = 2\pi\int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx = 2\pi\int_1^\infty \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}\,dx$. Plutôt que d'évaluer cette intégrale telle quelle, notons que $\sqrt{x^4+1} > \sqrt{x^4} = x^2$ pour $x > 0$. Alors, par comparaison nous avons $S = 2\pi\int_1^\infty \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}\,dx > 2\pi\int_1^\infty \frac{x^2}{x^3}\,dx = 2\pi\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$. Or, sachant que cette intégrale est divergente, donc l'aire latérale de la surface S est infinie.

26. $S = \int_0^\infty 2\pi y\sqrt{1+(dy/dx)^2}\,dx = 2\pi\int_0^\infty e^{-x}\sqrt{1+(-e^{-x})^2}\,dx \quad [y = e^{-x}, y' = -e^{-x}]$. Calculons $I = \int e^{-x}\sqrt{1+(-e^{-x})^2}\,dx$ en posant le changement de variable $u = -e^{-x}$, $du = e^{-x}\,dx$:

$I = \int\sqrt{1+u^2}\,du \overset{21}{=} \frac{1}{2}u\sqrt{1+u^2} + \frac{1}{2}\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right) + C = \frac{1}{2}(-e^{-x})\sqrt{1+e^{-2x}} + \frac{1}{2}\ln\left(-e^{-x}+\sqrt{1+e^{-2x}}\right) + C$. Revenons maintenant à l'intégrale donnant l'aire latérale de la surface. Nous obtenons

$$S = 2\pi\lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-x}\sqrt{1+(-e^{-x})^2}\,dx = 2\pi\lim_{t\to\infty}\left[\tfrac{1}{2}(-e^{-x})\sqrt{1+e^{-2x}} + \tfrac{1}{2}\ln\left(-e^{-x}+\sqrt{1+e^{-2x}}\right)\right]_0^t$$

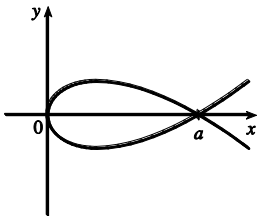
$$= 2\pi\lim_{t\to\infty}\left\{\left[\tfrac{1}{2}(-e^{-t})\sqrt{1+e^{-2t}} + \tfrac{1}{2}\ln\left(-e^{-t}+\sqrt{1+e^{-2t}}\right)\right] - \left[\tfrac{1}{2}(-1)\sqrt{1+1} + \tfrac{1}{2}\ln\left(-1+\sqrt{1+1}\right)\right]\right\}$$

$$= 2\pi\left\{\left[\tfrac{1}{2}(0)\sqrt{1} + \tfrac{1}{2}\ln\left(0+\sqrt{1}\right)\right] - \left[-\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}\ln\left(-1+\sqrt{2}\right)\right]\right\}$$

$$= 2\pi\left\{[0] + \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{2} - \ln\left(\sqrt{2}-1\right)\right]\right\} = \pi\left[\sqrt{2} - \ln\left(\sqrt{2}-1\right)\right]$$

27. Puisque $a > 0$, la courbe $3ay^2 = x(a-x)^2$ n'a des points que lorsque $x \ge 0$. [$3ay^2 \ge 0 \;\Rightarrow\; x(a-x)^2 \ge 0 \;\Rightarrow\; x \ge 0$.] La courbe est symétrique par rapport à l'axe des x (puisque l'équation demeure inchangée si y est remplacé par $-y$). $y = 0$ lorsque $x = 0$ ou a; la boucle de la courbe s'étend donc de $x = 0$ à $x = a$.

 © Groupe Modulo inc., 2013



$$\frac{d}{dx}(3ay^2)=\frac{d}{dx}[x(a-x)^2] \;\Rightarrow\; 6ay\frac{dy}{dx}=x\cdot 2(a-x)(-1)+(a-x)^2 \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx}=\frac{(a-x)[-2x+a-x]}{6ay} \;\Rightarrow$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{(a-x)^2(a-3x)^2}{36a^2y^2}=\frac{(a-x)^2(a-3x)^2}{36a^2}\cdot\frac{3a}{x(a-x)^2} \quad \left[\begin{matrix}\text{la dernière fraction}\\ \text{est } 1/y^2\end{matrix}\right]=\frac{(a-3x)^2}{12ax} \;\Rightarrow$$

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1+\frac{a^2-6ax+9x^2}{12ax}=\frac{12ax}{12ax}+\frac{a^2-6ax+9x^2}{12ax}=\frac{a^2+6ax+9x^2}{12ax}=\frac{(a+3x)^2}{12ax} \quad \text{pour } x\neq 0.$$

a)
$$S=\int_{x=0}^{a}2\pi y\,ds=2\pi\int_0^a\frac{\sqrt{x}(a-x)}{\sqrt{3a}}\cdot\frac{a+3x}{\sqrt{12ax}}dx=2\pi\int_0^a\frac{(a-x)(a+3x)}{6a}dx$$
$$=\frac{\pi}{3a}\int_0^a(a^2+2ax-3x^2)dx=\frac{\pi}{3a}[a^2x+ax^2-x^3]_0^a=\frac{\pi}{3a}(a^3+a^3-a^3)=\frac{\pi}{3a}\cdot a^3=\frac{\pi a^2}{3}.$$

Nous avons considéré une rotation de la moitié supérieure de la boucle autour de l'axe des x. Ceci génère l'aire latérale de la surface entière.

b) Nous devons effectuer une rotation de la boucle entière autour de l'axe des y; nous obtenons donc le double de l'aire latérale de la surface que nous avons générée en effectuant la rotation de la moitié supérieure de la boucle :

$$S=2\cdot 2\pi\int_{x=0}^{a}x\,ds=4\pi\int_0^a x\frac{a+3x}{\sqrt{12ax}}dx=\frac{4\pi}{2\sqrt{3a}}\int_0^a x^{1/2}(a+3x)dx=\frac{2\pi}{\sqrt{3a}}\int_0^a(ax^{1/2}+3x^{3/2})dx$$
$$=\frac{2\pi}{\sqrt{3a}}\left[\frac{2}{3}ax^{3/2}+\frac{6}{5}x^{5/2}\right]_0^a=\frac{2\pi\sqrt{3}}{3\sqrt{a}}\left(\frac{2}{3}a^{5/2}+\frac{6}{5}a^{5/2}\right)=\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2}{3}+\frac{6}{5}\right)a^2=\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}\left(\frac{28}{15}\right)a^2$$
$$=\frac{56\pi\sqrt{3}a^2}{45}$$

28. En général, si on effectue une rotation de la parabole $y=ax^2$, $-c\le x\le c$ autour de l'axe des y, l'aire latérale de la surface qui est générée est

$$2\pi\int_0^c x\sqrt{1+(2ax)^2}\,dx=2\pi\int_0^{2ac}\frac{u}{2a}\sqrt{1+u^2}\,\frac{1}{2a}du \quad \left[\begin{matrix}u=2ax,\\ du=2adx\end{matrix}\right] =\frac{\pi}{4a^2}\int_0^{2ac}(1+u^2)^{1/2}2u\,du$$
$$=\frac{\pi}{4a^2}\left[\tfrac{2}{3}(1+u^2)^{3/2}\right]_0^{2ac}=\frac{\pi}{6a^2}[(1+4a^2c^2)^{3/2}-1].$$

Ici, $2c=10$ m et $ac^2=2$ m, donc $c=5$ et $a=\frac{2}{25}$. Par conséquent, l'aire latérale de la surface est

$$S=\tfrac{\pi}{6}\tfrac{625}{4}[(1+4\cdot\tfrac{4}{625}\cdot 25)^{3/2}-1]=\tfrac{625\pi}{24}[(1+\tfrac{16}{25})^{3/2}-1]=\tfrac{625\pi}{24}\left(\tfrac{41\sqrt{41}}{125}-1\right)=\tfrac{5\pi}{24}\left(41\sqrt{41}-125\right)\approx 90{,}01\text{ m}^2.$$

29. a) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \;\Rightarrow\; \dfrac{y(dy/dx)}{b^2}=-\dfrac{x}{a^2} \;\Rightarrow\; \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{b^2x}{a^2y} \;\Rightarrow$

 © Groupe Modulo inc., 2013

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2} = \frac{b^4x^2+a^4y^2}{a^4y^2} = \frac{b^4x^2+a^4b^2(1-x^2/a^2)}{a^4b^2(1-x^2/a^2)} = \frac{a^4b^2+b^4x^2-a^2b^2x^2}{a^4b^2-a^2b^2x^2}$$
$$= \frac{a^4+b^2x^2-a^2x^2}{a^4-a^2x^2} = \frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2(a^2-x^2)}$$

L'aire latérale de l'ellipsoïde allongé est le double de l'aire générée en effectuant la rotation autour de l'axe des *x* de la portion de l'ellipse située dans le premier quadrant. Par conséquent,

$$S = 2\int_0^a 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = 4\pi\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\frac{\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}}{a\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \frac{4\pi b}{a^2}\int_0^a \sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}\,dx$$
$$= \frac{4\pi b}{a^2}\int_0^{a\sqrt{a^2-b^2}} \sqrt{a^4-u^2}\,\frac{du}{\sqrt{a^2-b^2}} \quad \left[u=\sqrt{a^2-b^2}\,x\right] \overset{30}{=} \frac{4\pi b}{a^2\sqrt{a^2-b^2}}\left[\frac{u}{2}\sqrt{a^4-u^2}+\frac{a^4}{2}\arcsin\left(\frac{u}{a^2}\right)\right]_0^{a\sqrt{a^2-b^2}}$$
$$= \frac{4\pi b}{a^2\sqrt{a^2-b^2}}\left[\frac{a\sqrt{a^2-b^2}}{2}\sqrt{a^4-a^2(a^2-b^2)}+\frac{a^4}{2}\arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right] = 2\pi\left[b^2+\frac{a^2b\arcsin\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}}{\sqrt{a^2-b^2}}\right]$$

b) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \;\Rightarrow\; \dfrac{x(dx/dy)}{a^2} = -\dfrac{y}{b^2} \;\Rightarrow\; \dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{a^2y}{b^2x} \;\Rightarrow$

$$1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 1+\frac{a^4y^2}{b^4x^2} = \frac{b^4x^2+a^4y^2}{b^4x^2} = \frac{b^4a^2(1-y^2/b^2)+a^4y^2}{b^4a^2(1-y^2/b^2)} = \frac{a^2b^4-a^2b^2y^2+a^4y^2}{a^2b^4-a^2b^2y^2}$$
$$= \frac{b^4-b^2y^2+a^2y^2}{b^4-b^2y^2} = \frac{b^4-(b^2-a^2)y^2}{b^2(b^2-y^2)}$$

L'aire latérale de l'ellipsoïde aplati est le double de l'aire générée en effectuant la rotation autour de l'axe des *x* de la portion de l'ellipse située dans le premier quadrant. Par conséquent,

$$S = 2\int_0^b 2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = 4\pi\int_0^b \frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}\,\frac{\sqrt{b^4-(b^2-a^2)y^2}}{b\sqrt{b^2-y^2}}\,dy$$
$$= \frac{4\pi a}{b^2}\int_0^b \sqrt{b^4-(b^2-a^2)y^2}\,dy = \frac{4\pi a}{b^2}\int_0^{b\sqrt{b^2-a^2}} \sqrt{b^4-u^2}\,\frac{du}{\sqrt{b^2-a^2}} \quad \left[u=\sqrt{b^2-a^2}\,y\right]$$
$$\overset{30}{=} \frac{4\pi a}{b^2\sqrt{b^2-a^2}}\left[\frac{u}{2}\sqrt{b^4-u^2}+\frac{b^4}{2}\arcsin\left(\frac{u}{b^2}\right)\right]_0^{b\sqrt{b^2-a^2}}$$
$$= \frac{4\pi a}{b^2\sqrt{b^2-a^2}}\,\frac{b\sqrt{b^2-a^2}}{2}\sqrt{b^4-b^2(b^2-a^2)}+\frac{b^4}{2}\arcsin\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b} = 2\pi\left[a^2+\frac{ab^2\arcsin\dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}}{\sqrt{b^2-a^2}}\right]$$

Remarquons que ce résultat peut être obtenu à partir de la réponse à la sous-question a), en intervertissant *a* et *b*.

30. On génère la moitié supérieure du tore en effectuant la rotation de la courbe$(x-R)^2+y^2=r^2$, $y>0$ autour de l'axe des y.

$y\dfrac{dy}{dx} = -(x-R) \;\Rightarrow\; 1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 1+\dfrac{(x-R)^2}{y^2} = \dfrac{y^2+(x-R)^2}{y^2} = \dfrac{r^2}{r^2-(x-R)^2}$. Par conséquent,

 © Groupe Modulo inc., 2013

$$S = 2\int_{R-r}^{R+r} 2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = 4\pi\int_{R-r}^{R+r}\frac{rx}{\sqrt{r^2-(x-R)^2}}\,dx = 4\pi r\int_{-r}^{r}\frac{u+R}{\sqrt{r^2-u^2}}\,du \quad [u = x-R]$$

$$= 4\pi r\int_{-r}^{r}\frac{u\,du}{\sqrt{r^2-u^2}} + 4\pi Rr\int_{-r}^{r}\frac{du}{\sqrt{r^2-u^2}} = 4\pi r\cdot 0 + 8\pi Rr\int_0^r\frac{du}{\sqrt{r^2-u^2}} \quad \left[\begin{array}{l}\text{puisque la première intégrande est}\\ \text{impaire et la seconde paire}\end{array}\right]$$

$$= 8\pi Rr[\arcsin(u/r)]_0^r = 8\pi Rr(\tfrac{\pi}{2}) = 4\pi^2 Rr$$

31. Ce à quoi correspond $f(x_i^*)$ dans le développement de la formule 4 est maintenant $c - f(x_i^*)$, donc

$$S = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 2\pi[c-f(x_i^*)]\sqrt{1+[f'(x_i^*)]^2}\,\Delta x = \int_a^b 2\pi[c-f(x)]\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

32. $y = x^{1/2} \Rightarrow y' = \frac{1}{2}x^{-1/2} \Rightarrow 1+(y')2 = 1+1/4x$, donc, selon l'exercice 31, $S = \int_0^4 2\pi\left(4-\sqrt{x}\right)\sqrt{1+1/(4x)}\,dx$. À l'aide d'un logiciel de calcul symbolique, nous obtenons $S = 2\pi\ln\left(\sqrt{17}+4\right)+\frac{\pi}{6}\left(31\sqrt{17}+1\right) \approx 80{,}6095$.

33. Pour le demi-cercle supérieur, $f(x) = \sqrt{r^2-x^2}$, $f'(x) = -x/\sqrt{r^2-x^2}$. L'aire latérale de la surface générée est

$$S_1 = \int_{-r}^{r} 2\pi\left(r-\sqrt{r^2-x^2}\right)\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx = 4\pi\int_0^r\left(r-\sqrt{r^2-x^2}\right)\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx$$

$$= 4\pi\int_0^r\left(\frac{r^2}{\sqrt{r^2-x^2}}-r\right)dx$$

Pour le demi-cercle inférieur, $f(x) = -\sqrt{r^2-x^2}$ et $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$, donc $S_2 = 4\pi\int_0^r\left(\dfrac{r^2}{\sqrt{r^2-x^2}}+r\right)dx$. Par conséquent, l'aire totale est $S = S_1 + S_2 = 8\pi\int_0^r\left(\dfrac{r^2}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)dx = 8\pi\left[r^2\arcsin\left(\dfrac{x}{r}\right)\right]_0^r = 8\pi r^2\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 4\pi^2 r^2$.

34. a) Effectuons la rotation de $y = \sqrt{R^2-x^2}$, avec $a \le x \le a+h$, autour de l'axe des x afin de générer une portion de sphère.

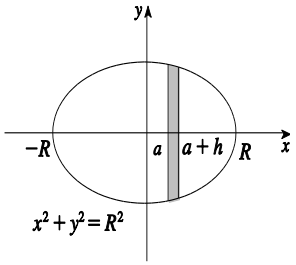
$y = \sqrt{R^2-x^2} \Rightarrow y' = \frac{1}{2}(R^2-x^2)^{-1/2}(-2x) \Rightarrow ds = \sqrt{1+\left(\dfrac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}\,dx$. L'aire latérale de la surface est

$$S = \int_a^{a+h} 2\pi y\,ds = 2\pi\int_a^{a+h}\sqrt{R^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx$$

$$= 2\pi\int_a^{a+h}\sqrt{R^2-x^2+x^2}\,dx = 2\pi R[x]_a^{a+h}$$

$$= 2\pi R(a+h-a) = 2\pi Rh$$

 © Groupe Modulo inc., 2013



b) Effectuons la rotation de $y = R$, avec $0 \le x \le h$, autour de l'axe des x afin de générer une portion de cylindre.

$y = R \;\Rightarrow\; y' = 0 \;\Rightarrow\; ds = \sqrt{1+0^2}\,dx = dx$. L'aire latérale de la surface est $S = \int_0^h 2\pi y\,ds = 2\pi\int_0^h R\,dx = 2\pi R[x]_0^h = 2\pi Rh$.

35. Dans le développement de la formule 4, nous avons considéré qu'un élément représentatif de l'aire latérale de la surface était $2\pi\frac{y_{i-1}+y_i}{2}|P_{i-1}P_i|$, soit l'aire latérale d'un cône droit tronqué. Lorsque la valeur de $f(x)$ n'est pas nécessairement positive, les approximations $y_i = f(x_i) \approx f(x_i^*)$ et $y_{i-1} = f(x_{i-1}) \approx f(x_i^*)$ doivent être remplacées par $y_i = |f(x_i)| \approx |f(x_i^*)|$ et $y_{i-1} = |f(x_{i-1})| \approx |f(x_i^*)|$. Par conséquent, $2\pi\frac{y_{i-1}+y_i}{2}|P_{i-1}P_i| \approx 2\pi|f(x_i^*)|\sqrt{1+[f'(x_i^*)]^2}\,\Delta x$. Avec un raisonnement semblable à celui que nous avons fait auparavant, nous obtenons $S = \int_a^b 2\pi|f(x)|\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$.

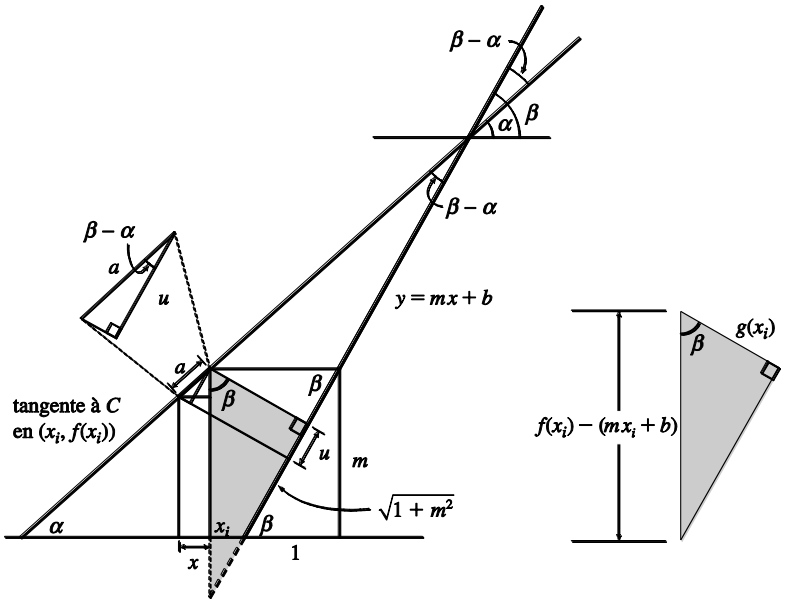
36. Puisque $g(x) = f(x) + c$, nous avons $g'(x) = f'(x)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} S_g &= \int_a^b 2\pi g(x)\sqrt{1+[g'(x)]^2}\,dx = \int_a^b 2\pi[f(x)+c]\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx \\ &= \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx + 2\pi c\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = S_f + 2\pi cL \end{aligned}$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

SUJET À EXPLORER : ROTATION AUTOUR D'UN AXE OBLIQUE

1.



Dans le graphique, le segment a situé au-dessus de l'intervalle $[x_i - \Delta x,\ x_i]$ et le long de la droite tangente à C est de longueur $\Delta x \sec\alpha = \Delta x\sqrt{1+\tan^2\alpha} = \sqrt{1+[f'(x_i)]^2}\,\Delta x$. Le segment de droite dont l'origine est au point $(x_i,\ f(x_i))$, tracé perpendiculairement à la droite $y = mx + b$, est de longueur

$$g(x_i) = [f(x_i) - mx_i - b]\cos\beta = \frac{f(x_i) - mx_i - b}{\sec\beta} = \frac{f(x_i) - mx_i - b}{\sqrt{1+\tan^2\beta}} = \frac{f(x_i) - mx_i - b}{\sqrt{1+m^2}}$$

De plus, $\cos(\beta - \alpha) = \dfrac{\Delta u}{\Delta x \sec\alpha} \quad \Rightarrow$

$$\Delta u = \Delta x \sec\alpha \cos(\beta - \alpha) = \Delta x \frac{\cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha}{\cos\alpha} = \Delta x(\cos\beta + \sin\beta\tan\alpha)$$
$$= \Delta x\left[\frac{1}{\sqrt{1+m^2}} + \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} f'(x_i)\right] = \frac{1+mf'(xi)}{\sqrt{1+m^2}}\Delta x$$

Par conséquent,

$$\text{Aire}(\mathscr{R}) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\ \Delta u = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i) - mx_i - b}{\sqrt{1+m^2}} \cdot \frac{1+mf'(x_i)}{\sqrt{1+m^2}}\Delta x$$
$$= \frac{1}{1+m^2}\int_p^q [f(x) - mx - b][1+mf'(x)]dx$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

2. Selon le problème 1, avec $m = 1, f(x) = x + \sin x$, $mx + b = x - 2$, $p = 0$ et $q = 2\pi$,

$$\begin{aligned}\text{Aire} &= \frac{1}{1+1^2}\int_0^{2\pi}[x+\sin x-(x-2)][1+1(1+\cos x)]dx = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\sin x+2)(2+\cos x)dx \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}(2\sin x+\sin x\cos x+4+2\cos x)dx = \tfrac{1}{2}[-2\cos x+\tfrac{1}{2}\sin^2 x+4x+2\sin x]_0^{2\pi} \\ &= \tfrac{1}{2}[(-2+0+8\pi+0)-(-2+0+0+0)] = \tfrac{1}{2}(8\pi) = 4\pi\end{aligned}$$

3. $$V = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\pi[g(x_i)]^2\Delta u = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\pi\left[\frac{f(x_i)-mx_i-b}{\sqrt{1+m^2}}\right]^2\frac{1+mf'(x_i)}{\sqrt{1+m^2}}\Delta x$$

$$= \frac{\pi}{(1+m^2)^{3/2}}\int_p^q[f(x)-mx-b]^2[1+mf'(x)]dx$$

4. $$V = \frac{\pi}{(1+1^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi}(x+\sin x-x+2)^2(1+1+\cos x)dx$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}(\sin x+2)^2(\cos x+2)dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}(\sin^2 x+4\sin x+4)(\cos x+2)dx$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}(\sin^2 x\cos x+4\sin x\cos x+4\cos x+2\sin^2 x+8\sin x+8)dx$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}[\tfrac{1}{3}\sin^3 x+2\sin^2 x+4\sin x+x-\tfrac{1}{2}\sin 2x-8\cos x+8x]_0^{2\pi} \quad [\text{puisque } 2\sin^2 x = 1-\cos 2x]$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}[(2\pi-8+16\pi)-(-8)] = \frac{9\sqrt{2}}{2}\pi^2$$

5. $$S = \int_p^q 2\pi g(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = \frac{2\pi}{\sqrt{1+m^2}}\int_p^q[f(x)-mx-b]\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

6. Selon le problème 5, avec $f(x) = \sqrt{x}$, $p = 0$, $q = 4$, $m = \frac{1}{2}$ et $b = 0$,

$$S = \frac{2\pi}{\sqrt{1+(\frac{1}{2})^2}}\int_0^4\left(\sqrt{x}-\tfrac{1}{2}x\right)\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\,dx \overset{\text{LCS}}{=} \frac{\pi}{\sqrt{5}}\left[\frac{\ln\left(\sqrt{17}+4\right)}{32}+\frac{37\sqrt{17}}{24}-\frac{1}{3}\right] \approx 8{,}554$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

4.3 Les applications aux domaines de la physique et du génie

1. La masse volumique de l'eau est ρ = 1000 kg/m^3.

a) $P = \rho gd \approx$ (1000 kg/m^3)(9,8 m/s^2)(1 m) = 9800 Pa = 9,8 kPa

b) $F = PA \approx$ (9800 Pa)(1,5 m)(0,5 m) = 7350 N. (A est l'aire du fond de l'aquarium.)

c) Comme à l'exemple 1, l'aire de la i^{e} bande est 0,5(Δx) et la pression hydrostatique est $\rho d = \rho x_i$. Par conséquent,

$$F = \int_0^1 \rho gx \cdot 0,5dx \approx (1000)(9,8)(0,5)\int_0^1 xdx = 4900[\tfrac{1}{2}x^2]_0^1 = 4900(\tfrac{1}{2}) = 2450 \text{ N}.$$

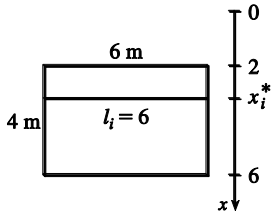
2. a) $P = \rho gd$ = (820 kg/m^3)(9,8 m/s^2)(1,5 m) = 12 054 Pa ≈ 12 kPa

b) $F = P\,A$ = (12 054 Pa)(8 m)(4 m) ≈ 3,86 × 10^5 N (A est l'aire du fond du réservoir.)

c) L'aire de la $i^{\text{ème}}$ bande est 4(Δx) et la pression hydrostatique est $\rho gd = \rho g\, x_i$. Par conséquent, $F = \int_0^{1,5} \rho gx \cdot 4dx = (820)(9,8)\cdot 4\int_0^{1,5} xdx = 32\,144[\tfrac{1}{2}x^2]_0^{3/2} = 16\,072(\tfrac{9}{4}) \approx 3,62\times 10^4$ N.

Aux exercices 3 à 9, n est le nombre de sous-intervalles de longueur Δx, et x_i^* est un point d'échantillonnage dans le $i^{\text{ème}}$ sous-intervalle $[x_{i-1}, x_i]$.

3. Comme le montre la figure, établissons un axe des x vertical, pour lequel $x = 0$ à la surface de l'eau et la valeur de x augmente vers le bas. L'aire de la i^{e} bande rectangulaire est donc 6Δx et la pression qui s'exerce sur la bande est ρgx_i^* (où $\rho \approx 1000$ kg/m^3). Par conséquent, la force hydrostatique sur la bande est $\rho gx_i^* \cdot 6\Delta x$ et la force hydrostatique totale $\approx \sum_{i=1}^{n} \rho gx_i^* \cdot 6\Delta x$. La force totale est

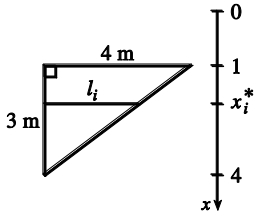


$$F = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho gx_i^* \cdot 6\Delta x = \int_2^6 \rho gx \cdot 6dx = 6\rho g\int_2^6 xdx = 6\rho g[\tfrac{1}{2}x^2]_2^6 = 6\rho g(18-2) = 96\rho g = 940\,800 \approx 9,41\times 10^5 \text{ N}.$$

4. Positionnons un axe des x vertical comme le montre la figure. L'aire de la i^{e} bande rectangulaire est alors $\frac{4}{3}(4 - x_i^*)\Delta x$.

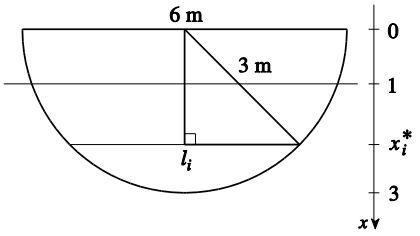
$\left[\text{Selon les propriétés des triangles semblables, } \frac{l_i}{4 - x_i^*} = \frac{4}{3}, \text{ donc } l_i = \tfrac{4}{3}(4 - x_i^*).\right]$ La pression qui s'exerce sur la bande est ρgx_i^*, donc la force hydrostatique sur la bande est $\rho gx_i^* \cdot \frac{4}{3}(4 - x_i^*)\Delta x$ et la force totale sur la plaque $\approx \sum_{i=1}^{n} \rho gx_i^* \cdot \frac{4}{3}(4 - x_i^*)\Delta x$. La force totale est

 © Groupe Modulo inc., 2013



$$F = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\rho g x_i^*\cdot\tfrac{4}{3}(4-x_i^*)\Delta x = \int_1^4 \rho g x\cdot\tfrac{4}{3}(4-x)dx = \tfrac{4}{3}\rho g\int_1^4(4x-x^2)dx$$
$$= \tfrac{4}{3}\rho g[2x^2-\tfrac{1}{3}x^3]_1^4 = \tfrac{4}{3}\rho g[(32-\tfrac{64}{3})-(2-\tfrac{1}{3})] = \tfrac{4}{3}\rho g(9) = 12\rho g = 117\,600 \approx 1{,}18\times10^5 \text{ N}.$$

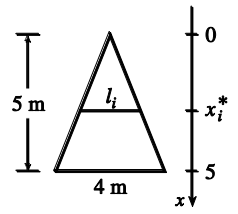
5. Positionnons un axe des x vertical comme le montre la figure. La base du triangle apparaissant à la figure est de longueur $\sqrt{3^2-(x_i^*)^2}$, donc $l_i = 2\sqrt{9-(x_i^*)^2}$, et l'aire de la $i^{\text{ème}}$ bande rectangulaire est $2\sqrt{9-(x_i^*)^2}\Delta x$. La $i^{\text{ème}}$ bande rectangulaire est située à (x_i^*-1) m sous la surface de l'eau; la pression qui s'exerce sur la bande est donc $\rho g(x_i^*-1)$. La force hydrostatique sur la bande est $\rho g(x_i^*-1)\cdot 2\sqrt{9-(x_i^*)^2}\Delta x$ et la force totale sur la plaque $\approx \sum_{i=1}^{n}\rho g(x_i^*-1)\cdot 2\sqrt{9-(x_i^*)^2}\ \Delta x$. La force totale



$$F = \lim_{i=1}^{n}\sum\rho g(x_i^*-1)\cdot 2\sqrt{9-(x_i^*)^2}\Delta x = 2\rho g\int_1^3(x-1)\sqrt{9-x^2}\,dx$$
$$= 2\rho g\int_1^3 x\sqrt{9-x^2}\,dx - 2\rho g\int_1^3\sqrt{9-x^2}\,dx \overset{30}{=} 2\rho g[-\tfrac{1}{3}(9-x^2)^{3/2}]_1^3 - 2\rho g\left[\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2}+\tfrac{9}{2}\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)\right]_1^3$$
$$= 2\rho g\left[0+\tfrac{1}{3}\left(8\sqrt{8}\right)\right] - 2\rho g\left[\left(0+\tfrac{9}{2}\cdot\tfrac{\pi}{2}\right)-\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{8}+\tfrac{9}{2}\arcsin\left(\tfrac{1}{3}\right)\right)\right]$$
$$= \tfrac{32}{3}\sqrt{2}\rho g - \tfrac{9\pi}{2}\rho g + 2\sqrt{2}\rho g + 9[\arcsin(\tfrac{1}{3})]\rho g = \left(\tfrac{38}{3}\sqrt{2}-\tfrac{9\pi}{2}+9\arcsin(\tfrac{1}{3})\right)\rho g$$
$$\approx 6{,}835\cdot 1000\cdot 9{,}8 = 66\,983 \approx 6{,}7\times10^4 \text{ N}$$

Remarque : Si nous choisissons plutôt un système de coordonnées où la surface de l'eau se trouve en $y = -1$, alors $F = \int_{-3}^{-1}\rho g(-1-y)2\sqrt{9-y^2}\,dy$.

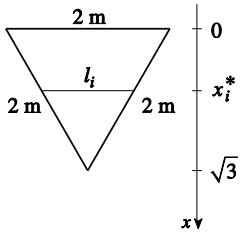
6. Selon les propriétés des triangles semblables, $l_i/4 = x_i^*/5$, donc $l_i = \frac{4}{5}x_i^*$ et l'aire de la $i^{\text{ème}}$ bande est $\frac{4}{5}x_i^*\Delta x$. La pression qui s'exerce sur la bande est $\rho g x_i^*$, donc la force hydrostatique sur la bande est $\rho g x_i^*\cdot\frac{4}{5}x_i^*\Delta x$ et la force totale sur la plaque $\approx \sum_{i=1}^{n}\rho g x_i^*\cdot\frac{4}{5}x_i^*\Delta x$. La force totale



$$F = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\rho g x_i^* \cdot \tfrac{4}{5}x_i^*\Delta x = \int_0^5 \rho g x \cdot \tfrac{4}{5}x\,dx = \tfrac{4}{5}\rho g[\tfrac{1}{3}x^3]_0^5 = \tfrac{4}{5}\rho g \cdot \tfrac{125}{3} = \tfrac{100}{3}\rho g$$
$$\approx \tfrac{100}{3}\cdot 1000 \cdot 9{,}8 \approx 326\,667 \approx 3{,}3\times 10^5 \text{ N}$$

7. Positionnons un axe des x vertical comme le montre la figure. L'aire de la $i^{\text{ème}}$ bande rectangulaire est donc $\left(2-\frac{2}{\sqrt{3}}x_i^*\right)\Delta x$.

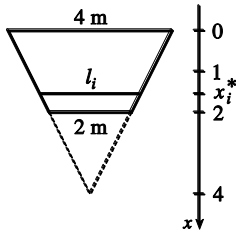
$\left[\text{Selon les propriétés des triangles semblables, } \frac{l_i}{2} = \frac{\sqrt{3}-x_i^*}{\sqrt{3}}, \text{ donc } l_i = 2-\frac{2}{\sqrt{3}}x_i^*\right]$. La pression qui s'exerce sur la bande est $\rho g x_i^*$, donc la force hydrostatique sur la bande est $\rho g x_i^*\left(2-\frac{2}{\sqrt{3}}x_i^*\right)\Delta x$ et la force sur la plaque $\approx \sum_{i=1}^{n}\rho g x_i^*\left(2-\frac{2}{\sqrt{3}}x_i^*\right)\Delta x$. La force totale



$$F = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\rho g x_i^*\left(2-\frac{2}{\sqrt{3}}x_i^*\right)\Delta x = \int_0^{\sqrt{3}}\rho g x\left(2-\frac{2}{\sqrt{3}}x\right)dx = \rho g\int_0^{\sqrt{3}}\left(2x-\frac{2}{\sqrt{3}}x^2\right)dx$$
$$= \rho g\left[x^2-\frac{2}{3\sqrt{3}}x^3\right]_0^{\sqrt{3}} = \rho g[(3-2)-0] = \rho g \approx 1000\cdot 9{,}8 = 9{,}8\times 10^3 \text{ N}$$

8. Positionnons un axe des x vertical comme le montre la figure. L'aire de la $i^{\text{ème}}$ bande rectangulaire est donc $(4-x_i^*)\,\Delta x$.

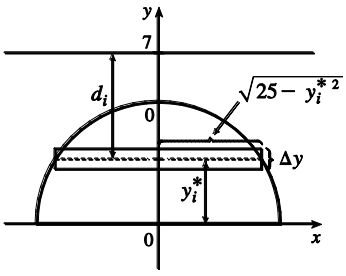
$\left[\text{Selon les propriétés des triangles semblables, } \frac{l_i}{4} = \frac{4-x_i^*}{4}, \text{ donc } l_i = 4-x_i^*.\right]$ La $i^{\text{ème}}$ bande rectangulaire est située à (x_i^*-1) m sous la surface de l'eau, donc la pression qui s'exerce sur la bande est $\rho g(x_i^*-1)$. La force hydrostatique sur la bande est $\rho g(x_i^*-1)(4-x_i^*)\Delta x$ et la force sur la plaque $\approx \sum_{i=1}^{n}\rho g(x_i^*-1)(4-x_i^*)\Delta x$. La force totale



$$F = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\rho g(x_i^*-1)(4-x_i^*)\Delta x = \int_1^2 \rho g(x-1)(4-x)dx = \rho g\int_1^2(-x^2+5x-4)dx$$
$$= \rho g[-\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{5}{2}x^2-4x]_1^2 = \rho g[(-\tfrac{8}{3}+10-8)-(-\tfrac{1}{3}+\tfrac{5}{2}-4)]$$
$$= \tfrac{7}{6}\rho g \approx \tfrac{7}{6}\cdot 1000\cdot 9{,}8 \approx 11\,433 \approx 1{,}14\times 10^4 \text{ N}$$

Remarque : Si nous décidons que le niveau de l'eau correspond à $x = 0$, alors $F = \int_0^1 \rho g x(3-x)dx$.

9. Positionnons des axes de coordonnées comme le montre la figure. La longueur de la i^{e} bande est $2\sqrt{25-(y_i^*)^2}$ et son aire est $2\sqrt{25-(y_i^*)^2}\Delta y$. La pression qui s'exerce sur cette bande est d'environ $\rho g d_i = 9800(7-y_i^*)$; la force sur la bande est donc d'environ $9800(7-y_i^*)2\sqrt{25-(y_i^*)^2}\Delta y$. La force totale est



$$F = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}9800(7-y_i^*)2\sqrt{25-(y_i^*)^2}\Delta y = 19\,600\int_0^5(7-y)\sqrt{25-y^2}dy$$
$$= 19\,600\left\{\int_0^5 7\sqrt{25-y^2}dy - \int_0^5 y\sqrt{25-y^2}dy\right\} = 19\,600\left\{7\int_0^5\sqrt{25-y^2}dy - \left[-\tfrac{1}{3}(25-y^2)^{3/2}\right]_0^5\right\}$$
$$= 19\,600\left\{7\left(\tfrac{1}{4}\pi\cdot 5^2\right)+\tfrac{1}{3}(0-125)\right\} = 19\,600\left(\tfrac{175\pi}{4}-\tfrac{125}{3}\right) \approx 1\,877\,249 \approx 1{,}88\times 10^6 \text{ N.}$$

10. Positionnons des axes de coordonnées comme le montre la figure. Pour la *moitié supérieure*, la longueur de la $i^{\text{ème}}$ bande est $2(a/\sqrt{2}-y_i^*)$ et son aire est $2(a/\sqrt{2}-y_i^*)\Delta y$. La pression qui s'exerce sur cette bande est d'environ $\rho g d_i = \rho g(a/\sqrt{2}-y_i^*)$; la force sur la bande est donc d'environ $2\rho g(a/\sqrt{2}-y_i^*)^2\Delta y$. La force totale est

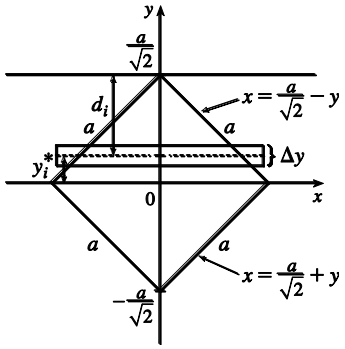
$$F_1 = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}2\rho g\left(\frac{a}{\sqrt{2}}-y_i^*\right)^2\Delta y = 2\rho g\int_0^{a/\sqrt{2}}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}-y\right)^2 dy$$
$$= 2\rho g\left[-\frac{1}{3}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}-y\right)^3\right]_0^{a/\sqrt{2}} = \frac{2}{3}\rho g\left[0-\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^3\right] = \frac{2\rho g}{3}\frac{a^3}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}a^3\rho g}{6}$$

Pour la *moitié inférieure*, la longueur est $2(a/\sqrt{2}+y_i^*)$ et la force totale

$$F_2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}2\rho g\left(\frac{a}{\sqrt{2}}+y_i^*\right)\left(\frac{a}{\sqrt{2}}-y_i^*\right)\Delta y = 2\rho g\int_{-a/\sqrt{2}}^{0}\left(\frac{a^2}{2}-y^2\right)dy = 2\rho g\left[\tfrac{1}{2}a^2y-\tfrac{1}{3}y^3\right]_{-a/\sqrt{2}}^{0}$$
$$= 2\rho g\left[0-\left(-\frac{\sqrt{2}a^3}{4}+\frac{\sqrt{2}a^3}{12}\right)\right] = 2\rho g\left(\frac{\sqrt{2}a^3}{6}\right) = \frac{2\sqrt{2}a^3\rho g}{6} \quad [F_2 = 2F_1]$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

Par conséquent, la force totale $F = F_1 + F_2 = \dfrac{3\sqrt{2}a^3\rho g}{6} = \dfrac{\sqrt{2}a^3\rho g}{2}$.

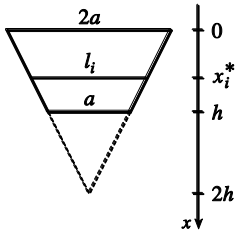


11. Positionnons un axe des x vertical comme le montre la figure. L'aire de la $i^{\text{ème}}$ bande rectangulaire est donc $\frac{a}{h}(2h - x_i^*)\,\Delta x$.

$\left[\text{Selon les propriétés des triangles semblables, } \dfrac{l_i}{2h - x_i^*} = \dfrac{2a}{2h}, \text{ donc } l_i = \dfrac{a}{h}\left(2h - x_i^*\right).\right]$ La pression qui s'exerce sur la bande est $\rho g x_i^*$,

donc la force hydrostatique sur la plaque $\approx \rho g x_i^* \frac{a}{h}(2h - x_i^*)\Delta x$. La force totale

$$F = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\rho g x_i^*\frac{a}{h}(2h - x_i^*)\Delta x = \rho g\frac{a}{h}\int_0^h x(2h - x)dx = \frac{a\rho g}{h}\int_0^h (2hx - x^2)dx$$
$$= \frac{a\rho g}{h}\left[hx^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^h = \frac{a\rho g}{h}(h^3 - \tfrac{1}{3}h^3) = \frac{a\rho g}{h}\left(\frac{2h^3}{3}\right) = \tfrac{2}{3}\rho g a h^2$$



12. a) La solution est similaire à celle de l'exemple 2. La pression sur une bande est d'environ $\rho g d_i = 1035g(1 - y_i^*)$ et la force totale est

$$F = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}1035g(1 - y_i^*)2\sqrt{1 - (y_i^*)^2}\,\Delta y = 2070g\int_{-1}^{1}(1 - y)\sqrt{1 - y^2}\,dy$$
$$= 2070g\int_{-1}^{1}\sqrt{1 - y^2}\,dy - 2070g\int_{-1}^{1}y\sqrt{1 - y^2}\,dy$$
$$= 2070g\cdot\tfrac{1}{2}\pi(1)^2 - 0 \quad \left[\begin{array}{l}\text{La première intégrale est l'aire d'un secteur sphérique semi-circulaire de rayon 1,}\\ \text{et la seconde est nulle parce que l'intégrande est une fonction impaire.}\end{array}\right]$$
$$= (1\,035)g\pi \approx 31\,865 \approx 3{,}2\times10^4\ \text{N}.$$

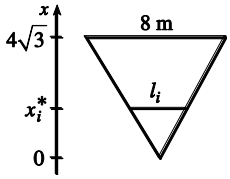
b) Si le réservoir est à moitié plein, la surface du lait est située en $y = 0$; la pression sur une bande est donc d'environ $\delta g d_i = 1035g(0 - y_i^*)$. La borne supérieure d'intégration change de 1 à 0 et la force totale est

$$F = 2070g\int_{-1}^{0}(0 - y)\sqrt{1 - y^2}\,dy = 2070g\left[\tfrac{1}{3}(1 - y^2)^{3/2}\right]_{-1}^{0} = \frac{2070}{3}g(1 - 0) = 6762 \approx 6{,}8\times10^3\ \text{N}.$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

On constate que cette force est environ 21 % de celle qui s'exerce lorsque le réservoir est plein.

13. Selon les propriétés des triangles semblables, $\frac{8}{4\sqrt{3}} = \frac{l_i}{x_i^*} \Rightarrow l_i = \frac{2x_i^*}{\sqrt{3}}$. L'aire de la $i^{\text{ème}}$ bande rectangulaire est $\frac{2x_i^*}{\sqrt{3}}\Delta x$ et la pression qui s'exerce sur elle est $\rho g(4\sqrt{3} - x_i^*)$.



$$F = \int_0^{4\sqrt{3}} \rho g\left(4\sqrt{3} - x\right)\frac{2x}{\sqrt{3}}dx = 8\rho g\int_0^{4\sqrt{3}} x dx - \frac{2\rho g}{\sqrt{3}}\int_0^{4\sqrt{3}} x^2 dx$$

$$= 4\rho g[x^2]_0^{4\sqrt{3}} - \frac{2\rho g}{3\sqrt{3}}[x^3]_0^{4\sqrt{3}} = 192\rho g - \frac{2\rho g}{3\sqrt{3}}64\cdot 3\sqrt{3} = 192\rho g - 128\rho g = 64\rho g$$

$$\approx 64(840)(9{,}8) = 526\,848 \approx 5{,}27\times 10^5 \text{ N}$$

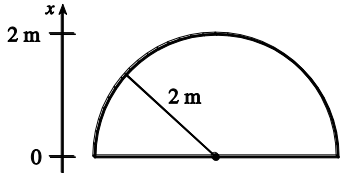
14.
$$F = \int_0^2 \rho g(10 - x)2\sqrt{4 - x^2}\,dx$$

$$= 20\rho g\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\,dx - \rho g\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\,2x dx$$

$$= 20\rho g\,\tfrac{1}{4}\pi(2^2) - \rho g\int_0^4 u^{1/2}du \quad [u = 4 - x^2, du = -2xdx]$$

$$= 20\pi\rho g - \tfrac{2}{3}\rho g\left[u^{3/2}\right]_0^4 = 20\pi\rho g - \tfrac{16}{3}\rho g = \rho g(20\pi - \tfrac{16}{3})$$

$$= (1000)(9{,}8)(20\pi - \tfrac{16}{3}) \approx 563\,485 \approx 5{,}63\times 10^5 \text{ N}$$



15. a) La face supérieure du cube est à une profondeur p = 1 m− 20 cm = 80 cm = 0,8 m.

$$F = \rho gpA \approx (1000)(9{,}8)(0{,}8)(0{,}2)^2 = 313{,}6 \approx 314 \text{ N}$$

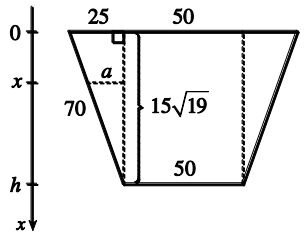
b) L'aire d'une bande est 0,2 Δx et la pression qui s'exerce sur elle est $\rho g x_i^*$.

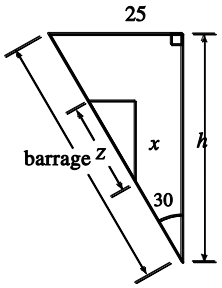
$$F = \int_{0,8}^1 \rho gx(0{,}2)dx = 0{,}2\rho g[\tfrac{1}{2}x^2]_{0,8}^1 = (0{,}2\rho g)(0{,}18) = 0{,}036\rho g = 0{,}036(1000)(9{,}8) = 352{,}8 \approx 353 \text{ N}$$

16. La hauteur du barrage est $h = \sqrt{70^2 - 25^2}\cos 30° = 15\sqrt{19}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. La largeur du trapèze est l = 50 + 2a. Selon les propriétés des triangles semblables, $\frac{25}{h} = \frac{a}{h - x} \Rightarrow a = \frac{25}{h}(h - x)$. Par conséquent,

$$l = 50 + 2\cdot\frac{25}{h}(h - x) = 50 + \frac{50}{h}\cdot h - \frac{50}{h}\cdot x = 50 + 50 - \frac{50x}{h} = 100 - \frac{50x}{h}.$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

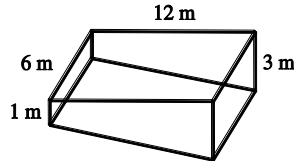




Selon le petit triangle qui apparaît à la seconde figure, $\cos 30° = \dfrac{\Delta x}{z} \quad \Rightarrow \quad z = \Delta x \sec 30° = 2\Delta x/\sqrt{3}$.

$$F = \int_0^h \rho g x\left(100 - \frac{50x}{h}\right)\frac{2}{\sqrt{3}}dx = \frac{200\rho g}{\sqrt{3}}\int_0^h x\,dx - \frac{100\rho g}{h\sqrt{3}}\int_0^h x^2\,dx$$
$$= \frac{200\rho g}{\sqrt{3}}\frac{h^2}{2} - \frac{100\rho g}{h\sqrt{3}}\frac{h^3}{3} = \frac{200\rho g h^2}{3\sqrt{3}} = \frac{200(1000)(9{,}8)}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{12\,825}{4} \approx 1{,}21\times 10^9 \text{ N}$$

17. a) L'aire d'une bande est $6\Delta x$ et la pression qui s'exerce sur elle est $\rho g x_i$.



$$F = \int_0^1 \rho g x 6\,dx = 6\rho g[\tfrac{1}{2}x^2]_0^1 = 6\rho g \cdot \tfrac{1}{2} = 3\rho g$$
$$= 3(1000)(9{,}8) = 29\,400 \text{ N} = 2{,}94\times 10^4 \text{ N}$$

b) $F = \int_0^3 \rho g x 6 dx = 6\rho g[\tfrac{1}{2}x^2]_0^3 = 6\rho g \cdot \tfrac{9}{2} = 27\rho g = 27(1000)(9{,}8) = 264\,600 \text{ N} \approx 2{,}65\times 10^5 \text{ N}$.

c) Pour le premier mètre, la longueur du côté est constante à 12 m. Pour $1 < x \le 3$, nous pouvons utiliser les propriétés des triangles semblables pour trouver la longueur a : $\dfrac{a}{12} = \dfrac{3-x}{2} \quad \Rightarrow \quad a = 12\cdot\dfrac{3-x}{2} = 6(3-x)$.

$$F = \int_0^1 \rho g x 12 dx + \int_1^3 \rho g x(6)(3-x)dx = 12\rho g[\tfrac{1}{2}x^2]_0^1 + 6\rho g\int_1^3 (3x - x^2)dx = 6\rho g + 6\rho g[\tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3]_1^3$$
$$= 6\rho g + 6\rho g\left[(\tfrac{27}{2} - 9) - (\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{3})\right] = 6\rho g + 20\rho g = 26\rho g = 26(1000)(9{,}8) = 254\,800 \text{ N} \approx 2{,}55\times 10^5 \text{ N}$$

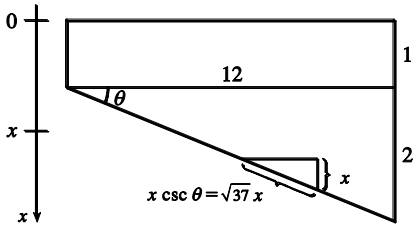
d) Pour tout triangle rectangle dont l'hypoténuse forme le dessous,

 © Groupe Modulo inc., 2013

$$\sin\theta = \frac{\Delta x}{\text{hypoténuse}} \quad \Rightarrow$$

$$\text{hypoténuse} = \Delta x \csc\theta = \Delta x \frac{\sqrt{12^2+2^2}}{2} = \frac{\sqrt{148}}{2}\Delta x = \sqrt{37}\Delta x.$$

$$F = \int_1^3 \rho g x 6\sqrt{37}\,dx = 6\sqrt{37}\rho g[\tfrac{1}{2}x^2]_1^3$$
$$= 6\sqrt{37}\rho g(\tfrac{9}{2} - \tfrac{1}{2}) \approx 1\,430\,666 \text{ N} \approx 1{,}43 \times 10^6 \text{ N}.$$



18. Partitionnons l'intervalle $[a, b]$ en sous-intervalles de même longueur par des points x_i comme nous le faisons habituellement et choisissons $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ pour tout indice i. La $i^{\text{ème}}$ bande horizontale de la plaque immergée peut être représentée approximativement par un rectangle de hauteur Δx_i et de largeur $l(x_i^*)$; son aire est donc $A_i \approx l(x_i^*)\Delta x_i$. Pour les petites valeurs de Δx_i, la pression P_i sur la $i^{\text{ème}}$ bande est presque constante et $P_i \approx \rho g x_i^*$ selon la formule 1. La force hydrostatique F_i qui s'exerce sur la $i^{\text{ème}}$ bande est $F_i = P_i A_i \approx \rho g x_i^* l(x_i^*)\Delta x_i$. En additionnant ces forces et en calculant la limite à mesure que $n \to \infty$, nous obtenons la force hydrostatique sur la plaque immergée :

$$F = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} F_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \rho g x_i^* l(x_i^*)\Delta x_i = \int_a^b \rho g x l(x)\,dx$$

19. Selon l'exercice 18, nous avons $F = \int_a^b \rho g x l(x)\,dx = \int_{7,0}^{944} 1025 g x l(x)\,dx$. Selon le tableau, $\Delta x = 0{,}4$; en utilisant la règle de Simpson pour évaluer F, nous obtenons donc

$$F \approx 1025g\tfrac{0{,}4}{3}[7{,}0l(7{,}0) + 4(7{,}4)l(7{,}4) + 2(7{,}8)l(7{,}8) + 4(8{,}2)l(8{,}2) + 2(8{,}6)l(8{,}6) + 4(9{,}0)l(9{,}0) + 9{,}4l(9{,}4)]$$
$$= \tfrac{410}{3}g[7(1{,}2) + 29{,}6(1{,}8) + 15{,}6(2{,}9) + 32{,}8(3{,}8) + 17{,}2(3{,}6) + 36(4{,}2) + 9{,}4(4{,}4)]$$
$$= \tfrac{410}{3}g(486{,}04) \approx 650\,970 \approx 6{,}51 \times 10^5 \text{ N}.$$

20. a) Selon les formules 8,

$$\bar{x} = \tfrac{1}{A}\int_a^b xl(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad A\bar{x} = \int_a^b xl(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad \rho g A\bar{x} = \rho g\int_a^b xl(x)\,dx \quad \Rightarrow (\rho g\bar{x})A = \int_a^b \rho g x l(x)\,dx = F \text{ selon}$$

l'exercice 18.

b) Selon la figure de l'exercice 10, les coordonnées du centre de masse sont $(\bar{x}, \bar{y}) = (a/\sqrt{2}, 0)$.

$$F = (\rho g\bar{x})A = \rho g\frac{a}{\sqrt{2}}a^2 = \delta\frac{\sqrt{2}a}{2}a^2 = \frac{\sqrt{2}a^3\delta}{2}.$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

21. Le moment M par rapport à l'origine du système est $M = \sum_{i=1}^{2} m_i x_i = m_1 x_1 + m_2 x_2 = 6 \cdot 10 + 9 \cdot 30 = 330$. La masse m du système est $m = \sum_{i=1}^{2} m_i = m_1 + m_2 = 6 + 9 = 15$. Le centre de masse du système est $\bar{x} = M/m = \frac{330}{15} = 22$.

22. Le moment M est $m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 = 12(-3) + 15(2) + 20(8) = 154$. La masse m est $m_1 + m_2 + m_3 = 12 + 15 + 20 = 47$. Le centre de masse est $\bar{x} = M/m = \frac{154}{47}$.

23. La masse est $m = \sum_{i=1}^{3} m_i = 4 + 2 + 4 = 10$.

Le moment par rapport à l'axe des x est $M_x = \sum_{i=1}^{3} m_i y_i = 4(-3) + 2(1) + 4(5) = 10$.

Le moment par rapport à l'axe des y est $M_y = \sum_{i=1}^{3} m_i x_i = 4(2) + 2(-3) + 4(3) = 14$.

Le centre de masse est $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m} \right) = \left(\frac{14}{10}, \frac{10}{10} \right) = (\frac{7}{5}, 1)$.

24. La masse est $m = \sum_{i=1}^{4} m_i = 5 + 4 + 3 + 6 = 18$.

Le moment par rapport à l'axe des x est $M_x = \sum_{i=1}^{4} m_i y_i = 5(2) + 4(5) + 3(2) + 6(-2) = 24$.

Le moment par rapport à l'axe des y est $M_y = \sum_{i=1}^{4} m_i x_i = 5(-4) + 4(0) + 3(3) + 6(1) = -5$.

Le centre de masse est $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m} \right) = \left(\frac{-5}{18}, \frac{24}{18} \right) = \left(-\frac{5}{18}, \frac{4}{3} \right)$.

25. La région se situe principalement à la droite et au bas du graphique; nous savons donc que $\bar{x} > 0,5$ et $\bar{y} < 1$, et nous pouvons supposer que $\bar{x} = 0,7$ et $\bar{y} = 0,7$.

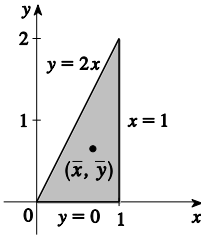
$A = \int_0^1 2x\,dx = [x^2]_0^1 = 1 - 0 = 1$.

$\bar{x} = \frac{1}{A} \int_0^1 x(2x)\,dx = \frac{1}{1} [\frac{2}{3} x^3]_0^1 = \frac{2}{3}$.

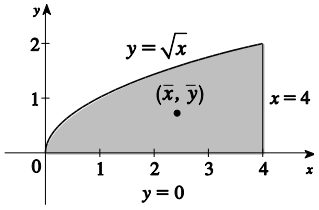
$\bar{y} = \frac{1}{A} \int_0^1 \frac{1}{2}(2x)^2\,dx = \frac{1}{1} \int_0^1 2x^2\,dx = [\frac{2}{3} x^3]_0^1 = \frac{2}{3}$.

Par conséquent, le centre de masse est $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

 © Groupe Modulo inc., 2013



26. La région se situe principalement à la droite et au bas du graphique; nous savons donc que $\bar{x} > 2$ et $\bar{y} < 1$, et nous pouvons supposer que $\bar{x} = 2{,}3$ et $\bar{y} = 0{,}8$.



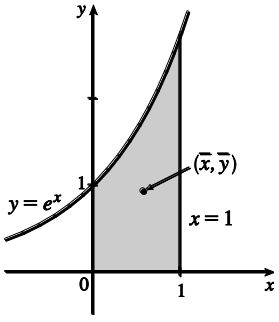
$A = \int_0^4 \sqrt{x}\,dx = [\frac{2}{3}x^{3/2}]_0^4 = \frac{16}{3}$.

$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_0^4 x(\sqrt{x})\,dx = \frac{3}{16}\int_0^4 x^{3/2}\,dx = \frac{3}{16}[\frac{2}{5}x^{5/2}]_0^4 = \frac{3}{40}(32-0) = \frac{12}{5}$.

$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_0^4 \frac{1}{2}(\sqrt{x})^2\,dx = \frac{3}{16}\int_0^4 \frac{1}{2}x\,dx = \frac{3}{32}[\frac{1}{2}x^2]_0^4 = \frac{3}{64}(16-0) = \frac{3}{4}$.

Par conséquent, le centre de masse est $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{12}{5}, \frac{3}{4})$.

27. La région se situe principalement à la droite et au bas du graphique; nous savons donc que $\bar{x} > 0{,}5$ et $\bar{y} < 1$, et nous pouvons supposer que $\bar{x} = 0{,}6$ et $\bar{y} = 0{,}9$.



$A = \int_0^1 e^x\,dx = [e^x]_0^1 = e - 1$

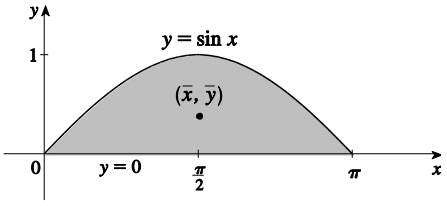
$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_0^1 xe^x\,dx = \frac{1}{e-1}\,[xe^x - e^x]_0^1$ [intégration par parties]
$= \frac{1}{e-1}[0-(-1)] = \frac{1}{e-1}$.

$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_0^1 \frac{1}{2}(e^x)^2\,dx = \frac{1}{e-1}\cdot\frac{1}{4}[e^{2x}]_0^1 = \frac{1}{4(e-1)}(e^2-1) = \frac{e+1}{4}$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

Par conséquent, le centre de masse est $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{1}{e-1}, \frac{e+1}{4}\right) \approx (0{,}58;\ 0{,}93)$.

28. Comme la région montrée dans le graphique est symétrique autour de la droite $x = \frac{\pi}{2}$, nous savons que $\bar{x} = \frac{\pi}{2}$. La région se situe principalement au bas du graphique, donc nous savons que $\bar{y} < 0{,}5$, et nous pouvons supposer que $\bar{y} = 0{,}4$.



$A = \int_0^{\pi} \sin x\,dx = [-\cos x]_0^{\pi} = 1 - (-1) = 2$.

$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_0^{\pi} x \sin x\,dx \overset{82}{=} \frac{1}{2}[\sin x - x\cos x]_0^{\pi}$
$= \frac{1}{2}[(0+\pi) - (0-0)] = \frac{\pi}{2}$.

$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}(\sin x)^2\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)\,dx$
$= \frac{1}{8}[x - \frac{1}{2}\sin 2x]_0^{\pi} = \frac{1}{8}[(\pi - 0) - (0-0)] = \frac{\pi}{8} \approx 0{,}39$.

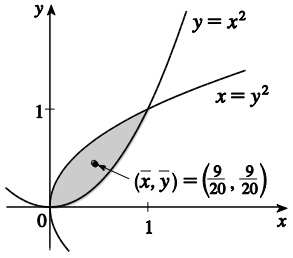
Par conséquent, le centre de masse est $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8})$.

29. $A = \int_0^1 (x^{1/2} - x^2)\,dx = [\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{3}x^3]_0^1 = (\frac{2}{3} - \frac{1}{3}) - 0 = \frac{1}{3}$.

$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_0^1 x(x^{1/2} - x^2)\,dx = 3\int_0^1 (x^{3/2} - x^3)\,dx$
$= 3[\frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{1}{4}x^4]_0^1 = 3(\frac{2}{5} - \frac{1}{4}) = 3(\frac{3}{20}) = \frac{9}{20}$.

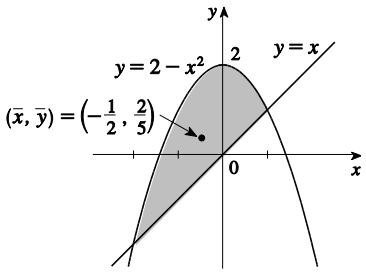
$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_0^1 \frac{1}{2}\left[(x^{1/2})^2 - (x^2)^2\,dx\right] = 3(\frac{1}{2})\int_0^1 (x - x^4)\,dx$
$= \frac{3}{2}[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5]_0^1 = \frac{3}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}) = \frac{3}{2}(\frac{3}{10}) = \frac{9}{20}$.

Par conséquent, le centre de masse est $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{9}{20}, \frac{9}{20})$.



30. Les courbes se coupent lorsque $2 - x^2 = x \iff 0 = x^2 + x - 2 \iff 0 = (x+2)(x-1) \iff x = -2$ ou $x = 1$.

 © Groupe Modulo inc., 2013



$A = \int_{-2}^{1}(2 - x^2 - x)dx = [2x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2]_{-2}^{1} = \frac{7}{6} - (-\frac{10}{3}) = \frac{9}{2}$.

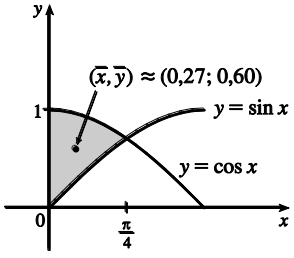
$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_{-2}^{1} x(2 - x^2 - x)dx = \frac{2}{9}\int_{-2}^{1}(2x - x^3 - x^2)dx$
$= \frac{2}{9}[x^2 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3]_{-2}^{1} = \frac{2}{9}(\frac{5}{12} - \frac{8}{3}) = -\frac{1}{2}.$

$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_{-2}^{1}\frac{1}{2}[(2 - x^2)^2 - x^2]dx = \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{2}\int_{-2}^{1}(4 - 5x^2 + x^4)dx$
$= \frac{1}{9}[4x - \frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5]_{-2}^{1} = \frac{1}{9}[\frac{38}{15} - (-\frac{16}{15})] = \frac{2}{5}.$

Par conséquent, le centre de masse est $(\bar{x}, \bar{y}) = (-\frac{1}{2}, \frac{2}{5})$.

31. $A = \int_0^{\pi/4}(\cos x - \sin x)dx = [\sin x + \cos x]_0^{\pi/4} = \sqrt{2} - 1$.

$\bar{x} = A^{-1}\int_0^{\pi/4} x(\cos x - \sin x)dx$
$= A^{-1}[x(\sin x + \cos x) + \cos x - \sin x]_0^{\pi/4}$ [intégration par parties]
$= A^{-1}(\frac{\pi}{4}\sqrt{2} - 1) = \dfrac{\frac{1}{4}\pi\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1}.$

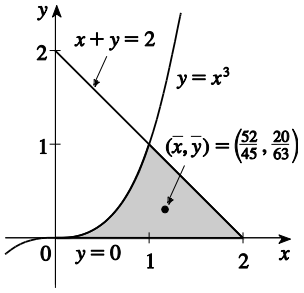


$\bar{y} = A^{-1}\int_0^{\pi/4}\frac{1}{2}(\cos^2 x - \sin^2 x)dx = \frac{1}{2A}\int_0^{\pi/4}\cos 2x dx = \frac{1}{4A}[\sin 2x]_0^{\pi/4} = \dfrac{1}{4A} = \dfrac{1}{4(\sqrt{2} - 1)}$.

Par conséquent, le centre de masse est $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\dfrac{\pi\sqrt{2} - 4}{4(\sqrt{2} - 1)}, \dfrac{1}{4(\sqrt{2} - 1)}\right) \approx (0,27; 0,60)$.

32. $A = \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 (2 - x)dx = [\frac{1}{4}x^4]_0^1 + [2x - \frac{1}{2}x^2]_1^2$
$= \frac{1}{4} + (4 - 2) - (2 - \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}.$

 © Groupe Modulo inc., 2013



$\bar{x} = \frac{1}{A}\left[\int_0^1 x(x^3)dx + \int_1^2 x(2-x)dx\right] = \frac{4}{3}\left[\int_0^1 x^4 dx + \int_1^2 (2x-x^2)dx\right]$

$= \frac{4}{3}\left\{[\frac{1}{5}x^5]_0^1 + [x^2 - \frac{1}{3}x^3]_1^2\right\} = \frac{4}{3}[\frac{1}{5} + (4-\frac{8}{3}) - (1-\frac{1}{3})]$

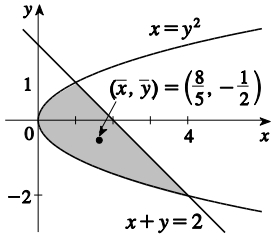
$= \frac{4}{3}(\frac{13}{15}) = \frac{52}{45}.$

$\bar{y} = \frac{1}{A}\left[\int_0^1 \frac{1}{2}(x^3)^2 dx + \int_1^2 \frac{1}{2}(2-x)^2 dx\right] = \frac{2}{3}\left[\int_0^1 x^6 dx + \int_1^2 (x-2)^2 dx\right] = \frac{2}{3}\left\{[\frac{1}{7}x^7]_0^1 + [\frac{1}{3}(x-2)^3]_1^2\right\}$

$= \frac{2}{3}(\frac{1}{7} - 0 + 0 + \frac{1}{3}) = \frac{2}{3}(\frac{10}{21}) = \frac{20}{63}.$

Par conséquent, le centre de masse est $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{52}{45}, \frac{20}{63})$.

33. Les courbes se coupent lorsque $2 - y = y^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = y^2 + y - 2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = (y+2)(y-1) \quad \Leftrightarrow \quad y = -2$ ou $y = 1$.



$A = \int_{-2}^1 (2 - y - y^2)dy = [2y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3]_{-2}^1 = \frac{7}{6} - (-\frac{10}{3}) = \frac{9}{2}.$

$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_{-2}^1 \frac{1}{2}[(2-y)^2 - (y^2)^2]dy = \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{2}\int_{-2}^1 (4 - 4y + y^2 - y^4)dy$

$= \frac{1}{9}[4y - 2y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{5}y^5]_{-2}^1 = \frac{1}{9}[\frac{32}{15} - (-\frac{184}{15})] = \frac{8}{5}.$

$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_{-2}^1 y(2 - y - y^2)dy = \frac{2}{9}\int_{-2}^1 (2y - y^2 - y^3)dy$

$= \frac{2}{9}[y^2 - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4]_{-2}^1 = \frac{2}{9}(\frac{5}{12} - \frac{8}{3}) = -\frac{1}{2}.$

Par conséquent, le centre de masse est $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{8}{5}, -\frac{1}{2})$.

34. L'équation du quart de cercle est $y = \sqrt{1-x^2}$ pour $0 \le x \le 1$ et l'équation de la droite est $y = x - 1$.

$A = \frac{1}{4}\pi(1)^2 + \frac{1}{2}$, donc $m = \rho A = 3(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}(\pi + 2)$.

$$M_x = \rho\int_0^1 \frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 - (x-1)^2\right]dx = \frac{3}{2}\int_0^1 [(1-x^2) - (x^2 - 2x + 1)]dx$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^1 (-2x^2 + 2x)dx = \frac{3}{2}[-\frac{2}{3}x^3 + x^2]_0^1 = \frac{3}{2}(-\frac{2}{3} + 1) = \frac{3}{2}(\frac{1}{3}) = \frac{1}{2}$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

$$M_y = \rho\int_0^1 x[\sqrt{1-x^2} - (x-1)]dx = 3\int_0^1 (x\sqrt{1-x^2} - x^2 + x)dx$$
$$= 3[-\tfrac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2]_0^1 = 3[(0 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2}) - (-\tfrac{1}{3} - 0 + 0)] = \tfrac{3}{2}$$

$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{4}(\pi+2)} = \frac{2}{\pi+2}$ et $\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}(\pi+2)} = \frac{2}{3(\pi+2)}$. Par conséquent, le centre de masse est $\left(\frac{2}{\pi+2}, \frac{2}{3(\pi+2)}\right)$.

35. L'équation de la droite est $y = \frac{3}{4}x$. $A = \frac{1}{2}(4)(3) = 6$, donc $m = \rho A = 10(6) = 60$.

$$M_x = \rho\int_0^4 \tfrac{1}{2}(\tfrac{3}{4}x)^2 dx = 10\int_0^4 \tfrac{9}{32}x^2 dx = \tfrac{45}{16}[\tfrac{1}{3}x^3]_0^4 = \tfrac{45}{16}(\tfrac{64}{3}) = 60$$
$$M_y = \rho\int_0^4 x(\tfrac{3}{4}x)dx = \tfrac{15}{2}\int_0^4 x^2 dx = \tfrac{15}{2}[\tfrac{1}{3}x^3]_0^4 = \tfrac{15}{2}(\tfrac{64}{3}) = 160$$

$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{160}{60} = \frac{8}{3}$ et $\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{60}{60} = 1$. Par conséquent, le centre de masse est $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{8}{3}, 1)$.

36. Posons $n = 8$, donc $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{8-0}{8} = 1$.

$$A = \int_0^8 f(x)dx \approx S_{10} = \tfrac{1}{3}[f(0) + 4f(1) + 2f(2) + 4f(3) + 2f(4) + 4f(5) + 2f(6) + 4f(7) + f(8)]$$
$$\approx \tfrac{1}{3}[0 + 4(2,0) + 2(2,6) + 4(2,3) + 2(2,2) + 4(3,3) + 2(4,0) + 4(3,2) + 0]$$
$$= \tfrac{1}{3}(60,8) = 20,2\overline{6} \text{ [ou } \tfrac{304}{15}\text{]}$$

Or,

$$\int_0^8 xf(x)dx \approx \tfrac{1}{3}[0\cdot f(0) + 4\cdot 1\cdot f(1) + 2\cdot 2\cdot f(2) + 4\cdot 3\cdot f(3) + 2\cdot 4\cdot f(4) + 4\cdot 5\cdot f(5) + 2\cdot 6\cdot f(6) + 4\cdot 7\cdot f(7) + 8\cdot f(8)]$$
$$\approx \tfrac{1}{3}[0 + 8 + 10,4 + 27,6 + 17,6 + 66 + 48 + 89,6 + 0]$$
$$= \tfrac{1}{3}(267,2) = 89,0\overline{6} \text{ [ou } \tfrac{1336}{15}\text{]}, \text{ donc } \bar{x} = \tfrac{1}{A}\int_0^8 xf(x)dx \approx 4,39.$$

De plus,

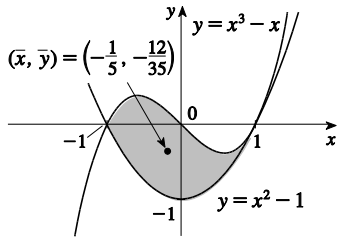
$$\int_0^8 [f(x)]^2 dx \approx \tfrac{1}{3}[(0^2 + 4(2,0)^2 + 2(2,6)^2 + 4(2,3)^2 + 2(2,2)^2 + 4(3,3)^2 + 2(4,0)^2 + 4(3,2)^2 + 0^2)]$$
$$= \tfrac{1}{3}(176,88) = 58,96, \text{ donc } \bar{y} = \tfrac{1}{A}\int_0^8 \tfrac{1}{2}[f(x)]^2 dx \approx 1,45.$$

Par conséquent, le centre de masse est $(\bar{x}, \bar{y}) \approx (4,4; 1,5)$.

37. $A = \int_{-1}^1 [(x^3 - x) - (x^2 - 1)]dx = \int_{-1}^1 (1 - x^2)dx$ [en laissant tomber les termes de degré impair]

$= 2\int_0^1 (1 - x^2)dx = 2[x - \tfrac{1}{3}x^3]_0^1 = 2(\tfrac{2}{3}) = \tfrac{4}{3}$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

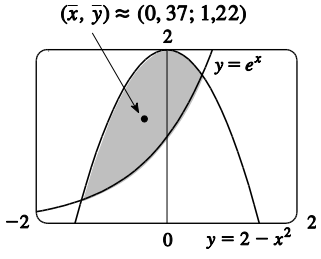


$$\bar{x} = \tfrac{1}{A}\int_{-1}^{1} x(x^3 - x - x^2 + 1)dx = \tfrac{3}{4}\int_{-1}^{1}(x^4 - x^2 - x^3 + x)dx$$
$$= \tfrac{3}{4}\int_{-1}^{1}(x^4 - x^2)dx = \tfrac{3}{4}\cdot 2\int_{0}^{1}(x^4 - x^2)dx$$
$$= \tfrac{3}{2}[\tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{3}x^3]_0^1 = \tfrac{3}{2}(-\tfrac{2}{15}) = -\tfrac{1}{5}.$$

$$\bar{y} = \tfrac{1}{A}\int_{-1}^{1} \tfrac{1}{2}[(x^3 - x)^2 - (x^2 - 1)^2]dx = \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x^6 - 2x^4 + x^2 - x^4 + 2x^2 - 1)dx$$
$$= \tfrac{3}{8}\cdot 2\int_{0}^{1}(x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1)dx = \tfrac{3}{4}[\tfrac{1}{7}x^7 - \tfrac{3}{5}x^5 + x^3]_0^1 = \tfrac{3}{4}\left(-\tfrac{16}{35}\right) = -\tfrac{12}{35}.$$

Par conséquent, le centre de masse est $(\bar{x}, \bar{y}) = (-\frac{1}{15}, -\frac{12}{35})$.

38. Les courbes se coupent lorsque $x = a \approx -1{,}315\,974$ et $x = b \approx 0{,}537\,274\,45$.



$$A = \int_a^b [(2 - x^2) - e^x]dx = [2x - \tfrac{1}{3}x^3 - e^x]_a^b \approx 1{,}452\,014.$$

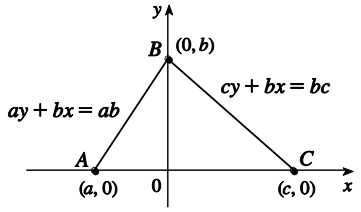
$$\bar{x} = \tfrac{1}{A}\int_a^b x(2 - x^2 - e^x)dx = \tfrac{1}{A}[x^2 - \tfrac{1}{4}x^4 - xe^x + e^x]_a^b$$
$$\approx -0{,}374\,293$$

$$\bar{y} = \tfrac{1}{A}\int_a^b \tfrac{1}{2}[(2 - x^2)^2 - (e^x)^2]dx = \tfrac{1}{2A}\int_a^b (4 - 4x^2 + x^4 - e^{2x})dx$$
$$= \tfrac{1}{2A}[4x - \tfrac{4}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{2}e^{2x}]_a^b \approx 1{,}218\,131$$

Par conséquent, le centre de masse est $(\bar{x}, \bar{y}) \approx (-0{,}37; 1{,}22)$.

39. Sur le graphique, positionnons les axes des x et des y de manière que la base (un côté du triangle) repose le long de l'axe des x et que l'autre sommet repose sur le côté positif de l'axe des y. Nous avons appris en géométrie que les médianes d'un triangle se coupent en un point situé aux deux tiers de la distance entre chaque sommet et le côté opposé (donc sur la médiane). Une des médianes va de B au point milieu $(\frac{1}{2}(a + c), 0)$ du côté AC; le point d'intersection des médianes est donc $(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(a + c), \frac{1}{3}b) = (\frac{1}{3}(a + c), \frac{1}{3}b)$.

 © Groupe Modulo inc., 2013



Nous pouvons vérifier cette réponse en trouvant les équations des deux médianes et en les résolvant simultanément afin de trouver leur point d'intersection. Calculons maintenant l'emplacement du centre de masse de ce triangle. L'aire est $A = \frac{1}{2}(c-a)b$.

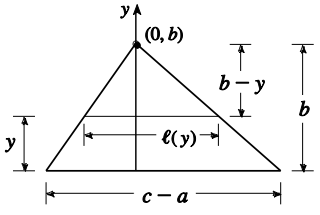
$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{A}\left[\int_a^0 x\cdot\tfrac{b}{a}(a-x)dx + \int_0^c x\cdot\tfrac{b}{c}(c-x)dx\right] = \frac{1}{A}\left[\frac{b}{a}\int_a^0 (ax-x^2)dx + \tfrac{b}{c}\int_0^c (cx-x^2)dx\right] \\ &= \frac{b}{Aa}\left[\frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_a^0 + \frac{b}{AC}\left[\frac{1}{2}cx^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^c = \frac{b}{Aa}\left[-\frac{1}{2}a^3 + \frac{1}{3}a^3\right] + \frac{b}{Ac}\left[\frac{1}{2}c^3 - \frac{1}{3}c^3\right] \\ &= \frac{2}{a(c-a)}\cdot\frac{-a^3}{6} + \frac{2}{c(c-a)}\cdot\frac{c^3}{6} = \frac{1}{3(c-a)}(c^2-a^2) = \frac{a+c}{3}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{1}{A}\left[\int_a^0 \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}(a-x)\right)^2 dx + \int_0^c \frac{1}{2}\left(\frac{b}{c}(c-x)\right)^2 dx\right] \\ &= \frac{1}{A}\left[\frac{b^2}{2a^2}\int_a^0 (a^2-2ax+x^2)dx + \frac{b^2}{2c^2}(c^2-2cx+x^2)dx\right] \\ &= \frac{1}{A}\left[\frac{b^2}{2a^2}[a^2x - ax^2 + \tfrac{1}{3}x^3]_a^0 + \frac{b^2}{2c^2}[c^2x - cx^2 + \tfrac{1}{3}x^3]_0^c\right] \\ &= \frac{1}{A}\left[\frac{b^2}{2a^2}(-a^3 + a^3 - \tfrac{1}{3}a^3) + \frac{b^2}{2c^2}(c^3 - c^3 + \tfrac{1}{3}c^3)\right] = \frac{1}{A}\left[\frac{b^2}{6}(-a+c)\right] = \frac{2}{(c-a)b}\cdot\frac{(c-a)b^2}{6} = \frac{b}{3}\end{aligned}$$

Par conséquent, le centre de masse est $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{a+c}{3}, \frac{b}{3}\right)$, tel que calculé précédemment.

Remarques : Il n'est nécessaire, en fait, que de calculer $\bar{y}$. En considérant à tour de rôle chaque côté du triangle comme la base du triangle, nous voyons que le centre de masse est situé à un tiers de la distance entre chaque côté et le sommet opposé et doit, par conséquent, être le point d'intersection des médianes.



Le calcul de $\bar{y}$ dans ce problème (et dans plusieurs autres) peut être simplifié en utilisant des rectangles servant d'approximation horizontaux plutôt que verticaux. Si la longueur d'un rectangle mince à la coordonnée y est $\ell(y)$, son aire est alors $\ell(y)\,\Delta y$, sa masse est $p\ell\,(y)\,\Delta y$ et son moment par rapport à l'axe des x est $\Delta M_x = py\ell(y)\,\Delta y$. Par conséquent,

 © Groupe Modulo inc., 2013

$$M_x = \int \rho y \ell(y) dy \quad \text{et} \quad \bar{y} = \frac{\int \rho y \ell(y) dy}{\rho A} = \frac{1}{A}\int y\ell(y)dy$$

Dans ce problème, $\ell(y) = \dfrac{c-a}{b}(b-y)$ selon les propriétés des triangles semblables, donc

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_0^b \frac{c-a}{b} y(b-y)dy = \frac{2}{b^2}\int_0^b (by - y^2)dy = \frac{2}{b^2}\left[\tfrac{1}{2}by^2 - \tfrac{1}{3}y^3\right]_0^b = \frac{2}{b^2}\cdot\frac{b^3}{6} = \frac{b}{3}$$

Il est à remarquer qu'on n'a besoin que d'une seule intégrale lorsqu'on utilise cette démarche.

40. Le centre de masse du rectangle à la gauche de l'axe des *y* est $(-\frac{1}{2}, 1)$ et son aire est 2. L'aire du triangle à la droite de l'axe des *y* est 2 et son centre de masse est $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ [selon l'exercice 39, le centre de masse est situé aux deux tiers de la distance entre le sommet (0, 0) et le point (1, 1)].

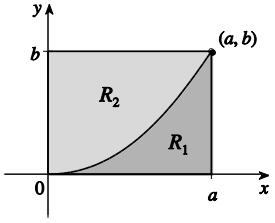
$\bar{x} = \dfrac{M_y}{m} = \dfrac{1}{m}\sum_{i=1}^{2} m_i x_i = \dfrac{1}{2+2}[2(-\frac{1}{2}) + 2(\frac{2}{3})] = \frac{1}{4}(\frac{1}{3}) = \frac{1}{12}$.

$\bar{y} = \dfrac{M_x}{m} = \dfrac{1}{m}\sum_{i=1}^{2} m_i y_i = \dfrac{1}{2+2}[2(1) + 2(\frac{2}{3})] = \frac{1}{4}(\frac{10}{3}) = \frac{5}{6}$. Par conséquent, le centre de masse est $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{1}{12}, \frac{5}{6})$.

41. Partageons la membrane en deux triangles et un rectangle dont les masses respectives sont 2, 2 et 4, de sorte que la masse totale est 8. Selon les résultats de l'exercice 39, les centres de masse des triangles sont $(-1, \frac{2}{3})$ et $(1, \frac{2}{3})$. Le centre de masse du rectangle (son centre) est $(0, -\frac{1}{2})$. En utilisant les formules 5 et 7, nous obtenons donc $\bar{y} = \dfrac{M_x}{m} = \dfrac{1}{m}\sum_{i=1}^{3} m_i y_i = \frac{1}{8}[2(\frac{2}{3}) + 2(\frac{2}{3}) + 4(-\frac{1}{2})] = \frac{1}{8}(\frac{2}{3}) = \frac{1}{12}$,

$\bar{x} = 0$, puisque la lamelle est symétrique autour de la droite $x = 0$. Par conséquent, le centre de masse est $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, \frac{1}{12})$.

42. L'équation de la parabole est $y = kx^2$ et la parabole passe par le point (a, b), donc $b = ka^2 \quad \Rightarrow \quad k = \dfrac{b}{a^2}$ et par conséquent, $y = \dfrac{b}{a^2}x^2$.



L'aire de R_1 est $A_1 = \int_0^a \dfrac{b}{a^2}x^2 dx = \dfrac{b}{a^2}\left[\dfrac{1}{3}x^3\right]_0^a = \dfrac{b}{a^2}\left(\dfrac{a^3}{3}\right) = \dfrac{1}{3}ab$. Puisque l'aire de *R* est *ab*, l'aire de R_2 est $A_2 = ab - \frac{1}{3}ab = \frac{2}{3}ab$.

Pour R_1 :

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{A_1}\int_0^a x\left(\frac{b}{a^2}x^2\right)dx = \frac{3}{ab}\frac{b}{a^2}\int_0^a x^3 dx = \frac{3}{a^3}\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^a = \frac{3}{a^3}\left(\frac{1}{4}a^4\right) = \frac{3}{4}a$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{A_1}\int_0^a \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a^2}x^2\right)^2 dx = \frac{3}{ab}\frac{b^2}{2a^4}\int_0^a x^4 dx = \frac{3b}{2a^5}\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^a = \frac{3b}{2a^5}\left(\frac{1}{5}a^5\right) = \frac{3}{10}b$$

Par conséquent, le centre de masse de R_1 est $(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = (\frac{3}{4}a, \frac{3}{10}b)$.

Pour R_2 :

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{A_2}\int_0^a x\left(b - \frac{b}{a^2}x^2\right)dx = \frac{3}{2ab}\int_0^a b\left(x - \frac{1}{a^2}x^3\right)dx = \frac{3}{2a}\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4a^2}x^4\right]_0^a$$
$$= \frac{3}{2a}\left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) = \frac{3}{2a}\left(\frac{a^2}{4}\right) = \frac{3}{8}a$$

$$\bar{y}_2 = \frac{1}{A_2}\int_0^a \frac{1}{2}\left[(b)^2 - \left(\frac{b}{a^2}x^2\right)^2\right]dx = \frac{3}{2ab}\frac{1}{2}\int_0^a b^2\left(1 - \frac{1}{a^4}x^4\right)dx = \frac{3b}{4a}\left[x - \frac{1}{5a^4}x^5\right]_0^a$$
$$= \frac{3b}{4a}\left(a - \frac{1}{5}a\right) = \frac{3b}{4a}\left(\frac{4a}{5}\right) = \frac{3}{5}b$$

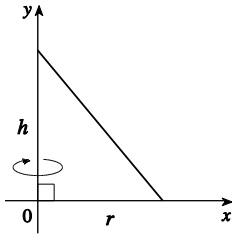
Par conséquent, le centre de masse de R_2 est $(\bar{x}_2, \bar{y}_2) = (\frac{3}{8}a, \frac{3}{5}b)$. Remarquons les relations : $A_2 = 2A_1$, $\bar{x}_1 = 2\bar{x}_2$, $\bar{y}_2 = 2\bar{y}_1$.

43. $\int_a^b (cx+d)f(x)dx = \int_a^b cx\,f(x)dx + \int_a^b df(x)dx = c\int_a^b xf(x)dx + d\int_a^b f(x)dx = c\bar{x}A + d\int_a^b f(x)dx$ [selon la formule 8]
$= c\bar{x}\int_a^b f(x)dx + d\int_a^b f(x)dx = (c\bar{x}+d)\int_a^b f(x)dx$

44. On peut générer une sphère en effectuant la rotation d'un demi-cercle autour de son diamètre. Selon l'exemple 4, le centre de masse se déplace sur une distance de $2\pi\bar{y} = 2\pi\left(\frac{4r}{3\pi}\right) = \frac{8r}{3}$, donc, selon le théorème de Pappus, le volume de la sphère est $V = Ad = \frac{\pi r^2}{2}\cdot\frac{8r}{3} = \frac{4}{3}\pi r^3$.

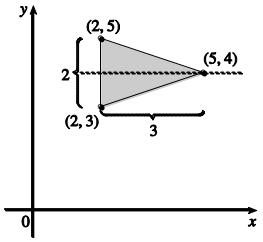
45. Comme on peut le voir sur le graphique, on peut générer un cône de hauteur h et de rayon r en effectuant la rotation d'un triangle rectangle autour d'une de ses cathètes. Selon l'exercice 39, $\bar{x} = \frac{1}{3}r$, donc, selon le théorème de Pappus, le volume du cône est

$$V = Ad = (\tfrac{1}{2}\cdot \text{base}\cdot \text{hauteur})\cdot(2\pi\bar{x}) = \tfrac{1}{2}rh\cdot 2\pi(\tfrac{1}{3}r) = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h.$$



46. Étant donné la symétrie qu'on peut observer sur le graphique, $\bar{y} = 4$. La distance parcourue par le centre de masse lorsqu'on effectue la rotation du triangle autour de l'axe des x est donc $d = 2\pi\cdot 4 = 8\pi$. L'aire du triangle est $A = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(2)(3) = 3$. Selon le théorème de Pappus, le volume du solide résultant de la rotation est $Ad = 3(8\pi) = 24\pi$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

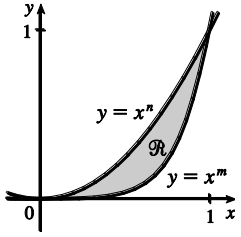


47. Selon l'illustration à la figure 13, supposons que la région est située entre les deux courbes $y = f(x)$ et $y = g(x)$ où $f(x) \geq g(x)$.

Choisissons des points x_i avec $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ et choisissons x_i^*, le milieu du $i^{\text{ème}}$ sous-intervalle, c'est-à-dire que $x_i^* = \bar{x}_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$. Le centre de masse du $i^{\text{ème}}$ rectangle d'approximation R_i est donc son centre $C_i = (\bar{x}_i, \frac{1}{2}[f(\bar{x}_i) + g(\bar{x}_i)])$. Son aire est $[f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i)]\,\Delta x$; sa masse est donc $\rho[f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i)]\,\Delta x$. Par conséquent, $M_y(R_i) = \rho[f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i)]\,\Delta x \cdot \bar{x}_i = \rho\bar{x}_i[f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i)]\,\Delta x$ et $M_x(R_i) = \rho[f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i)]\,\Delta x \cdot \frac{1}{2}[f(\bar{x}_i) + g(\bar{x}_i)] = \rho \cdot \frac{1}{2}[f(\bar{x}_i)^2 - g(\bar{x}_i)^2]\Delta x$. En sommant sur i et en calculant la limite à mesure que $n \to \infty$, nous obtenons $M_y = \lim_{n\to\infty} \sum_i \rho\bar{x}_i[f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i)]\,\Delta x = \rho\int_a^b x[f(x) - g(x)]dx$ et $M_x = \lim_{n\to\infty} \sum_i \rho \cdot \frac{1}{2}[f(\bar{x}_i)^2 - g(\bar{x}_i)^2]\Delta x = \rho\int_a^b \frac{1}{2}[f(x)^2 - g(x)^2]dx$. Par conséquent,

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{M_y}{pA} = \frac{1}{A}\int_a^b x[f(x) - g(x)]dx \text{ et } \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{M_x}{pA} = \frac{1}{A}\int_a^b \tfrac{1}{2}[f(x)^2 - g(x)^2]dx .$$

48. a) Soit $0 \leq x \leq 1$. Si $n < m$, alors $x^n > x^m$, c'est-à-dire qu'élever x à une plus grande puissance résulte en un plus petit nombre.



b) En utilisant les formules 9 et en nous fondant sur le fait que l'aire de $\mathscr{R}$ est

$A = \int_0^1 (x^n - x^m)dx = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} = \frac{m-n}{(n+1)(m+1)}$, nous obtenons

$$\bar{x} = \frac{(n+1)(m+1)}{m-n}\int_0^1 x[x^n - x^m]dx = \frac{(n+1)(m+1)}{m-n}\int_0^1 (x^{n+1} - x^{m+1})dx$$
$$= \frac{(n+1)(m+1)}{m-n}\left[\frac{1}{n+2} - \frac{1}{m+2}\right] = \frac{(n+1)(m+1)}{(n+2)(m+2)}$$

et

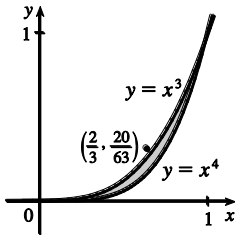
 © Groupe Modulo inc., 2013

$$\bar{y} = \frac{(n+1)(m+1)}{m-n}\int_0^1 \tfrac{1}{2}[(x^n)^2 - (x^m)^2]dx = \frac{(n+1)(m+1)}{2(m-n)}\int_0^1 (x^{2n} - x^{2m})dx$$
$$= \frac{(n+1)(m+1)}{2(m-n)}\left[\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2m+1}\right] = \frac{(n+1)(m+1)}{(2n+1)(2m+1)}$$

c) Si nous posons $n = 3$ et $m = 4$, alors le point

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{4\cdot 5}{5\cdot 6}, \frac{4\cdot 5}{7\cdot 9}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{20}{63}\right)$$

**qui est situé à l'extérieur de $\mathscr{R}$ puisque $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} < \frac{20}{63}$. Il y a d'autres réponses possibles, mais le choix fait ici est le plus simple.



SUJET À EXPLORER : DES TASSES À CAFÉ COMPLÉMENTAIRES

1. Le volume de la tasse A est $V_A = \int_0^h \pi[f(y)]^2 dy$ et le volume de la tasse B est

$$V_B = \int_0^h \pi[k - f(y)]^2 dy = \int_0^h \pi\{k^2 - 2kf(y) + [f(y)]^2\}dy$$
$$= [\pi k^2 y]_0^h - 2\pi k\int_0^h f(y)dy + \int_0^h \pi[f(y)]^2 dy = \pi k^2 h - 2\pi k A_1 + V_A$$

Par conséquent, $V_A = V_B \Leftrightarrow \pi k(kh - 2A_1) = 0 \Leftrightarrow k = 2(A_1/h)$, c'est-à-dire que la valeur de k est le double de la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0, h]$.

2. Selon le problème 1, $V_A = V_B \Leftrightarrow kh = 2A_1 \Leftrightarrow A_1 + A_2 = 2A_1 \Leftrightarrow A_2 = A_1$.

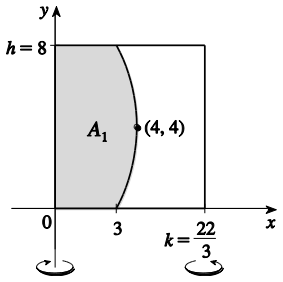
3. Soit $\bar{x}_1$ et $\bar{x}_2$ les coordonnées sur l'axe des x des centres de masse de A_1 et de A_2, respectivement. Selon le théorème de Pappus, $V_A = 2\pi\bar{x}_1 A_1$ et $V_B = 2\pi(k - \bar{x}_2)A_2$, donc

$V_A = V_B \Leftrightarrow \bar{x}_1 A_1 = kA_2 - \bar{x}_2 A_2 \Leftrightarrow kA_2 = \bar{x}_1 A_1 + \bar{x}_2 A_2 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} kA_2 = \frac{1}{2}k(A_1 + A_2) \Leftrightarrow \frac{1}{2}kA_2 = \frac{1}{2}kA_1 \Leftrightarrow A_2 = A_1$, tel que nous l'avons démontré au problème 2. [(*) La somme des moments des régions des aires A_1 et A_2 par rapport à l'axe des y est égale au moment de l'ensemble du rectangle k-par-h par rapport à l'axe des y.]

Donc, puisque $A_1 + A_2 = kh$, nous obtenons $V_A = V_B \Leftrightarrow A_1 = A_2 \Leftrightarrow A_1 = \frac{1}{2}(A_1 + A_2) \Leftrightarrow A_1 = \frac{1}{2}(kh) \Leftrightarrow k = 2(A_1/h)$, tel que nous l'avons démontré au problème 1.

 © Groupe Modulo inc., 2013

4. Utilisons une tasse de hauteur $h = 8$ cm et d'un diamètre de 6 cm au haut et au bas, avec au centre un renflement symétrique d'un diamètre de 8 cm (dimensions intérieures dans tous les cas).



Considérons l'équation d'une parabole qui a un sommet au point (4, 4), soit, $x = a(y - 4)^2 + 4$. Pour trouver a, utilisons le point (3, 0) : $3 = a(0-4)^2 + 4 \;\Rightarrow\; -1 = 16a \;\Rightarrow\; a = -\frac{1}{16}$. Pour trouver k, utilisons la relation identifiée au problème 1; nous avons donc besoin de A_1.

$$A_1 = \int_0^8 [-\tfrac{1}{16}(y-4)^2 + 4]dy = \int_{-4}^4 (-\tfrac{1}{16}u^2 + 4)du \quad [u = y - 4]$$
$$= 2\int_0^4 (-\tfrac{1}{16}u^2 + 4)du = 2[-\tfrac{1}{48}u^3 + 4u]_0^4 = 2(-\tfrac{4}{3} + 16) = \tfrac{88}{3}.$$

Par conséquent, $k = 2(A_1/h) = 2\left(\frac{88/3}{8}\right) = \frac{22}{3}$.

Donc, avec $h = 8$ et la courbe $x = -\frac{1}{16}(y-4)^2 + 4$, nous obtenons

$$V_A = \int_0^8 \pi[-\tfrac{1}{16}(y-4)^2 + 4]^2 dy = \pi\int_{-4}^4 (-\tfrac{1}{16}u^2 + 4)^2 du \quad [u = y - 4] = 2\pi\int_0^4 (\tfrac{1}{256}u^4 - \tfrac{1}{2}u^2 + 16)du$$
$$= 2\pi[\tfrac{1}{1280}u^5 - \tfrac{1}{6}u^3 + 16u]_0^4 = 2\pi(\tfrac{4}{5} - \tfrac{32}{3} + 64) = 2\pi(\tfrac{812}{15}) = \tfrac{1624}{15}\pi$$

Ceci est environ 340 cm^3 ou 340 ml. Avec $k = \frac{22}{3}$, nous savons, selon le problème 1, que la tasse B contient la même quantité.

4.4 Les applications aux domaines de l'économie et de la biologie

1. Selon le théorème de la variation nette, $C(4000) - C(0) = \int_0^{4000} C'(x)dx \Rightarrow$

$$C(4000) = 18\,000 + \int_0^{4\,000} (0,82 - 0,000\,03x + 0,000\,000\,003x^2)dx$$
$$= 18\,000 + [0,82x - 0,000\,015x^2 + 0,000\,000\,001x^3]_0^{4\,000} = 18\,000 + 3104 = 21\,104\ \$$$

2. Selon le théorème de la variation nette,

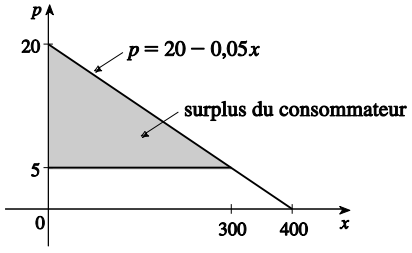
$$R(10\,000) - R(5000) = \int_{5000}^{10\,000} R'(x)dx = \int_{5000}^{10\,000} (48 - 0,0012x)dx = [48x - 0,0006x^2]_{5000}^{10\,000}$$
$$= 420\,000 - 225\,000 = 195\,000\ \$$$

3. Selon le théorème de la variation nette,

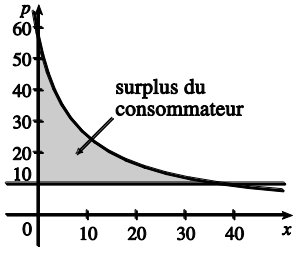
$C(50) - C(0) = \int_0^{50} (0,6 + 0,008x)dx \Rightarrow C(50) = 100 + [0,6x + 0,004x^2]_0^{50} = 100 + (40 - 0) = 140\,000\ \$$. De façon similaire, $C(100) - C(50) = [0,6x + 0,004x^2]_{50}^{100} = 100 - 40 = 60\,000\ \$$.

4. Surplus du consommateur $= \int_0^{300} [p(x) - p(300)]dx$

$$= \int_0^{300} [20 - 0,05x - (5)]dx$$
$$= \int_0^{300} (15 - 0,05x)dx = [15x - 0,025x^2]_0^{3000}$$
$$= 4500 - 2250 = 2250\ \$$$



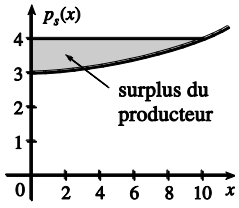
5. $p(x) = 10 \Rightarrow \frac{450}{x+8} = 10 \Rightarrow x + 8 = 45 \Rightarrow x = 37$.



 © Groupe Modulo inc., 2013

$$\text{Surplus du consommateur} = \int_0^{37} [p(x) - 10]dx = \int_0^{37} \left(\frac{450}{x+8} - 10 \right) dx$$
$$= [450\ln(x+8) - 10x]_0^{37} = (450\ln 45 - 370) - 450\ln 8$$
$$= 450\ln(\tfrac{45}{8}) - 370 \approx 407,25\ \$$$

6. $p_s(x) = 3 + 0{,}01x^2$. $P = p_s(10) = 3 + 1 = 4$.



$$\text{Surplus du producteur} = \int_0^{10} [P - p_s(x)]dx = \int_0^{10} [4 - 3 - 0{,}01x^2]dx$$
$$= [x - \tfrac{0{,}01}{3}x^3]_0^{10} \approx 10 - 3{,}33 = 6{,}67\ \$$$

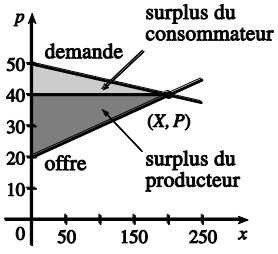
7. $P = p_s(x) \Rightarrow 400 = 200 + 0{,}2x^{3/2} \Rightarrow 200 = 0{,}2x^{3/2} \Rightarrow 1000 = x^{3/2} \Rightarrow x = 1000^{2/3} = 100$.

$$\text{Surplus du producteur} = \int_0^{100} [P - p_s(x)]dx = \int_0^{100} [400 - (200 + 0{,}2x^{3/2})]dx = \int_0^{100} 200 - \tfrac{1}{5}x^{3/2})dx$$
$$= \left[200x - \tfrac{2}{25}x^{5/2} \right]_0^{100} = 20\,000 - 8000 = 12\,000\ \$$$

8. Les courbes $p = 50 - \frac{1}{20}x$ et $p = 20 + \frac{1}{10}x$ se coupent en $p = 40$ et en $x = 200$.

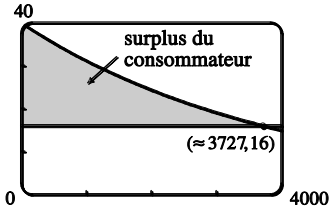
$$\text{Surplus du consommateur} = \int_0^{200} (50 - \tfrac{1}{20}x - 40)dx = [10x - \tfrac{1}{40}x^2]_0^{200} = 1000\ \$$$

$$\text{Surplus du producteur} = \int_0^{200} (40 - 20 - \tfrac{1}{10}x)dx = [20x - \tfrac{1}{20}x^2]_0^{200} = 2000\ \$$$



9. $p(x) = \dfrac{800\,000e^{-x/5\,000}}{x + 20\,000} = 16 \Rightarrow x = x_1 \approx 3727{,}04$.

$$\text{Surplus du consommateur} = \int_0^{x_1} [p(x) - 16]dx \approx 37\,753\ \$$$



10. La fonction demande est linéaire avec une pente $\frac{-0,5}{50} = -\frac{1}{100}$ et $p(500) = 10$; une équation serait donc

$p - 10 = -\frac{1}{100}(x - 500)$ ou $p = -\frac{1}{100}x + 15$. Un prix de vente de 8,00 \$ signifie que $8 = -\frac{1}{100}x + 15 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{100}x = 7 \quad \Rightarrow \quad x = 700$.

Surplus du consommateur $= \int_0^{700} (-\frac{1}{100}x + 15 - 8)dx = [-\frac{1}{200}x^2 + 7x]_0^{700} = 2450$ \$.

11. $f(8) - f(4) = \int_4^8 f'(t)dt = \int_4^8 \sqrt{t}dt = \left[\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_4^8 = \frac{2}{3}(16\sqrt{2} - 8) \approx 9,75$ millions de dollars

12. Le revenu total R pour les quatre premières années est

$$R = \int_0^4 f(t)dt = \int_0^4 9000\sqrt{1+2t}dt = \int_1^9 9000u^{1/2}(\tfrac{1}{2}du) \quad [u = 1 + 2t, du = 2dt]$$
$$= 4500\left[\tfrac{2}{3}u^{3/2}\right]_1^9 = 3000(27 - 1) = 78\,000 \text{ \$}$$

13. $N = \int_a^b Ax^{-k}dx = A\left[\frac{x^{-k+1}}{-k+1}\right]_a^b = \frac{A}{1-k}(b^{1-k} - a^{1-k})$.

De façon similaire, $\int_a^b Ax^{1-k}dx = A\left[\frac{x^{2-k}}{2-k}\right]_a^b = \frac{A}{2-k}(b^{2-k} - a^{2-k})$.

Par conséquent, $\bar{x} = \frac{1}{N}\int_a^b Ax^{1-k}dx = \frac{[A/(2-k)](b^{2-k} - a^{2-k})}{[A/(1-k)](b^{1-k} - a^{1-k})} = \frac{(1-k)(b^{2-k} - a^{2-k})}{(2-k)(b^{1-k} - a^{1-k})}$.

14. $n(9) - n(5) = \int_5^9 (2200 + 10e^{0,8t})dt = \left[2200t + \frac{10e^{0,8t}}{0,8}\right]_5^9 = [2200t]_5^9 + \frac{25}{2}[e^{0,8t}]_5^9$
$= 2200(9 - 5) + 12,5(e^{7,2} - e^4) \approx 24\,860$

15. $F = \frac{\pi PR^4}{8\eta l} = \frac{\pi(4000)(0,008)^4}{8(0,027)(2)} \approx 1,19 \times 10^{-4}$ cm^3/s

16. Si le débit sanguin demeure constant, alors $\frac{\pi P_0 R_0^4}{8\eta l} = \frac{\pi PR^4}{8\eta l} \quad \Rightarrow \quad P_0 R_0^4 = PR^4 \quad \Rightarrow \quad \frac{P}{P_0} = \left(\frac{R_0}{R}\right)^4$.

$R = \frac{3}{4}R_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{P}{P_0} = \left(\frac{R_0}{\frac{3}{4}R_0}\right)^4 \quad \Rightarrow \quad P = P_0(\frac{4}{3})^4 \approx 3,160\,5P_0 > 3P_0$, c'est-à-dire que la pression sanguine est égale à plus du triple de sa valeur initiale.

 © Groupe Modulo inc., 2013

17. Selon la formule 3, $F = \dfrac{A}{\int_0^T c(t)dt} = \dfrac{6}{20I}$, où

$$I = \int_0^{10} te^{-0,6t}dt = \left[\frac{1}{(-0,6)^2}(-0,6t - 1)e^{-0,6t}\right]_0^{10} \text{ [intégration par parties]} = \tfrac{1}{0,36}(-7e^{-6} + 1)$$

Par conséquent, $F = \dfrac{6(0,36)}{20(1-7e^{-6})} = \dfrac{0,108}{1-7e^{-6}} \approx 0,1099$ L/s ou 6,594 L/min .

18. Comme dans l'exemple 2, estimons le débit cardiaque à l'aide de la règle de Simpson, avec $\Delta t = (16 - 0)/8 = 2$.

$$\begin{aligned}\int_0^{16} c(t)dt &\approx \tfrac{2}{3}[c(0) + 4c(2) + 2c(4) + 4c(6) + 2c(8) + 4c(10) + 2c(12) + 4c(14) + c(16)]\\ &= \tfrac{2}{3}[0 + 4(4,1) + 2(8,9) + 4(8,5) + 2(6,7) + 4(4,3) + 2(2,5) + 4(1,2) + 0,2]\\ &= \tfrac{2}{3}(108,8) = 72,5\overline{3} \text{ mg} \cdot \text{s/L}\end{aligned}$$

Par conséquent, $F \approx \dfrac{A}{72,5\overline{3}} = \dfrac{5,5}{72,53} \approx 0,0758$ L/s ou 4,55 L/min .

19. Comme dans l'exemple 2, estimons le débit cardiaque à l'aide de la règle de Simpson, avec $\Delta t = (16 - 0)/8 = 2$.

$$\begin{aligned}\int_0^{16} c(t)dt &\approx \tfrac{2}{3}\ [c(0) + 4c(2) + 2c(4) + 4c(6) + 2c(8) + 4c(10) + 2c(12) + 4c(14) + c(16)]\\ &\approx \tfrac{2}{3}[0 + 4(6,1) + 2(7,4) + 4(6,7) + 2(5,4) + 4(4,1) + 2(3,0) + 4(2,1) + 1,5]\\ &= \tfrac{2}{3}(109,1) = 72,7\overline{3} \text{ mg} \cdot \text{s/L}\end{aligned}$$

Par conséquent, $F \approx \dfrac{A}{72,7\overline{3}} = \dfrac{7}{72,7\overline{3}} \approx 0,0962$ L/s ou 5,77 L/min .

 © Groupe Modulo inc., 2013

4.5 Les probabilités

1. a) $\int_{30\,000}^{40\,000} f(x)dx$ est la probabilité qu'un pneu choisi au hasard aura une durée de vie de 30 000 à 40 000 kilomètres.

b) $\int_{25\,000}^{\infty} f(x)dx$ est la probabilité qu'un pneu choisi au hasard aura une durée de vie d'au moins 25 000 kilomètres.

2. a) La probabilité que le trajet dure moins de 15 minutes est $\int_0^{15} f(t)dt$.

b) La probabilité que le trajet dure plus d'une demi-heure est $\int_{30}^{\infty} f(t)dt$.

3. a) En général, il faut satisfaire aux conditions qui précèdent l'exemple 1, c'est-à-dire, **1)** $f(x) \geq 0$ pour tout x, et **2)** $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Pour $0 \leq x \leq 1$, $f(x) = 30x^2(1-x)^2 \geq 0$ et $f(x) = 0$ pour toutes les autres valeurs de x, donc $f(x) \geq 0$ pour tout x. De plus,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^1 30x^2(1-x)^2\,dx = \int_0^1 30x^2(1-2x+x^2)dx = \int_0^1 (30x^2 - 60x^3 + 30x^4)dx$$
$$= [10x^3 - 15x^4 + 6x^5]_0^1 = 10 - 15 + 6 = 1$$

Par conséquent, f est une fonction de densité de probabilité.

b) $P(X \leq \frac{1}{3}) = \int_{-\infty}^{1/3} f(x)dx = \int_0^{1/3} 30x^2(1-x)^2\,dx = [10x^3 - 15x^4 + 6x^5]_0^{1/3} = \frac{10}{27} - \frac{15}{81} + \frac{6}{243} = \frac{17}{81}$

4. a) Puisque $f(x) = xe^{-x} \geq 0$ si $x \geq 0$ et $f(x) = 0$ si $x < 0$, il s'ensuit que $f(x) \geq 0$ pour tout x. De plus,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t xe^{-x}dx \overset{96}{=} \quad \text{[intégration par parties]}$$
$$= \lim_{t\to\infty}[(-x-1)e^{-x}]_0^t = \lim_{t\to\infty}[(-t-1)e^{-t}+1] = 1 - \lim_{t\to\infty}\frac{t+1}{e^t} \overset{H}{=} 1 - \lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^t} = 1 - 0 = 1$$

Par conséquent, f est une fonction de densité de probabilité.

b) $P(1 \leq X \leq 2) = \int_1^2 xe^{-x}dx = [(-x-1)e^{-x}]_1^2 = -3e^{-2} + 2e^{-1} = 2/e - 3/e^2$ $[\approx 0{,}33]$

5. a) En général, il faut satisfaire aux conditions qui précèdent l'exemple 1, c'est-à-dire, 1) $f(x) \geq 0$ pour tout x, et 2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Si $c \geq 0$, alors $f(x) \geq 0$; la première condition est donc satisfaite. En ce qui concerne la seconde condition, nous voyons

que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{1+x^2}dx$ et que

$$\int_0^{\infty} \frac{c}{1+x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{c}{1+x^2}\,dx = c\lim_{t\to\infty}[\arctan x]_0^t = c\lim_{t\to\infty}\arctan t = c\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

De façon similaire, $\int_{-\infty}^{0} \frac{c}{1+x^2}dx = c\left(\frac{\pi}{2}\right)$, donc $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{1+x^2}dx = 2c\left(\frac{\pi}{2}\right) = c\pi$

Puisque $c\pi$ doit être égal à 1, nous devons avoir $c = 1/\pi$; f est donc une fonction de densité de probabilité.

 © Groupe Modulo inc., 2013

b) $P(-1 < X < 1) = \int_{-1}^{1} \frac{1/\pi}{1+x^2}dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{1} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{2}{\pi}[\arctan x]_0^1 = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{1}{2}$

6. a) Pour $0 \le x \le 3$, nous avons $f(x) = k(3x - x^2)$, qui n'est pas négatif si et seulement si $k \ge 0$. De plus,

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^3 k(3x - x^2)dx = k[\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3]_0^3 = k(\frac{27}{2} - 9) = \frac{9}{2}k$. Or, $\frac{9}{2}k = 1 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2}{9}$. Par conséquent, f est une fonction de densité de probabilité si et seulement si $k = \frac{2}{9}$.

b) Soit $k = \frac{2}{9}$.

$$P(X > 1) = \int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^3 \frac{2}{9}(3x - x^2)dx = \frac{2}{9}[\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3]_1^3 = \frac{2}{9}[\frac{27}{2} - 9] - \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}(\frac{10}{3}) = \frac{20}{27}.$$

c) La moyenne

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^3 x[\frac{2}{9}(3x - x^2)]dx = \frac{2}{9}\int_0^3 (3x^2 - x^3)dx$$
$$= \frac{2}{9}[x^3 - \frac{1}{4}x^4]_0^3 = \frac{2}{9}(27 - \frac{81}{4}) = \frac{2}{9}(\frac{27}{4}) = \frac{3}{2}.$$

7. a) En général, il faut satisfaire aux conditions qui précèdent l'exemple 1, c'est-à-dire, 1) $f(x) \ge 0$ pour tout x, et 2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Puisque $f(x) = 0$ ou $f(x) = 0{,}1$ la première condition est satisfaite. En ce qui concerne la seconde condition, nous constatons que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^{10} 0{,}1dx = [\frac{1}{10}x]_0^{10} = 1$. Par conséquent, $f(x)$ est une fonction de densité de probabilité des valeurs indiquées par l'aiguille.

b) Comme tous les nombres entre 0 et 10 ont une chance égale d'être choisis, nous nous attendons à ce que la moyenne soit à mi-chemin entre les extrémités de l'intervalle, c'est-à-dire, $x = 5$.

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{10} x(0{,}1)dx = [\frac{1}{20}x^2]_0^{10} = \frac{100}{20} = 5, \quad \text{comme nous nous y attendions.}$$

8. a) Comme dans l'exercice précédent, 1) $f(x) \ge 0$ et 2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^{10} f(x)dx = \frac{1}{2}(10)(0{,}2) = 1$ [aire d'un triangle]. Donc, $f(x)$ est une fonction de densité de probabilité.

b)

i) $P(X < 3) = \int_0^3 f(x)dx = \frac{1}{2}(3)(0{,}1) = \frac{3}{20} = 0{,}15$

ii) Nous calculons d'abord $P(X > 8)$ et soustrayons ensuite de 1 (la probabilité totale) le résultat de ce calcul et la réponse à la sous-question i). $P(X > 8) = \int_8^{10} f(x)dx = \frac{1}{2}(2)(0{,}1) = \frac{2}{20} = 0{,}10$. Donc, $P(3 \le X \le 8) = 1 - 0{,}15 - 0{,}10 = 0{,}75$.

c) Nous déterminons les équations des droites de (0, 0) à (6; 0,2) et de (6; 0,2) à (10, 0) et trouvons que

 © Groupe Modulo inc., 2013

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{30}x & \text{si } 0 \le x<6\\ -\frac{1}{20}x+\frac{1}{2} & \text{si } 6 \le x<10\\ 0 & \text{dans les autres cas}\end{cases}$$

$$\mu=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_0^6 x(\tfrac{1}{30}x)dx+\int_6^{10}x(-\tfrac{1}{20}x+\tfrac{1}{2})dx=[\tfrac{1}{90}x^3]_0^6+[-\tfrac{1}{60}x^3+\tfrac{1}{4}x^2]_6^{10}$$
$$=\tfrac{216}{90}+(-\tfrac{1000}{60}+\tfrac{100}{4})-(-\tfrac{216}{60}+\tfrac{36}{4})=\tfrac{16}{3}=5,\overline{3}$$

9. Nous devons trouver une valeur m de sorte que $\int_m^{\infty}f(t)dt=\frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\int_m^x \frac{1}{5}e^{-t/5}dt=\frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{5}(-5)e^{-t/5}\right]_m^x=\frac{1}{2} \Rightarrow$

$(-1)(0-e^{-m/5})=\frac{1}{2} \Rightarrow e^{-m/5}=\frac{1}{2} \Rightarrow -m/5=\ln\frac{1}{2} \Rightarrow m=-5\ln\frac{1}{2}=5\ln 2\approx 3,47\,\text{min}.$

10. a) $\mu=1000 \Rightarrow f(t)=\begin{cases}0 & \text{si } t<0\\ \frac{1}{1000}e^{-t/1000} & \text{si } t\ge 0\end{cases}$

i) $P(0\le X\le 200)=\int_0^{200}\frac{1}{1000}e^{-t/1000}dt=\left[-e^{-t/1000}\right]_0^{200}=-e^{-1/5}+1\approx 0,181$

ii) $P(X>800)=\int_{800}^{\infty}\frac{1}{1000}e^{-t/1000}dt=\lim_{x\to\infty}[-e^{-t/1000}]_{800}^x=0+e^{-4/5}\approx 0,449$

b) Nous devons trouver m de sorte que $\int_m^{\infty}f(t)dt=\frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\int_m^x\frac{1}{1000}e^{-t/1000}dt=\frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x\to\infty}[-e^{-t/1000}]_m^x=\frac{1}{2} \Rightarrow$

$0+e^{-m/1000}=\frac{1}{2} \Rightarrow -m/1000=\ln\frac{1}{2} \Rightarrow m=-1000\ln\frac{1}{2}=1000\ln 2\approx 693,1\ h.$

11. Considérons une fonction de densité exponentielle avec μ = 2,5 min.

a) $P(X>4)=\int_4^{\infty}f(t)dt=\lim_{x\to\infty}\int_4^{\infty}\frac{1}{2,5}e^{-t/2,5}dt=\lim_{x\to\infty}\left[-e^{-t/2,5}\right]_4^x=0+e^{-4/2,5}\approx 0,202$

b) $P(0\le X\le 2)=\int_0^2 f(t)dt=\left[-e^{-t/2,5}\right]_0^2=-e^{-2/2,5}+1\approx 0,551$

c) Nous devons trouver a de sorte que $P(X\ge a)=0,02$, ou, de façon équivalente,

$P(0\le X\le a)=0,98 \Leftrightarrow \int_0^a f(t)dt=0,98 \Leftrightarrow \left[-e^{-t/2,5}\right]_0^a=0,98 \Leftrightarrow -e^{-a/2,5}+1=0,98 \Leftrightarrow$
$e^{-a/2,5}=0,02 \Leftrightarrow -a/2,5=\ln 0,02 \Leftrightarrow a=-2,5\ \ln\frac{1}{50}=2,5\ln 50\approx 9,78\,\text{min}\approx 10\,\text{min}$. La publicité devrait dire que, si un client n'est pas servi en moins de dix minutes, il recevra un hamburger gratuit.

12. a) Avec μ = 175,4 et σ = 7,6, nous obtenons $P(170\le X\le 185)=\int_{170}^{185}\frac{1}{7,6\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-175,4)^2}{2\cdot 7,6^2}\right)dx\approx 0,658$ (en évaluant l'intégrale à l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur).

b) $P(X>183\text{ cm})=1-P(0\le X\le 183)\approx 1-0,841=0,159$, donc 15,94 % de la population des hommes adultes mesure plus de 183 cm.

 © Groupe Modulo inc., 2013

13. $P(X \geq 4{,}5) = \int_{4{,}5}^{\infty} \frac{1}{1{,}9\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-4{,}3)^2}{2 \cdot 1{,}9^2}\right) dx$. Afin d'éviter l'évaluation d'une intégrale impropre, faisons l'évaluation en intégrant de 4,5 à 100. Par conséquent, $P(X \geq 4{,}5) \approx \int_{4{,}5}^{100} \frac{1}{1{,}9\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-4{,}3)^2}{2 \cdot 1{,}9^2}\right) dx \approx 0{,}458$ (en évaluant l'intégrale à l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur), donc environ 46 % des ménages jettent au moins 4,5 kg de papier par semaine.

Remarque : Dans ce problème, nous ne pouvons pas évaluer $1 - P(0 \leq X \leq 4{,}5)$ puisqu'une partie significative de l'aire est située à la gauche de $X = 0$.

14. a) $P(0 \leq X \leq 480) = \int_0^{480} \frac{1}{12\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-500)^2}{2 \cdot 12^2}\right) dx \approx 0{,}0478$ (en évaluant l'intégrale à l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur). Il y a donc une probabilité d'environ 4,78 % qu'une boîte contienne moins de 480 g de céréales.

b) Nous devons trouver une valeur μ de sorte que $P(0 \leq X < 500) = 0{,}05$. En utilisant une calculatrice ou un ordinateur pour trouver $P(0 \leq X \leq 500)$ pour différentes valeurs de μ, nous trouvons que si $\mu = 519{,}73$, $P = 0{,}050\,07$, et si $\mu = 519{,}74$, $P = 0{,}049\,98$. La masse cible est donc d'au moins 519,74 g.

15. a) $P(0 \leq X \leq 100) = \int_0^{100} \frac{1}{8\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-112)^2}{2 \cdot 8^2}\right) dx \approx 0{,}0668$ (en évaluant l'intégrale à l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur). Il y a donc une probabilité d'environ 6,68 % qu'un véhicule choisi au hasard roule à une vitesse permise.

b) $P(X \geq 125) = \int_{125}^{\infty} \frac{1}{8\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-112)^2}{2 \cdot 8^2}\right) dx = \int_{125}^{\infty} f(x)dx$. Dans ce cas, nous pourrions utiliser une calculatrice ou un ordinateur pour évaluer $\int_{125}^{300} f(x)dx$ ou $1 - \int_0^{125} f(x)dx$. Comme les deux résultats sont d'environ 0,0521, environ 5,21 % des conducteurs sont ciblés.

16 $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$

$$f'(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \frac{-2(x-\mu)}{2\sigma^2} = \frac{-1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}(x-\mu)$$

$$f''(x) = \frac{-1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\left[e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \cdot 1 + (x-\mu)e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \frac{-2(x-\mu)}{2\sigma^2}\right]$$

$$= \frac{-1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}\left[\frac{1 - (x-\mu)^2}{\sigma^2}\right] = \frac{1}{\sigma^5\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}\left[(x-\mu)^2 - \sigma^2\right]$$

$f''(x) < 0 \Rightarrow (x-\mu)^2 - \sigma^2 < 0 \Rightarrow |x-\mu| < \sigma \Rightarrow -\sigma < x-\mu < \sigma \Rightarrow \mu - \sigma < x < \mu + \sigma$ et, de façon similaire, $f''(x) > 0 \Rightarrow x < \mu - \sigma$ ou $x > \mu + \sigma$. Par conséquent, f change de concavité et a des points d'inflexion en $x = \mu \pm \sigma$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

17. $P(\mu-2\sigma\le X\le\mu+2\sigma)=\int_{\mu-2\sigma}^{\mu+2\sigma}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dx$. En posant $t=\frac{x-\mu}{\sigma}$ et $dt=\frac{1}{\sigma}dx$, nous obtenons $\int_{-2}^{2}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-t^2/2}(\sigma dt)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-2}^{2}e^{-t^2/2}dt\approx 0{,}9545$.

18. Soit $f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ ce^{-cx} & \text{si } x\ge 0\end{cases}$ où $c = 1/\mu$. En intégrant par parties, à l'aide de tables d'intégrales ou à l'aide d'un logiciel de calcul symbolique, nous trouvons que

1) $\int xe^{bx}dx=(e^{bx}/b^2)(bx-1)$

2) $\int x^2e^{bx}dx=(e^{bx}/b^3)(b^2x^2-2bx+2)$

Or,

$$\begin{aligned}\sigma^2&=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}(x-\mu)^2f(x)dx+\int_{0}^{\infty}(x-\mu)^2f(x)dx\\&=0+\lim_{t\to\infty}c\int_0^t(x-\mu)^2e^{-cx}dx=c\cdot\lim_{t\to\infty}\int_0^t(x^2e^{-cx}-2x\mu e^{-cx}+\mu^2e^{-cx})dx\end{aligned}$$

Utilisons ensuite 2) et 1) avec $b = -c$ afin d'obtenir

$$\sigma^2=c\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{-e^{-cx}}{c^3}(c^2x^2+2cx+2)-2\mu\frac{e^{-cx}}{c^2}\,(-cx-1)+\mu^2\frac{e^{-cx}}{-c}\right]_0^t$$

En appliquant la règle de l'Hospital plusieurs fois, ainsi que le fait que $\mu = 1/c$, nous obtenons

$$\sigma^2=c\left[0-\left(-\frac{2}{c^3}+\frac{2}{c}\cdot\frac{1}{c^2}+\frac{1}{c^2}\cdot\frac{1}{-c}\right)\right]=c\left(\frac{1}{c^3}\right)=\frac{1}{c^2}\quad\Rightarrow\quad\sigma=\frac{1}{c}=\mu$$

19. a) D'abord, $p(r)=\frac{4}{a_0^3}r^2e^{-2r/a_0}\ge 0$ pour $r\ge 0$. Ensuite,

$$\int_{-\infty}^{\infty}p(r)dr=\int_0^{\infty}\frac{4}{a_0^3}\,r^2e^{-2r/a_0}dr=\frac{4}{a_0^3}\lim_{t\to\infty}\int_0^t r^2e^{-2r/a_0}dr$$

En intégrant par parties, à l'aide de tables d'intégrales ou à l'aide d'un logiciel de calcul symbolique [ou comme à l'exercice 18], nous trouvons que

$\int x^2e^{bx}dx=(e^{bx}/b^3)(b^2x^2-2bx+2)$. (*) Ensuite, en utilisant (*) (avec $b = -2/a_0$) et la règle de l'Hospital, nous obtenons $\frac{4}{a_0^3}\left[\frac{a_0^3}{-8}(-2)\right]=1$. Ceci satisfait la seconde condition pour qu'une fonction soit une fonction de densité de probabilité.

b) À l'aide de la règle de l'Hospital, $\frac{4}{a_0^3}\lim_{r\to\infty}\frac{r^2}{e^{2r/a_0}}=\frac{4}{a_0^3}\,\lim_{r\to\infty}\frac{2r}{(2/a_0)e^{2r/a_0}}=\frac{2}{a_0^2}\lim_{r\to\infty}\frac{2}{(2/a_0)e^{2r/a_0}}=0$. Pour trouver la valeur maximale de p, nous annulons la dérivée :

 © Groupe Modulo inc., 2013

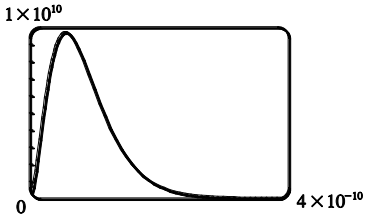
$$p'(r) = \frac{4}{a_0^3}\left[r^2 e^{-2r/a_0}\left(-\frac{2}{a_0}\right) + e^{-2r/a_0}(2r)\right] = \frac{4}{a_0^3} e^{-2r/a_0}(2r)\left(-\frac{r}{a_0}+1\right)$$

$p'(r) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = 0$ ou $1 = \dfrac{r}{a_0} \quad \Leftrightarrow \quad r = a_0 \quad [a_0 \approx 5{,}59 \times 10^{-11}\ \text{m}]$.

La valeur de $p'(r)$ change de positive à négative à $r = a_0$, donc $p(r)$ atteint sa valeur maximale en $r = a_0$.

c) Il serait assez difficile de trouver un rectangle d'approximation, mais le fait que nous avons trouvé la valeur maximale en b) nous aidera.

$$p(a_0) = \frac{4}{a_0^3} a_0^2 e^{-2a_0/a_0} = \frac{4}{a_0} e^{-2} \approx 9\,684\,098\,979$$



Avec une valeur maximale de près de 10 milliards et une aire totale sous la courbe de 1, nous savons que la « bosse » dans le graphique doit être extrêmement étroite.

d) $P(r) = \int_0^r \frac{4}{a_0^3} s^2 e^{-2s/a_0} ds \quad \Rightarrow \quad P(4a_0) = \int_0^{4a_0} \frac{4}{a_0^3} s^2 e^{-2s/a_0} ds$. En utilisant (*) à la sous-question a) [avec $b = -2/a_0$],

$$P(4a_0) = \frac{4}{a_0^3}\left[\frac{e^{-2s/a_0}}{-8/a_0^3}\left(\frac{4}{a_0^2}s^2 + \frac{4}{a_0}s + 2\right)\right]_0^{4a_0} = \frac{4}{a_0^3}\left(\frac{a_0^3}{-8}\right)[e^{-8}(64+16+2) - 1(2)] = -\tfrac{1}{2}(82e^{-8} - 2)$$
$$= 1 - 41e^{-8} \approx 0{,}986$$

e) $\mu = \int_{-\infty}^{\infty} rp(r)dr = \frac{4}{a_0^3}\lim_{t\to\infty}\int_0^t r^3 e^{-2r/a_0} dr$. En intégrant par parties trois fois ou à l'aide d'un logiciel de calcul symbolique, nous trouvons que $\int x^3 e^{bx} dx = \frac{e^{bx}}{b^4}(b^3x^3 - 3b^2x^2 + 6bx - 6)$. Donc, avec $b = -\dfrac{2}{a_0}$, nous appliquons la règle de l'Hospital et obtenons $\mu = \frac{4}{a_0^3}\left[-\frac{a_0^4}{16}(-6)\right] = \frac{3}{2}a_0$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

4. Révision

Compréhension des concepts

1. a) On définit la longueur d'une courbe comme étant la limite de la somme des longueurs composant la ligne brisée; on trouve cette définition près de la figure 3 à la section 4.1.

b) Se référer à la formule 4.1.2.

c) Se référer à la formule 4.1.4.

2. a) $S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$

b) Si $x = g(y)$, $c \le y \le d$, alors $S = \int_c^d 2\pi y\sqrt{1+[g'(y)]^2}\,dy$.

c) $S = \int_a^b 2\pi x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$ ou $S = \int_c^d 2\pi g(y)\sqrt{1+[g'(y)]^2}\,dy$

3. Posons $c(x)$ la longueur en coupe transversale de la paroi (mesurée parallèlement à la surface du fluide) à la profondeur x. La force hydrostatique qui s'exerce sur la paroi est $F = \int_a^b \rho g x c(x)\,dx$, où a et b sont les bornes inférieure et supérieure pour x aux points sur la paroi, et ρ est la masse volumique du fluide.

4. a) Le centre de masse est le point auquel la plaque est en équilibre horizontalement.

b) Se référer aux formules 4.3.8.

5. Si on fait tourner une région plane R située entièrement d'un côté d'une droite ℓ dans son plan autour de cette même droite ℓ, le volume du solide résultant est alors égal au produit de l'aire de R et de la distance parcourue par le centre de gravité de R.

6. Se référer à la figure 3 à la section 4.4, et à l'analyse qui la précède.

7. a) Se référer à la définition qui apparaît dans le premier paragraphe de la sous-section intitulée *Le débit cardiaque* à la section 4.4.

b) Se référer à l'analyse dans le second paragraphe de la sous-section intitulée *Le débit cardiaque* à la section 4.4.

8. Une fonction de densité de probabilité f est une fonction dont le domaine est celui d'une variable aléatoire continue X telle que $\int_a^b f(x)\,dx$ mesure la probabilité que X soit comprise entre a et b. Une telle fonction f a des valeurs non négatives et satisfait à la relation $\int_D f(x)\,dx = 1$, où D est le domaine de la variable aléatoire correspondante X. Si $D = \mathbb{R}$, ou si nous posons que $f(x) = 0$ pour tout nombre réel $x \notin D$, alors $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$. (Il est évident que, pour définir f de cette façon, nous devons supposer que f est intégrable.)

 © Groupe Modulo inc., 2013

9. a) $\int_0^{60} f(x)dx$ représente la probabilité que la masse d'une élève au collégial choisie au hasard soit inférieure à 60 kilogrammes.

b) $\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{\infty} xf(x)dx$

c) La médiane de f est le nombre m tel que $\int_m^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}$.

10. Se référer à l'analyse qui apparaît près de la formule 3 à la section 4.5.

Exercices récapitulatifs

---

1. $y = \frac{1}{6}(x^2+4)^{3/2} \Rightarrow dy/dx = \frac{1}{4}(x^2+4)^{1/2}(2x) \Rightarrow 1+(dy/dx)^2 = 1+[\frac{1}{2}x(x^2+4)^{1/2}]^2 = 1+\frac{1}{4}x^2(x^2+4) = \frac{1}{4}x^4+x^2+1 = (\frac{1}{2}x^2+1)^2$.

Par conséquent, $L = \int_0^3 \sqrt{(\frac{1}{2}x^2+1)^2}dx = \int_0^3 (\frac{1}{2}x^2+1)dx = [\frac{1}{6}x^3+x]_0^3 = \frac{15}{2}$.

2. $y = 2\ln(\sin\frac{1}{2}x) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 2\cdot\dfrac{1}{\sin(\frac{1}{2}x)}\cdot\cos(\frac{1}{2}x)\cdot\frac{1}{2} = \cot(\frac{1}{2}x) \Rightarrow 1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 1+\cot^2(\frac{1}{2}x) = \csc^2(\frac{1}{2}x)$.

Par conséquent,

$$L = \int_{\pi/3}^{\pi}\sqrt{\csc^2(\tfrac{1}{2}x)}dx = \int_{\pi/3}^{\pi}|\csc(\tfrac{1}{2}x)|dx = \int_{\pi/3}^{\pi}\csc(\tfrac{1}{2}x)dx = \int_{\pi/6}^{\pi/2}\csc u(2du) \quad \begin{bmatrix} u=\frac{1}{2}x, \\ du=\frac{1}{2}dx \end{bmatrix}$$
$$= 2[\ln|\csc u - \cot u|]_{\pi/6}^{\pi/2} = 2[\ln|\csc\tfrac{\pi}{2}-\cot\tfrac{\pi}{2}| - \ln|\csc\tfrac{\pi}{6}-\cot\tfrac{\pi}{6}|]$$
$$= 2\left[\ln|1-0| - \ln|2-\sqrt{3}|\right] = -2\ln(2-\sqrt{3}) \approx 2{,}63$$

3. a) $y = \dfrac{x^4}{16}+\dfrac{1}{2x^2} = \dfrac{1}{16}x^4+\dfrac{1}{2}x^{-2} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{4}\,x^3-x^{-3} \Rightarrow$

$1+(dy/dx)^2 = 1+(\frac{1}{4}x^3-x^{-3})^2 = 1+\frac{1}{16}x^6-\frac{1}{2}+x^{-6} = \frac{1}{16}\,x^6+\frac{1}{2}+x^{-6} = (\frac{1}{4}x^3+x^{-3})^2$. Par conséquent,

$L = \int_1^2 (\frac{1}{4}x^3+x^{-3})dx = [\frac{1}{16}x^4-\frac{1}{2}x^{-2}]_1^2 = (1-\frac{1}{8})-(\frac{1}{16}-\frac{1}{2}) = \frac{21}{16}$.

b) $S = \int_1^2 2\pi x(\frac{1}{4}x^3+x^{-3})dx = 2\pi\int_1^2(\frac{1}{4}x^4+x^{-2})dx = 2\pi[\frac{1}{20}x^5-\frac{1}{x}]_1^2$
$= 2\pi[(\frac{32}{20}-\frac{1}{2})-(\frac{1}{20}-1)] = 2\pi(\frac{8}{5}-\frac{1}{2}-\frac{1}{20}+1) = 2\pi(\frac{41}{20}) = \frac{41}{10}\pi$

4. a) $y = x^2 \Rightarrow 1+(y')^2 = 1+4x^2 \Rightarrow$

$$S = \int_0^1 2\pi x\sqrt{1+4x^2}dx = \int_1^5 \frac{\pi}{4}\sqrt{u}du \quad [u = 1+4x^2] = \frac{\pi}{6}\left[u^{3/2}\right]_1^5 = \frac{\pi}{6}(5^{3/2}-1)$$

b) $y = x^2 \Rightarrow 1+(y')^2 = 1+4x^2$. Donc,

 © Groupe Modulo inc., 2013

$$S = 2\pi\int_0^1 x^2\sqrt{1+4x^2}\,dx = 2\pi\int_0^2 \tfrac{1}{4}u^2\sqrt{1+u^2}\,\tfrac{1}{2}du \quad [u=2x] \quad = \tfrac{\pi}{4}\int_0^2 u^2\sqrt{1+u^2}\,du$$
$$= \tfrac{\pi}{4}\left[\tfrac{1}{8}u(1+2u^2)\sqrt{1+u^2} - \tfrac{1}{8}\ln|u+\sqrt{1+u^2}|\right]_0^2 \quad [u=\tan\theta \text{ formule 22}]$$
$$= \tfrac{\pi}{4}\left[\tfrac{1}{4}(9)\sqrt{5} - \tfrac{1}{8}\ln(2+\sqrt{5}) - 0\right] = \tfrac{\pi}{32}\left[18\sqrt{5} - \ln(2+\sqrt{5})\right]$$

5. $y = \sin x \;\Rightarrow\; y' = \cos x \;\Rightarrow\; 1+(y')^2 = 1+\cos^2 x.$ Soit $f(x) = \sqrt{1+\cos^2 x}$. Alors,

$$L = \int_0^\pi f(x)dx \approx S_{10}$$
$$= \frac{(\pi-0)/10}{3}[f(0) + 4f(\tfrac{\pi}{10}) + 2f(\tfrac{2\pi}{10}) + 4f(\tfrac{3\pi}{10}) + 2f(\tfrac{4\pi}{10})$$
$$+ 4f(\tfrac{5\pi}{10}) + 2f(\tfrac{6\pi}{10}) + 4f(\tfrac{7\pi}{10}) + 2f(\tfrac{8\pi}{10}) + 4f(\tfrac{9\pi}{10}) + f(\pi)]$$
$$\approx 3{,}820\,188$$

6. $S = \int_0^\pi 2\pi y ds = \int_0^\pi 2\pi\sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx$. Soit $g(x) = 2\pi\sin x\sqrt{1+\cos^2 x}$. Alors,

$$S = \int_0^\pi g(x)dx \approx S_{10}$$
$$= \frac{(\pi-0)/10}{3}[g(0) + 4g(\tfrac{\pi}{10}) + 2g(\tfrac{2\pi}{10}) + 4g(\tfrac{3\pi}{10}) + 2g(\tfrac{4\pi}{10})$$
$$+4g(\tfrac{5\pi}{10}) + 2g(\tfrac{6\pi}{10}) + 4g(\tfrac{7\pi}{10}) + 2g(\tfrac{8\pi}{10}) + 4g(\tfrac{9\pi}{10}) + g(\pi)]$$
$$\approx 14{,}426\,045$$

7. $y = \int_1^x \sqrt{\sqrt{t}-1}\,dt \;\Rightarrow\; dy/dx = \sqrt{\sqrt{x}-1} \;\Rightarrow\; 1+(dy/dx)^2 = 1+\left(\sqrt{x}-1\right) = \sqrt{x}$.

Par conséquent, $L = \int_1^{16}\sqrt{\sqrt{x}dx} = \int_1^{16} x^{1/4}dx = \tfrac{4}{5}\left[x^{5/4}\right]_1^{16} = \tfrac{4}{5}(32-1) = \tfrac{124}{5}$.

8. $S = \int_1^{16} 2\pi x ds = 2\pi\int_1^{16} x\cdot x^{1/4}dx = 2\pi\int_1^{16} x^{5/4}dx = 2\pi\cdot\tfrac{4}{9}\left[x^{9/4}\right]_1^{16} = \tfrac{8\pi}{9}(512-1) = \tfrac{4088}{9}\pi$

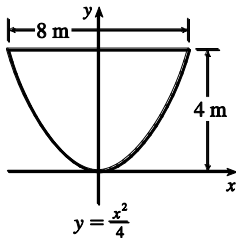
9. Comme à l'exemple 1 de la section 4.3, $\dfrac{a}{0{,}6-x} = \dfrac{0{,}25}{0{,}6} \;\Rightarrow\; 0{,}6a = 0{,}15 - 0{,}25x$ et

$$l = 2(0{,}5+a) = 1+2a = 1+2\left(\frac{0{,}15-0{,}25x}{0{,}6}\right) = \frac{9-5x}{6}$$

$$F = \int_0^{0{,}6}\rho g x\left(\frac{9-5x}{6}\right)dx = \tfrac{pg}{6}[\tfrac{9}{2}x^2 - \tfrac{5}{3}x^3]_0^{0{,}6} = \tfrac{pg}{6}(\tfrac{81}{50} - \tfrac{9}{25}) = \tfrac{pg}{6}(\tfrac{63}{50}) = 2058 \text{ N}$$

10. $F = \int_0^4 \rho g(4-y)2\left(2\sqrt{y}\right)dy = 4\rho g\int_0^4\left(4y^{1/2} - y^{3/2}\right)dy$
$= 4\rho g[\tfrac{8}{3}y^{3/2} - \tfrac{2}{5}y^{5/2}]_0^4 = 4\rho g(\tfrac{64}{3} - \tfrac{64}{5}) = 256\rho g(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{5})$
$= \tfrac{512}{15}\rho g \approx 3{,}35\times 10^5$ N

 © Groupe Modulo inc., 2013



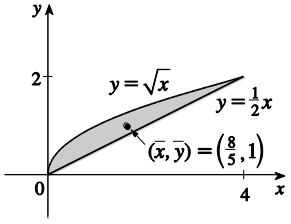
11. $A = \int_0^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}x\right)dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{4}x^2\right]_0^4 = \frac{16}{3} - 4 = \frac{4}{3}$

$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_0^4 x\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}x\right)dx = \frac{3}{4}\int_0^4 \left(x^{3/2} - \frac{1}{2}x^2\right)dx$

$= \frac{3}{4}\left[\frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{1}{6}x^3\right]_0^4 = \frac{3}{4}\left(\frac{64}{5} - \frac{64}{6}\right) = \frac{3}{4}\left(\frac{64}{30}\right) = \frac{8}{5}$

$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_0^4 \frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}x\right)^2\right]dx = \frac{3}{4}\int_0^4 \frac{1}{2}(x - \frac{1}{4}x^2)dx = \frac{3}{8}[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^3]_0^4 = \frac{3}{8}(8 - \frac{16}{3}) = \frac{3}{8}(\frac{8}{3}) = 1$

Par conséquent, le centre de masse est $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{8}{5}, 1)$.



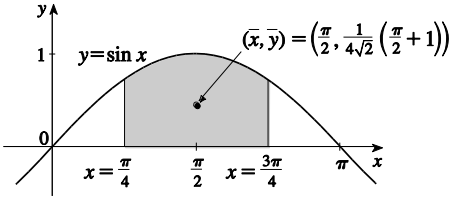
12. Étant donné la symétrie de la région, $\bar{x} = \frac{\pi}{2}$. $A = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin x dx = \left[-\cos x\right]_{\pi/4}^{3\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}$

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{1}{2}\sin^2 x dx = \frac{1}{A}\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{1}{4}(1 - \cos 2x)dx$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}[x - \frac{1}{2}\sin 2x]_{\pi/4}^{3\pi/4}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}[\frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2}(-1) - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cdot 1] = \frac{1}{4\sqrt{2}}(\frac{\pi}{2} + 1)]$$

Par conséquent, le centre de masse est $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{4\sqrt{2}}(\frac{\pi}{2} + 1)\right) \approx (1{,}57;\ 0{,}45)$.



13. Une équation de la droite qui passe par les points (0, 0) et (3, 2) est $y = \frac{2}{3}x$. $A = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2 = 3$. Donc, selon les formules 4.3.8,

$\bar{x} = \frac{1}{3}\int_0^3 x(\frac{2}{3}x)dx = \frac{2}{27}[x^3]_0^3 = 2$ et $\bar{y} = \frac{1}{3}\int_0^3 \frac{1}{2}(\frac{2}{3}x)^2 dx = \frac{2}{81}[x^3]_0^3 = \frac{2}{3}$. Par conséquent, le centre de masse est $(\bar{x}, \bar{y}) = (2, \frac{2}{3})$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

14. Supposons d'abord un grand rectangle complet, de sorte que sa masse serait $6 \cdot 3 = 18$. Son centre de masse serait $(1, \frac{3}{2})$. La masse qui a été enlevée de cet objet afin de créer celui qui est à l'étude est 3. Le centre de masse de la pièce qui a été découpée est $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$. Donc, en ce qui concerne la membrane elle-même, dont la masse est 15, $\bar{x} = \frac{18}{15}(1) - \frac{3}{15}(\frac{3}{2}) = \frac{9}{10}$ et $\bar{y} = \frac{3}{2}$ puisque la membrane est symétrique autour de la droite $y = \frac{3}{2}$. Par conséquent, le centre de masse est $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{9}{10}, \frac{3}{2})$.

15. Le centre de masse de ce cercle, (1, 0), parcourt une distance de $2\pi(1)$ lorsqu'on effectue la rotation du disque autour de l'axe des *y*. L'aire du disque est $\pi(1)^2$. Donc, selon le théorème de Pappus, $V = A(2\pi\bar{x}) = \pi(1)^2 2\pi(1) = 2\pi^2$.

16. Le demi-disque a une aire de $\frac{1}{2}\pi r^2$ et produit une sphère de rayon *r* lorsqu'on en effectue la rotation autour de l'axe des *x*. $\bar{x} = 0$ étant donné la symétrie autour de la droite $x = 0$. Finalement, selon le théorème de Pappus,

$V = A(2\pi\bar{y}) \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{2}\pi r^2(2\pi\bar{y}) \quad \Rightarrow \quad \bar{y} = \frac{4}{3\pi}r$. Par conséquent, le centre de masse est $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, \frac{4}{3\pi}r)$.

17. $x = 100 \quad \Rightarrow \quad P = 2000 - 0{,}1(100) - 0{,}01(100)^2 = 1890$

$$\begin{aligned}\text{Surplus du consommateur} &= \int_0^{100}[\,p(x) - P]dx = \int_0^{100}(2000 - 0{,}1x - 0{,}01x^2 - 189)dx \\ &= [110x - 0{,}05x^2 - \tfrac{0{,}01}{3}x^3]_0^{100} = 11\,000 - 500 - \tfrac{10\,000}{3} \approx 7166{,}67\ \$\end{aligned}$$

18. $$\begin{aligned}\int_0^{24} c(t)dt \approx S_{12} &= \frac{24-0}{12 \cdot 3}[1(0) + 4(1{,}9) + 2(3{,}3) + 4(5{,}1) + 2(7{,}6) + 4(7{,}1) + 2(5{,}8) \\ &\quad + 4(4{,}7) + 2(3{,}3) + 4(2{,}1) + 2(1{,}1) + 4(0{,}5) + 1(0)] \\ &= \tfrac{2}{3}(127{,}8) = 85{,}2\ \text{mg} \cdot \text{s/L}\end{aligned}$$

Par conséquent, $F \approx A/85{,}2 = 6/85{,}2 \approx 0{,}0704$ L/s ou 4,225 L/min.

19. $$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{20}\sin(\frac{\pi}{10}x) & \text{si } 0 \le x \le 10 \\ 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } x > 10 \end{cases}$$

a) $f(x) \ge 0$ quelque soit *x* et

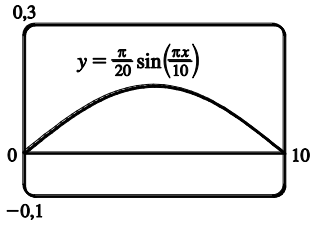
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^{10} \tfrac{\pi}{20}\sin(\tfrac{\pi}{10}x)dx = \tfrac{\pi}{20} \cdot \tfrac{10}{\pi}[-\cos(\tfrac{\pi}{10}x)]_0^{10} = \tfrac{1}{2}(-\cos\pi + \cos 0) = \tfrac{1}{2}(1+1) = 1$$

Par conséquent, *f* est une fonction de densité de probabilité.

b) $$\begin{aligned}P(X < 4) &= \int_{-\infty}^{4} f(x)dx = \int_0^4 \tfrac{\pi}{20}\sin(\tfrac{\pi}{10}x)dx = \tfrac{1}{2}[-\cos(\tfrac{\pi}{10}x)]_0^4 = \tfrac{1}{2}(-\cos\tfrac{2\pi}{5} + \cos 0) \\ &\approx \tfrac{1}{2}\,(-0{,}309\,017 + 1) \approx 0{,}3455\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}\mu &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{10} \tfrac{\pi}{20}\,x\sin(\tfrac{\pi}{10}x)dx \\ &= \int_0^{\pi} \tfrac{\pi}{20} \cdot \tfrac{10}{\pi}u(\sin u)(\tfrac{10}{\pi})du \quad [u = \tfrac{\pi}{10}x, du = \tfrac{\pi}{10}dx] \\ &= \tfrac{5}{\pi}\int_0^{\pi} u\sin u du \overset{82}{=} \tfrac{5}{\pi}[\sin u - u\cos u]_0^{\pi} = \tfrac{5}{\pi}[0 - \pi(-1)] = 5\end{aligned}$$

 © Groupe Modulo inc., 2013



On pouvait s'attendre à cette réponse puisque la courbe de f est symétrique autour de la droite $x = 5$.

20. $P(250 \le X \le 280) = \int_{250}^{280} \frac{1}{15\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x-268)^2}{2\cdot 15^2}\right) dx \approx 0{,}673$. Par conséquent, le pourcentage de grossesses qui durent entre 250 et 280 jours est d'environ 67,3 %.

21. a) La fonction de densité de probabilité est $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{1}{8}e^{-t/8} & \text{si } t \ge 0 \end{cases}$

$$P(0 \le X \le 3) = \int_0^3 \tfrac{1}{8}e^{-t/8}dt = \left[-e^{-t/8}\right]_0^3 = -e^{-3/8} + 1 \approx 0{,}3127$$

b) $P(X > 10) = \int_{10}^{\infty} \tfrac{1}{8}e^{-t/8}dt = \lim_{x\to\infty}\left[-e^{-t/8}\right]_{10}^{x} = \lim_{x\to\infty}(-e^{-x/8} + e^{-10/8}) = 0 + e^{-5/4} \approx 0{,}2865$

c) Nous devons trouver une valeur m telle que

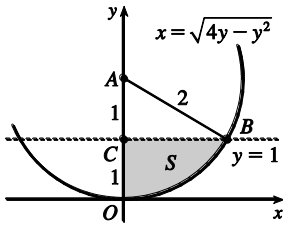
$P(X \ge m) = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \int_{m}^{\infty} \frac{1}{8}e^{-t/8}dt = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \lim_{x\to\infty}\left[-e^{-t/8}\right]_m^x = \frac{1}{2} \;\Rightarrow$

$\lim_{x\to\infty}(-e^{-x/8} + e^{-m/8}) = \frac{1}{2} \;\Rightarrow e^{-m/8} = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; -m/8 = \ln\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; m = -8\ln\frac{1}{2} = 8\ln 2 \approx 5{,}55$ minutes

Problèmes supplémentaires

1. $x^2 + y^2 \le 4y \;\Leftrightarrow\; x^2 + (y-2)^2 \le 4$, donc S fait partie d'un cercle, comme le graphique le montre. L'aire de S est

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{4y - y^2}\; dy &\overset{113}{=} \left[\tfrac{y-2}{2}\sqrt{4y-y^2} + 2\arccos\left(\tfrac{2-y}{2}\right)\right]_0^1 \qquad [a = 2] \\ &= -\tfrac{1}{2}\sqrt{3} + 2\arccos\left(\tfrac{1}{2}\right) - 2\arccos 1 \\ &= -\tfrac{\sqrt{3}}{2} + 2\left(\tfrac{\pi}{3}\right) - 2(0) = \tfrac{2\pi}{3} - \tfrac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$



Autre solution (sans utiliser le calcul différentiel et intégral) : Nous avons que $\theta = \angle CAB = \frac{\pi}{3}$; l'aire est donc

$$(\text{aire du secteur } OAB) \;-\; (\text{aire du } \Delta ABC) = \tfrac{1}{2}(2^2)\tfrac{\pi}{3} - \tfrac{1}{2}(1)\sqrt{3} = \tfrac{2\pi}{3} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

2. $y = \pm\sqrt{x^3 - x^4}$ $\Rightarrow$ La boucle de la courbe est symétrique autour de la droite $y = 0$ et, par conséquent, $\bar{y} = 0$. En tout x où $0 \le x \le 1$, la membrane a une longueur verticale de $\sqrt{x^3 - x^4} - (-\sqrt{x^3 - x^4}) = 2\sqrt{x^3 - x^4}$. Il s'ensuit que $\bar{x} = \dfrac{\int_0^1 x \cdot 2\sqrt{x^3 - x^4}\,dx}{\int_0^1 2\sqrt{x^3 - x^4}\,dx} = \dfrac{\int_0^1 x\sqrt{x^3 - x^4}\,dx}{\int_0^1 \sqrt{x^3 - x^4}\,dx}$. Évaluons les intégrales séparément :

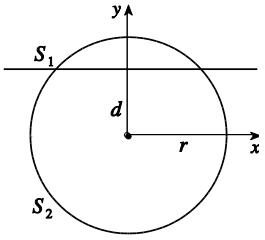
$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\sqrt{x^3 - x^4}\,dx &= \int_0^1 x^{5/2}\sqrt{1-x}\,dx \\
&= \int_0^{\pi/2} 2\sin^6\theta\cos\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}\,d\theta \quad \left[\begin{array}{c}\sin\theta = \sqrt{x},\ \cos\theta\,d\theta = dx/(2\sqrt{x}) \\ 2\sin\theta\cos\theta\,d\theta = dx\end{array}\right] \\
&= \int_0^{\pi/2} 2\sin^6\theta\cos^2\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/2} 2[\tfrac{1}{2}(1-\cos 2\theta)]^3\,\tfrac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{8}(1 - 2\cos 2\theta + 2\cos^3 2\theta - \cos^4 2\theta)\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{8}[1 - 2\cos 2\theta + 2\cos 2\theta\,(1-\sin^2 2\theta) - \tfrac{1}{4}(1+\cos 4\theta)^2\,d\theta \\
&= \tfrac{1}{8}[\theta - \tfrac{1}{3}\sin^3 2\theta]_0^{\pi/2} - \tfrac{1}{32}\int_0^{\pi/2}(1 + 2\cos 4\theta + \cos^2 4\theta)\,d\theta \\
&= \tfrac{\pi}{16} - \tfrac{1}{32}[\theta + \tfrac{1}{2}\sin 4\theta]_0^{\pi/2} - \tfrac{1}{64}\int_0^{\pi/2}(1 + \cos 8\theta)\,d\theta \\
&= \tfrac{\pi}{16} - \tfrac{1}{32}[\theta + \tfrac{1}{2}\sin 4\theta]_0^{\pi/2} - \tfrac{1}{64}\int_0^{\pi/2}(1 + \cos 8\theta)\,d\theta \\
&= \tfrac{3\pi}{64} - \tfrac{1}{64}[\theta + \tfrac{1}{8}\sin 8\theta]_0^{\pi/2} = \tfrac{5\pi}{128}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{x^3 - x^4}\,dx &= \int_0^1 x^{3/2}\sqrt{1-x}\,dx = \int_0^{\pi/2} 2\sin^4\theta\cos\theta\sqrt{1 - \sin^2\theta}\,d\theta \quad [\sin\theta = \sqrt{x}] \\
&= \int_0^{\pi/2} 2\sin^4\theta\cos^2\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/2} 2\cdot\tfrac{1}{4}(1-\cos 2\theta)^2\cdot\tfrac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{4}(1 - \cos 2\theta - \cos^2 2\theta + \cos^3 2\theta)\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{4}[1 - \cos 2\theta - \tfrac{1}{2}(1+\cos 4\theta) + \cos 2\theta(1-\sin^2 2\theta)]\,d\theta \\
&= \tfrac{1}{4}[\tfrac{\theta}{2} - \tfrac{1}{8}\sin 4\theta - \tfrac{1}{6}\sin^3 2\theta]_0^{\pi/2} = \tfrac{\pi}{16}
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\bar{x} = \dfrac{5\pi/128}{\pi/16} = \dfrac{5}{8}$ et $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\tfrac{5}{8}, 0\right)$.

3. a) Comme la figure le montre, les deux calottes sphériques, respectivement d'aire S_1 et S_2, résultent de la rotation autour de l'axe des y d'arcs circulaires. Ces arcs sont les portions supérieure et inférieure du cercle $x^2 + y^2 = r^2$, lesquelles sont produites lorsque le cercle est coupé par la droite $y = d$. La portion de l'arc supérieur située dans le premier quadrant est suffisante pour générer la calotte sphérique supérieure. Cette portion de l'arc peut être décrite par la relation $x = \sqrt{r^2 - y^2}$ pour $d \le y \le r$. Par conséquent, $dx/dy = -y/\sqrt{r^2 - y^2}$ et

 © Groupe Modulo inc., 2013



$$ds = \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = \sqrt{1+\frac{y^2}{r^2-y^2}}dy = \sqrt{\frac{r^2}{r^2-y^2}}dy = \frac{rdy}{r^2-y^2}$$

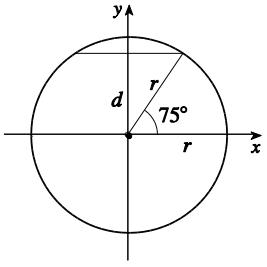
À l'aide de la formule 4.2.8, nous obtenons

$$S_1 = \int_d^r 2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = \int_d^r 2\pi\sqrt{r^2-y^2}\,\frac{rdy}{r^2-y^2} = \int_d^r 2\pi r dy = 2\pi r(r-d)$$

De façon similaire, nous pouvons calculer $S_2 = \int_{-r}^{d} 2\pi x\sqrt{1+(dx/dy)^2}\,dy = \int_{-r}^{d} 2\pi r dy = 2\pi r(r+d)$.

Il est à remarquer que $S_1 + S_2 = 4\pi r^2$, l'aire de la sphère entière.

b) $r = 6373$ km et $d = r$ (sin 75°) ≈ 6156 km; l'aire de l'océan Arctique est donc d'environ $2\pi r(r-d) \approx 2\pi(6373)(217) \approx 8{,}70\times10^6$ km^2.

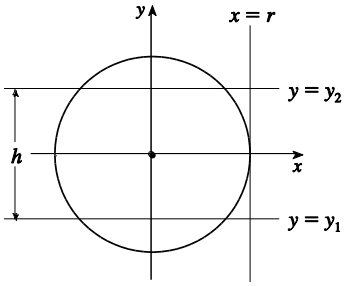


c) L'aire latérale de la zone sphérique est située entre les plans $y = y_1$ et $y = y_2$, où $y_2 - y_1 = h$. Par conséquent, nous pouvons calculer que l'aire latérale de la zone sphérique est $S = \int_{y_1}^{y_2} 2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = \int_{y_1}^{y_2} 2\pi r dy = 2\pi r(y_2-y_1) = 2\pi rh$.

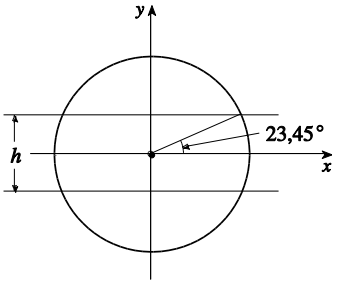
Ceci est égal à l'aire latérale d'un cylindre de rayon r et de hauteur h, puisqu'un tel cylindre est obtenu par la rotation de la droite $x = r$ autour de l'axe des y; l'aire du cylindre entre les plans $y = y_1$ et $y = y_2$ est donc

$$A = \int_{y_1}^{y_2} 2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = \int_{y_1}^{y_2} 2\pi r\sqrt{1+0^2}\,dy$$
$$= 2\pi r y\,|_{y=y_1}^{y_2} = 2\pi r(y_2-y_1) = 2\pi rh$$

 © Groupe Modulo inc., 2013



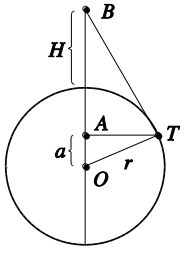
d) $h = 2r \sin 23{,}45° \approx 5072$ km; l'aire de la zone torride est donc $2\pi rh \approx 2\pi(6373)(5072) \approx 2{,}03 \times 10^8$ km^2.



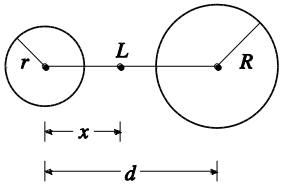
4. a) Puisque les triangles rectangles *OAT* et *OTB* sont semblables, nous obtenons $\frac{r+H}{r} = \frac{r}{a} \Rightarrow a = \frac{r^2}{r+H}$. L'aire visible du point *B* est $S = \int_a^r 2\pi x\sqrt{1 + (dx/dy)^2}\,dy$. À partir de $x^2 + y^2 = r^2$, nous obtenons

$\frac{d}{dy}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dy}(r^2) \Rightarrow 2x\frac{dx}{dy} + 2y = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x}$ et $1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2}$. Par conséquent,

$$S = \int_a^r 2\pi x \cdot \frac{r}{x}dy = 2\pi r(r-a) = 2\pi r\left(r - \frac{r^2}{r+H}\right) = 2\pi r^2\left(1 - \frac{r}{r+H}\right) = 2\pi r^2 \cdot \frac{H}{r+H} = \frac{2\pi r^2 H}{r+H}$$



b) Supposons que $R \geq r$. Si une source de lumière est placée au point *L*, à une distance *x* du centre de la sphère de rayon *r*, alors nous trouvons, à partir de la sous-question a), que l'aire de la surface éclairée totale sur les deux sphères est [avec $r + H = x$ et $r + H = d - x$]



$A(x) = \dfrac{2\pi r^2(x-r)}{x} + \dfrac{2\pi R^2(d-x-R)}{d-x}$ $[r \le x \le d-R]$. $\dfrac{A(x)}{2\pi} = r^2\left(1-\dfrac{r}{x}\right) + R^2\left(1-\dfrac{R}{d-x}\right)$,

donc $A'(x) = 0 \Leftrightarrow 0 = r^2 \cdot \dfrac{r}{x^2} + R^2 \cdot \dfrac{-R}{(d-x)^2} \Leftrightarrow \dfrac{r^3}{x^2} = \dfrac{R^3}{(d-x)^2} \Leftrightarrow \dfrac{(d-x)^2}{x^2} = \dfrac{R^3}{r^3} \Leftrightarrow$

$\left(\dfrac{dx}{x} - 1\right)^2 = \left(\dfrac{R}{r}\right)^3 \Rightarrow \dfrac{d}{x} - 1 = \left(\dfrac{R}{r}\right)^{3/2} \Leftrightarrow \dfrac{d}{x} = 1 + \left(\dfrac{R}{r}\right)^{3/2} \Leftrightarrow x = x^* = \dfrac{d}{1+(R/r)^{3/2}}$.

Or, $A'(x) = 2\pi\left(\dfrac{r^3}{x^2} - \dfrac{R^3}{(d-x)^2}\right) \Rightarrow A''(x) = 2\pi\left(-\dfrac{2r^3}{x^3} - \dfrac{2R^3}{(d-x)^3}\right)$ et $A''(x^*) < 0$; la fonction atteint donc un maximum local en $x = x^*$.

Cependant, x^* pourrait être une valeur non permise de x; nous devons montrer que x^* est situé entre r et $d - R$.

1) $x^* \ge r \Leftrightarrow \dfrac{d}{1+(R/r)^{3/2}} \ge r \Leftrightarrow d \ge r + R\sqrt{R/r}$

2) $x^* \le d - R \Leftrightarrow \dfrac{d}{1+(R/r)^{3/2}} \le d - R \Leftrightarrow d \le d - R + d\left(\dfrac{R}{r}\right)^{3/2} - R\left(\dfrac{R}{r}\right)^{3/2} \Leftrightarrow$
$R + R\left(\dfrac{R}{r}\right)^{3/2} \le d\left(\dfrac{R}{r}\right)^{3/2} \Leftrightarrow d \ge \dfrac{R}{(R/r)^{3/2}} + R = R + r\sqrt{r/R}$, mais

$R + r\sqrt{r/R} \le R + r$, et puisque $d > r + R$ [donné], nous concluons que $x^* \le d - R$.

Par conséquent, à partir de 1) et de 2), nous trouvons que x^* est une valeur non permise de x si $d < r + R\sqrt{R/r}$.

Donc, A peut atteindre un maximum en $x = r$, x^* ou $d - R$.

$$A(r) = \frac{2\pi R^2(d-r-R)}{d-r} \quad \text{et} \quad A(d-R) = \frac{2\pi r^2(d-r-R)}{d-R}$$

$A(r) > A(d-R) \Leftrightarrow \dfrac{R^2}{d-r} > \dfrac{r^2}{d-R} \Leftrightarrow R^2(d-R) > r^2(d-r) \Leftrightarrow R^2d - R^3 > r^2d - r^3 \Leftrightarrow$
$R^2d - r^2d > R^3 - r^3 \Leftrightarrow d(R-r)(R+r) > (R-r)(R^2+Rr+r^2) \Leftrightarrow d > (R^2+Rr+r^2)/(R+r) \Leftrightarrow$
$d > [(R+r)^2 - Rr]/(R+r) \Leftrightarrow d > R + r - Rr/(R+r)$. Or, $R + r - Rr/(R+r) < R + r$, et nous savons que $d > R + r$; nous concluons donc que $A(r) > A(d-R)$.

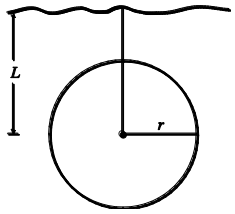
En conclusion, A atteint un maximum absolu en $x = x^*$, à la condition que $d \ge r + R\sqrt{R/r}$; autrement, A atteint son maximum en $x = r$.

5. a) Positionnons un axe des x vertical dont le sens positif est vers le bas et dont l'origine est à la surface de l'eau. Afin de calculer la pression à la profondeur z, partitionnons n sous-intervalles l'intervalle $[0, z]$ à l'aide de nombres x_i et choisissons $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ pour chaque indice i. La couche mince d'eau qui est située entre la profondeur x_{i-1} et la profondeur x_i a une densité d'environ $\rho(x_i^*)$, donc le poids d'une partie de cette couche, avec une aire en coupe transversale d'une unité, est $\rho(x_i^*)g\Delta x$. Le poids total d'une colonne d'eau allant de la surface jusqu'à la profondeur z (avec une aire en coupe transversale d'une unité) serait

 © Groupe Modulo inc., 2013

d'environ $\sum_{i=1}^{n} \rho(x_i^*)g\Delta x$. Nous pouvons transformer cette approximation en un nombre exact en calculant la lorsque $n \to \infty$; le poids (ou la force) par unité d'aire à la profondeur z est $P = \lim_{n\to\infty} \rho(x_i^*)g\Delta x$. En d'autres termes, $P(z) = \int_0^z \rho(x)g\,dx$. De façon plus générale, si nous ne formulons aucune hypothèse au sujet de la localisation de l'origine, alors $P(z) = P_0 + \int_0^z \rho(x)g\,dx$, où P_0 est la pression en $x = 0$. En prenant la dérivée, nous obtenons $dP/dz = \rho(z)g$.

b)

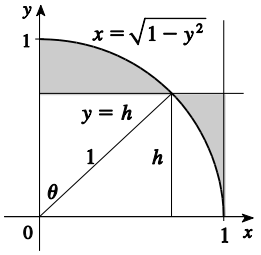


$$\begin{aligned}
F &= \int_{-r}^{r} P(L+x)\cdot 2\sqrt{r^2-x^2}\,dx \\
&= \int_{-r}^{r} (P_0 + \int_0^{L+x} \rho_0 e^{z/H} + g\,dz)\cdot 2\sqrt{r^2-x^2}\,dx \\
&= P_0\int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2-x^2}\,dx + \rho_0 gH\int_{-r}^{r}\left(e^{(L+x)/H}-1\right)\cdot 2\sqrt{r^2-x^2}\,dx \\
&= (P_0-\rho_0 gH)\int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2-x^2}\,dx + \rho_0 gH\int_{-r}^{r} e^{(L+x)/H}\cdot 2\sqrt{r^2-x^2}\,dx \\
&= (P_0-\rho_0 gH)(\pi r^2) + \rho_0 gHe^{L/H}\int_{-r}^{r} e^{x/H}\cdot 2\sqrt{r^2-x^2}\,dx
\end{aligned}$$

6. Le problème peut se réduire à trouver la droite qui fait que l'aire ombrée dans le graphique soit minimale. Une équation du cercle dans le premier quadrant est $x = \sqrt{1-y^2}$. L'aire ombrée est donc

$$\begin{aligned}
A(h) &= \int_0^h \left(1 - \sqrt{1-y^2}\right)dy + \int_h^1 \sqrt{1-y^2}\,dy \\
&= \int_0^h \left(1 - \sqrt{1-y^2}\right)dy - \int_1^h \sqrt{1-y^2}\,dy \\
A'(h) &= 1 - \sqrt{1-h^2} - \sqrt{1-h^2} \quad \text{[selon le TFC]} = 1 - 2\sqrt{1-h^2}
\end{aligned}$$

$A' = 0 \iff \sqrt{1-h^2} = \frac{1}{2} \implies 1-h^2 = \frac{1}{4} \implies h^2 = \frac{3}{4} \implies h = \frac{\sqrt{3}}{2}$

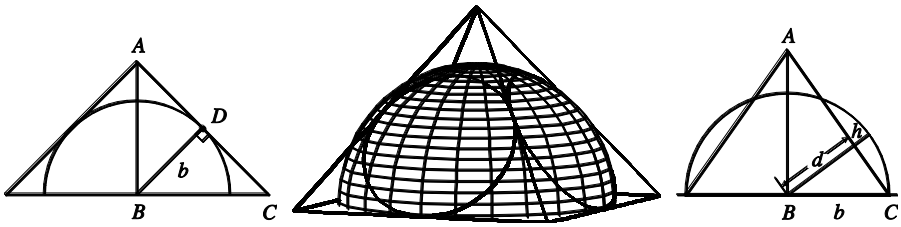


$A''(h) = -2\cdot\frac{1}{2}(1-h^2)^{-1/2}(-2h) = \dfrac{2h}{\sqrt{1-h^2}} > 0$, donc $h = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ produit une valeur minimale de A.

 © Groupe Modulo inc., 2013

Remarque : Une autre stratégie consiste à utiliser l'angle θ comme variable (se référer au graphique ci-dessus) et à montrer que $A = \theta + \cos\theta - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\sin 2\theta$ atteint sa valeur minimale lorsque $\theta = \frac{\pi}{6}$.

7. Utilisons des triangles semblables pour calculer la hauteur de la pyramide. La première figure montre une coupe transversale de la pyramide qui passe par le sommet et de deux coins opposés de la base carrée. Or, $|BD| = b$, puisque c'est un rayon de la sphère, qui a un diamètre de $2b$ puisqu'elle est tangente aux côtés opposés de la base carrée. De plus, $|AD| = b$ puisque le ΔADB est isocèle. La hauteur est donc $|AB| = \sqrt{b^2 + b^2} = \sqrt{2}b$.



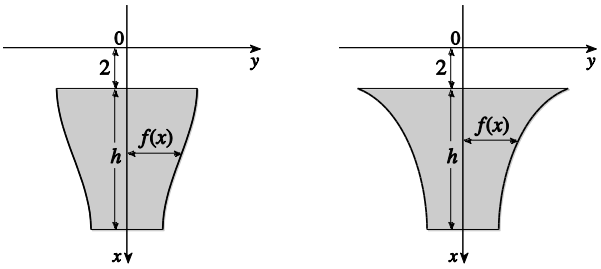
Nous observons tout d'abord que le volume commun est égal à la moitié du volume de la sphère, moins la somme des quatre volumes égaux (calottes sphériques) coupés par les faces triangulaires de la pyramide. Se référer à l'exercice 2.2.49 pour une démonstration de la formule utilisée pour calculer le volume d'une calotte sphérique. Afin d'employer cette formule, nous devons trouver la distance perpendiculaire h entre chaque face triangulaire et la surface de la sphère. Nous trouvons tout d'abord la distance d entre le centre de la sphère et une des faces triangulaires. La troisième figure montre une coupe transversale de la pyramide qui passe par le sommet et les milieux de côtés opposés de la base carrée. Au moyen des propriétés des triangles semblables, nous trouvons que

$$\frac{d}{b} = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{\sqrt{2}b}{\sqrt{b^2 + (\sqrt{2}b)^2}} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{\sqrt{2}b^2}{\sqrt{3b^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}b$$

Donc, $h = b - d = b - \frac{\sqrt{6}}{3}b = \frac{3-\sqrt{6}}{3}b$. Par conséquent, à l'aide de la formule $V = \pi h^2(r - h/3)$ de l'exercice 2.2.49 avec $r = b$, nous trouvons que le volume de chacune des calottes est $\pi\left(\frac{3-\sqrt{6}}{3}b\right)^2\left(b - \frac{3-\sqrt{6}}{3\cdot 3}\right)b = \frac{15-6\sqrt{6}}{9}\cdot\frac{6+\sqrt{6}}{9}\pi b^3 = (\frac{2}{3} - \frac{7}{27}\sqrt{6})\pi b^3$. Il s'ensuit que, selon notre première observation, le volume commun est $V = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi b^3\right) - 4\left(\frac{2}{3} - \frac{7}{27}\sqrt{6}\right)\pi b^3 = \left(\frac{28}{27}\sqrt{6} - 2\right)\pi b^3$.

8. Positionnons l'axe des x positif comme dans la figure.

Supposons que la plaque est de hauteur h et est symétrique par rapport à l'axe des x. Considérons qu'à la profondeur x sous la surface de l'eau ($2 \le x \le 2 + h$), la largeur de la plaque est $2f(x)$. Or, chacune des n bandes horizontales est de hauteur h/n et la $i^{\text{ème}}$ bande ($1 \le i \le n$) va de $x = 2 + \left(\frac{i-1}{n}\right)h$ à $x = 2 + \left(\frac{i}{n}\right)h$. La force hydrostatique qui s'exerce sur la $i^{\text{ème}}$ bande est $F(i) = \int_{2+[(i-1)/n]h}^{2+(i/n)h} 1000(9{,}8)x[2f(x)]dx$



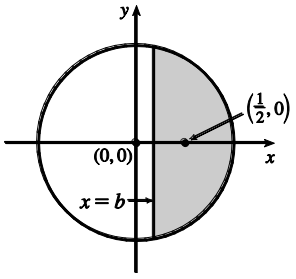
Si nous posons maintenant $x[2f(x)] = k$ (une constante), de sorte que $f(x) = k/(2x)$, alors

$$F(i) = \int_{2+[(i-1)/n]h}^{2+(i/n)h} 1000(9{,}8)k\,dx = 1000(9{,}8)k[x]_{2+[(i-1)/n]h}^{2+(i/n)h} = 1000(9{,}8)k\left[\left(2+\frac{i}{n}h\right)-\left(2+\frac{i-1}{n}\right)\right]h = 1000(9{,}8)k\left(\frac{h}{n}\right)$$

La force hydrostatique qui s'exerce sur la $i^{\text{ème}}$ bande est donc indépendante de i, c'est-à-dire que la force qui s'exerce sur chaque bande est identique. On peut donc donner à la plaque la forme qui apparaît à la figure. (En fait, la condition requise est satisfaite chaque fois que la plaque est de largeur C/x à une profondeur x, pour une certaine constante C. Plusieurs formes sont possibles.)

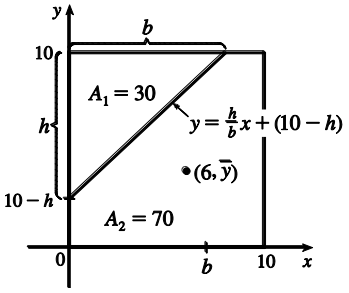
9. Nous pouvons supposer que la ligne de coupe est tracée le long de la droite verticale $x = b > 0$, que la ligne de délimitation du disque est le cercle $x^2 + y^2 = 1$ et que le centre de masse de la plus petite pièce (à la droite de $x = b$) est $(\frac{1}{2}, 0)$. Nous désirons calculer b à deux décimales près. Nous avons $\frac{1}{2} = \bar{x} = \dfrac{\int_b^1 x \cdot 2\sqrt{1-x^2}\,dx}{\int_b^1 2\sqrt{1-x^2}\,dx}$. En évaluant le numérateur, nous obtenons $-\int_b^1 (1-x^2)^{1/2}(-2x)dx = -\frac{2}{3}\left[(1-x^2)^{3/2}\right]_b^1 = -\frac{2}{3}\left[0-(1-b^2)^{3/2}\right] = \frac{2}{3}(1-b^2)^{3/2}$.

À l'aire de la formule 30 dans la table d'intégrales, nous trouvons que le dénominateur est $[x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x]_b^1 = (0+\frac{\pi}{2}) - (b\sqrt{1-b^2} + \arcsin b)$. Par conséquent, nous obtenons $\frac{1}{2} = \bar{x} = \dfrac{\frac{2}{3}(1-b^2)^{3/2}}{\frac{\pi}{2} - b\sqrt{1-b^2} - \arcsin b}$ ou, de façon équivalente, $\frac{2}{3}(1-b^2)^{3/2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}b\sqrt{1-b^2} - \frac{1}{2}\arcsin b$. En utilisant une calculatrice ou un logiciel de calcul symbolique pour résoudre cette équation, nous obtenons $b \approx 0{,}138\,173$ ou $b = 0{,}14$ m à deux décimales près.



10. $A_1 = 30 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}bh = 30 \;\Rightarrow\; bh = 60.$

 © Groupe Modulo inc., 2013



$\bar{x} = 6 \;\Rightarrow\; \frac{1}{A_2}\int_0^{10} xf(x)dx = 6 \;\Rightarrow$

$\int_0^b x\left(\frac{h}{b}x + 10 - h\right)dx + \int_b^{10} x(10)dx = 6(70) \;\Rightarrow$

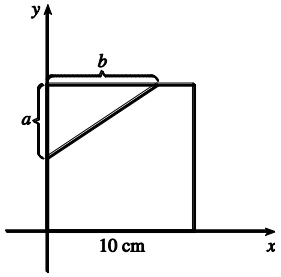
$\int_0^b \left(\frac{h}{b}x^2 + 10x - hx\right)dx + 10 \cdot \frac{1}{2}\left[x^2\right]_b^{10} = 420 \;\Rightarrow$

$\left[\frac{h}{3b}x^3 + 5x^2 - \frac{h}{2}x^2\right]_0^b + 5(100 - b^2) = 420 \;\Rightarrow \frac{1}{3}hb^2 + 5b^2 - \frac{1}{2}hb^2 + 500 - 5b^2 = 420 \;\Rightarrow\; 80 = \frac{1}{6}hb^2 \;\Rightarrow$

$480 = (hb)b \;\Rightarrow\; 480 = 60b \;\Rightarrow\; b = 8$. Donc, $h = \frac{60}{8} = \frac{15}{2}$ et une équation de la droite est $y = \frac{15/2}{8}x + \left(10 - \frac{15}{2}\right) = \frac{15}{16}x + \frac{5}{2}$. Or,

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{1}{A_2}\int_0^{10} \tfrac{1}{2}[f(x)]^2 dx = \frac{1}{70 \cdot 2}\left[\int_0^8 \left(\frac{15}{16}x + \frac{5}{2}\right)^2 dx + \int_8^{10} (10)^2 dx\right] \\ &= \tfrac{1}{140}\left[\int_0^8 (\tfrac{225}{256}x^2 + \tfrac{75}{16}x + \tfrac{25}{4})dx + 100(10 - 8)\right] = \tfrac{1}{140}([\tfrac{225}{768}x^3 + \tfrac{75}{32}x^2 + \tfrac{25}{4}]_0^8 + 200) \\ &= \tfrac{1}{140}(150 + 150 + 50 + 200) = \tfrac{550}{140} = \tfrac{55}{14}\end{aligned}$$

Autre solution : Supposons que les cathètes du triangle rectangle obtenu en coupant un coin du carré sont de longueur a cm et b cm, comme le montre le graphique. Le triangle a une aire de 30 cm^2, donc $\frac{1}{2}ab = 30$ et $ab = 60$. Plaçons le carré dans le premier quadrant du plan xy comme le montre le graphique, et posons que T, R et S représentent le triangle, la portion restante du carré et le carré entier, respectivement. Par symétrie, le centre de masse de S est (5, 5). Selon l'exercice 4.3.39, le centre de masse de T est $\left(\frac{b}{3}, 10 - \frac{a}{3}\right)$.



Le problème spécifie que le centre de masse de R est (6 c); la valeur de c est à déterminer. Posons que la densité du carré est 1, afin que nous puissions utiliser les aires comme des masses. Alors, la masse de T est $m_T = 30$, la masse de S est $m_s = 100$ et la masse de R est $m_R = m_S - m_T = 70$. Comme aux exercices 40 et 41 de la section 4.3, considérons que S consiste en une masse m_T au centre

 © Groupe Modulo inc., 2013

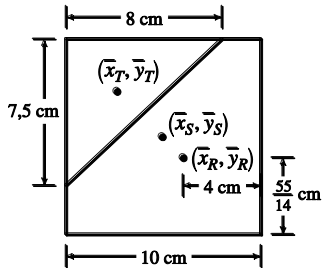
de masse $(\bar{x}_T, \bar{y}_T)$ de T et en une masse R au centre de masse $(\bar{x}_T, \bar{y}_T)$ de R. Alors, $\bar{x}_S = \dfrac{m_T\bar{x}_T + m_R\bar{x}_R}{m_T + m_R}$ et $\bar{y}_S = \dfrac{m_T\bar{y}_T + m_R\bar{y}_R}{m_T + m_R}$;

c'est-à-dire que $5 = \dfrac{30(b/3) + 70(6)}{100}$ et $5 = \dfrac{30(10 - a/3) + 70c}{100}$.

En calculant la valeur de b dans la première équation, nous trouvons $b = 8$ cm. Puisque $ab = 60$ cm^2, il s'ensuit que $a = \frac{60}{8} = 7{,}5$ cm .

La seconde équation devient $70c = 200 + 10a$, donc $7c = 20 + a = \frac{55}{2}$ et $c = \frac{55}{14} = 3{,}9\overline{28\,571\,4}$ cm.

La solution apparaît à la figure.



11. Si $h = L$, alors $P = \dfrac{\text{aire sous } y = L\sin\theta}{\text{aire du rectangle}} = \dfrac{\int_0^\pi L\sin\theta\, d\theta}{\pi L} = \dfrac{[-\cos\theta]_0^\pi}{\pi} = \dfrac{(-1)+1}{\pi} = \dfrac{2}{\pi}$.

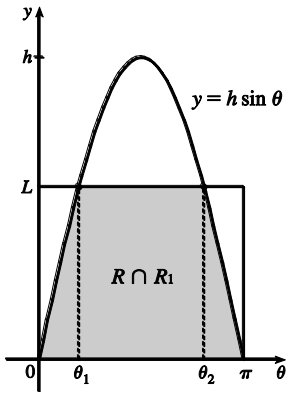
Si $h = L/2$, alors $P = \dfrac{\text{aire sous } y = \frac{1}{2}L\sin\theta}{\text{aire du rectangle}} = \dfrac{\int_0^\pi \frac{1}{2}L\sin\theta\, d\theta}{\pi L} = \dfrac{[-\cos\theta]}{2\pi} = \dfrac{2}{2\pi} = \dfrac{1}{\pi}$.

12. a) L'ensemble de toutes les positions possibles de l'aiguille est représentée par la région rectangulaire $\mathsf{R} = \{(\theta, y) \mid 0 \le y < L,\ 0 \le \theta < \pi\}$. Même lorsque $h > L$, l'aiguille coupe au moins une droite si et seulement si $y \le h\sin\theta$. Soit $\mathsf{R}_1 = \{(\theta, y) \mid 0 \le y \le h\sin\theta,\ 0 \le \theta < \pi\}$. Lorsque $h \le L$, R_1 est contenu dans R, mais cela n'est plus vrai lorsque $h > L$. Par conséquent, la probabilité que l'aiguille coupe une droite devient

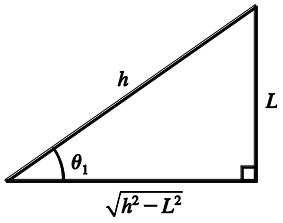
$$P = \frac{\text{aire}(\mathsf{R} \cap \mathsf{R}_1)}{\text{aire}(\mathsf{R})} = \frac{\text{aire}(\mathsf{R} \cap \mathsf{R}_1)}{\pi L}$$

Lorsque $h > L$, la courbe $y = h\sin\theta$ croise la droite $y = L$ deux fois [en $(\arcsin(L/h); L)$ et en $(\pi - \arcsin(L/h); L)$]. Soit $\theta_0 = \arcsin(L/h)$ et $\theta_2 = \pi - \theta_1$. Alors,

 © Groupe Modulo inc., 2013



$$\begin{aligned}\text{aire}(\mathsf{R}\cap\mathsf{R}_1) &= \int_0^{\theta_1} h\sin\theta d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_2} L d\theta + \int_{\theta_2}^{\pi} h\sin\theta d\theta \\ &= 2\int_0^{\theta_1} h\sin\theta d\theta + L(\theta_2-\theta_1) = 2h[-\cos\theta]_0^{\theta_1} + L(\pi-2\theta_1) \\ &= 2h(1-\cos\theta_1) + L(\pi-2\theta_1) \\ &= 2h\left(1-\frac{\sqrt{h^2-L^2}}{h}\right) + L\left[\pi - 2\arcsin\left(\frac{L}{h}\right)\right] \\ &= 2h - 2\sqrt{h^2-L^2} + \pi L - 2L\arcsin\left(\frac{L}{h}\right)\end{aligned}$$



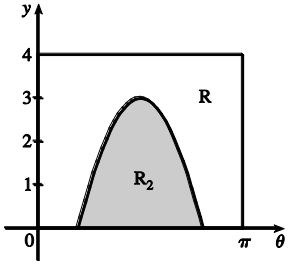
Le problème spécifie que $L = 4$ et $h = 7$, donc l'aire $(\mathsf{R}\cap\mathsf{R}_1) = 14 - 2\sqrt{33} + 4\pi - 8\arcsin(\frac{4}{7}) \approx 10,211\,28$ et

$P = \frac{1}{4\pi}$ aire $(\mathsf{R}\cap\mathsf{R}_1) \approx 0,812\,588$. (Par comparaison, $P = \frac{2}{\pi} \approx 0,636\,620$ lorsque $h = L$, comme il a été montré à la solution du problème 11.)

b) L'aiguille coupe au moins deux droites lorsque $y + L \le h \sin\theta$, c'est-à-dire lorsque $y \le h \sin\theta - L$.

Soit $\mathsf{R}_2 = \{(\theta, y) \mid 0 \le y \le h \sin\theta - L,\ 0 \le \theta < \pi\}$. Alors, la probabilité que l'aiguille coupe au moins deux droites est

$$P_2 = \frac{\text{aire}(\mathsf{R}\cap\mathsf{R}_2)}{\text{aire}(\mathsf{R})} = \frac{\text{aire}(\mathsf{R}\cap\mathsf{R}_2)}{\pi L}$$



Lorsque $L = 4$ et $h = 7$, R_2 est contenue dans R (se référer à la figure). Par conséquent,

$$P_2 = \frac{1}{4\pi}\text{aire}(\mathsf{R}_2) = \frac{1}{4\pi}\int_{\arcsin(4/7)}^{\pi-\arcsin(4/7)} (7\sin\theta - 4)\, d\theta = \tfrac{1}{4\pi}\cdot 2\int_{\arcsin(4/7)}^{\pi/2} (7\sin\theta - 4)d\theta$$
$$= \frac{1}{2\pi}[-7\cos\theta - 4\theta]_{\arcsin(4/7)}^{\pi/2} = \frac{1}{2\pi}\left[0 - 2\pi + 7\frac{\sqrt{33}}{7} + 4\arcsin\left(\tfrac{4}{7}\right)\right] = \frac{\sqrt{33} + 4\arcsin(\frac{4}{7}) - 2\pi}{2\pi}$$
$$\approx 0{,}301\,497$$

c) L'aiguille coupe au moins trois droites lorsque $y + 2L \le h \sin\theta$, c'est-à-dire lorsque $y \le h\sin\theta - 2L$.

Soit $\mathrm{R}_3 = \{(\theta, y) \mid 0 \le y \le h\sin\theta - 2L,\ 0 \le \theta < \pi\}$. Alors, la probabilité que l'aiguille coupe au moins trois droites est

$P_3 = \dfrac{\text{aire}(\mathsf{R} \cap \mathsf{R}_3)}{\text{aire}(\mathsf{R})} = \dfrac{\text{aire}(\mathsf{R} \cap \mathsf{R}_3)}{\pi L}$. (À ce point, la généralisation à P_n, n étant tout entier positif, devrait être claire.) Selon l'hypothèse donnée,

$$P_3 = \frac{1}{\pi L}aire(\mathsf{R}_3) = \frac{1}{\pi L}\int_{\arcsin(2L/h)}^{\pi-\arcsin(2L/h)} (h\sin\theta - 2L)d\theta = \frac{2}{\pi L}\int_{\arcsin(2L/h)}^{\pi/2} (h\sin\theta - 2L)d\theta$$
$$= \frac{2}{\pi L}[-h\cos\theta - 2L\theta]_{\arcsin(2L/h)}^{\pi/2} = \frac{2}{\pi L}[-\pi L + \sqrt{h^2 - 4L^2} + 2L\arcsin(2L/h)]$$

Il est à remarquer que la probabilité que l'aiguille coupe exactement une droite est $P_1 - P_2$, la probabilité qu'elle touche exactement deux droites est $P_2 - P_3$, et ainsi de suite.

13. Résolvons pour $y: x^2 + (x + y + 1)^2 = 1 \ \Rightarrow\ (x + y + 1)^2 = 1 - x^2 \ \Rightarrow\ x + y + 1 = \pm\sqrt{1 - x^2} \ \Rightarrow$

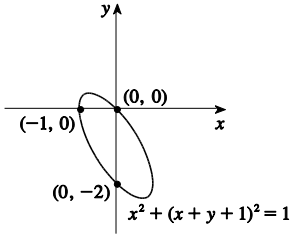
$y = -x - 1 \pm \sqrt{1 - x^2}$.

$$A = \int_{-1}^{1}\left[\left(-x - 1 + \sqrt{1 - x^2}\right)\left(-x - 1 - \sqrt{1 - x^2}\right)\right]dx$$
$$= \int_{-1}^{1} 2\sqrt{1 - x^2}\,dx = 2(\tfrac{\pi}{2}) \quad [\text{aire d'un demi-cercle}] = \pi$$

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_{-1}^{1} x \cdot 2\sqrt{1 - x^2}\,dx = 0 \quad [\text{intégrande impaire}]$$

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\left[\left(-x - 1 + \sqrt{1 - x^2}\right)^2 - \left(-x - 1 - \sqrt{1 - x^2}\right)^2\right]dx = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\left(-4x\sqrt{1 - x^2} - 4\sqrt{1 - x^2}\right)dx$$
$$= -\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(x\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - x^2}\right)dx = -\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} x\sqrt{1 - x^2}\,dx - \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1 - x^2}\,dx$$
$$= -\frac{2}{\pi}(0) \quad [\text{intégrande impaire}] - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right)[\text{aire d'un demi-cercle}] = -1$$

Par conséquent, comme on s'y attendait, le centre de masse est $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, -1)$. Nous pouvions nous attendre à ce résultat puisque le centre de masse d'une ellipse est situé à son centre.



 © Groupe Modulo inc., 2013

5. LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

5.1 La modélisation avec des équations différentielles

1. $y = \frac{2}{3}e^{x} + e^{-2x} \Rightarrow y' = \frac{2}{3}e^{x} - 2e^{-2x}$. Afin de démontrer que y est une solution de l'équation différentielle, remplaçons y et y' par leurs expressions respectives dans le membre gauche de l'équation, puis montrons que le membre de gauche est égal au membre de droite.

$$\begin{aligned}\text{Membre de gauche} = y' + 2y &= \tfrac{2}{3}e^{x} - 2e^{-2x} + 2(\tfrac{2}{3}e^{x} + e^{-2x}) = \tfrac{2}{3}e^{x} - 2e^{-2x} + \tfrac{4}{3}e^{x} + 2e^{-2x} \\ &= \tfrac{6}{3}e^{x} = 2e^{x} = \text{Membre de droite}\end{aligned}$$

2. $y = -t\cos t - t \Rightarrow dy/dt = -t(-\sin t) + \cos t(-1) - 1 = t\sin t - \cos t - 1$.

$$\begin{aligned}\text{Membre de gauche} = t\frac{dy}{dt} &= t(t\sin t - \cos t - 1) = t^2\sin t - \cos t - t \\ &= t^2\sin t + y = \text{Membre de droite,}\end{aligned}$$

y est donc une solution de l'équation différentielle. De plus, $y(\pi) = -\pi\cos\pi - \pi(-1) - \pi = \pi - \pi = 0$ et la condition initiale est donc satisfaite.

3. a) $y = e^{rx} \Rightarrow y' = re^{rx} \Rightarrow y'' = r^2e^{rx}$. En remplaçant les variables originales par leurs expressions respectives dans l'équation différentielle $2y'' + y' - y = 0$, nous obtenons $2r^2e^{rx} + re^{rx} - e^{rx} = 0 \Rightarrow (2r^2 + r - 1)e^{rx} = 0 \Rightarrow$

$(2r-1)(r+1) = 0$ [puisque e^{rx} ne s'annulle jamais] $\Rightarrow r = \frac{1}{2}$ ou -1.

b) Soit $r_1 = \frac{1}{2}$ et $r_2 = -1$. Il faut donc démontrer que chaque membre de la famille de fonctions $y = ae^{x/2} + be^{-x}$ est une solution de l'équation différentielle $2y'' + y' - y = 0$. $y = ae^{x/2} + be^{-x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2}ae^{x/2} - be^{-x} \Rightarrow y'' = \frac{1}{4}ae^{x/2} + be^{-x}$.

$$\begin{aligned}\text{Membre de gauche} = 2y'' + y' - y &= 2(\tfrac{1}{4}ae^{x/2} + be^{-x}) + (\tfrac{1}{2}ae^{x/2} - be^{-x}) - (ae^{x/2} + be^{-x}) \\ &= \tfrac{1}{2}ae^{x/2} - 2be^{-x} + \tfrac{1}{2}ae^{x/2} - be^{-x} - ae^{x/2} - be^{-x} \\ &= (\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}a - a)e^{x/2} + (2b - b - b)e^{-x} \\ &= 0 = \text{Membre de droite}\end{aligned}$$

4. a) $y = \cos kt \Rightarrow y' = -k\sin kt \Rightarrow y'' = -k^2\cos kt$. En remplaçant les variables originales par leurs expressions respectives dans l'équation différentielle $4y'' = -25y$, nous obtenons

$4(-k^2\cos kt) = -25(\cos kt) \Rightarrow (25 - 4k^2)\cos kt = 0$ [quelque soit t] $\Rightarrow 25 - 4k^2 = 0 \Rightarrow k^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow k = \pm\frac{5}{2}$.

b) $y = A\sin kt + B\cos kt \Rightarrow y' = Ak\cos kt - Bk\sin kt \Rightarrow y'' = -Ak^2\sin kt - Bk^2\cos kt$.

L'équation différentielle donnée $4y'' = -25y$ est équivalente à $4y'' + 25y = 0$. Par conséquent,

 © Groupe Modulo inc., 2013

$$\begin{aligned}\text{Membre de gauche} = 4y'' + 25y &= 4(-Ak^2 \sin kt - Bk^2 \cos kt) + 25(A \sin kt + B \cos kt) \\ &= -4Ak^2 \sin kt - 4Bk^2 \cos kt + 25A \sin kt + 25B \cos kt \\ &= (25 - 4k^2)A \sin kt + (25 - 4k^2)B \cos kt \\ &= 0 \quad \text{puisque } k^2 = \tfrac{25}{4}.\end{aligned}$$

5. a) $y = \sin x \;\Rightarrow\; y' = \cos x \;\Rightarrow\; y'' = -\sin x$.

Membre de gauche = $y'' + y = -\sin x + \sin x = 0 \neq \sin x$, donc $y = \sin x$ **n'est pas** une solution de l'équation différentielle.

b) $y = \cos x \;\Rightarrow\; y' = -\sin x \;\Rightarrow\; y'' = -\cos x$.

Membre de gauche = $y'' + y = -\cos x + \cos x = 0 \neq \sin x$, donc $y = \cos x$ **n'est pas** une solution de l'équation différentielle.

c) $y = \frac{1}{2}x \sin x \;\Rightarrow\; y' = \frac{1}{2}(x \cos x + \sin x) \;\Rightarrow\; y'' = \frac{1}{2}(-x \sin x + \cos x + \cos x)$.

Membre de gauche $= y'' + y = \frac{1}{2}(-x \sin x + 2 \cos x) + \frac{1}{2}x \sin x = \cos x \neq \sin x$, donc $y = \frac{1}{2}x \sin x$ **n'est pas** une solution de l'équation différentielle

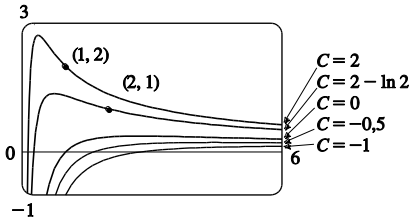
d) $y = \frac{1}{2}x \cos x \;\Rightarrow\; y' = -\frac{1}{2}(-x \sin x + \cos x) \;\Rightarrow\; y'' = -\frac{1}{2}(-x \cos x - \sin x - \sin x)$.

Membre de gauche $= y'' + y = -\frac{1}{2}(-x \cos x - 2 \sin x) + (-\frac{1}{2}x \cos x) = \sin x = $ Membre de droite, donc $y = -\frac{1}{2}x \cos x$ **est** une solution de l'équation différentielle.

6. a) $y = \dfrac{\ln x + C}{x} \Rightarrow y' = \dfrac{x \cdot (1/x) - (\ln x + C)}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x - C}{x^2}$.

$$\begin{aligned}\text{Membre de gauche} = x^2 y' + xy &= x^2 \cdot \frac{1 - \ln x - C}{x^2} + x \cdot \frac{\ln x + C}{x} \\ &= 1 - \ln x - C + \ln x + C = 1 = \text{Membre de droite,}\end{aligned}$$ donc y est une solution de l'équation différentielle.

b)



Quelques remarques au sujet de la courbe de $y = (\ln x + C)/x$:

1) Il existe une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

2) Il existe une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

3) $y = 0 \;\Rightarrow\; \ln x + C = 0 \;\Rightarrow\; x = e^{-C}$; il existe donc un point d'intersection avec l'axe des x en e^{-C}.

4) $y' = 0 \;\Rightarrow\; \ln x = 1 - C \;\Rightarrow\; x = e^{1-C}$; il existe donc un maximum local en $x = e^{1-C}$.

c) $y(1) = 2 \;\Rightarrow\; 2 = \dfrac{\ln 1 + C}{1} \;\Rightarrow\; 2 = C$, et la solution est donc $y = \dfrac{\ln x + 2}{x}$ [tel qu'il a été démontré à la sous-question b)].

 © Groupe Modulo inc., 2013

d) $y(2)=1 \;\Rightarrow\; 1=\dfrac{\ln 2+C}{2} \;\Rightarrow\; 2+\ln 2+C \;\Rightarrow\; C=2-\ln 2$, et la solution est donc $y=\dfrac{\ln x+2-\ln 2}{x}$ [tel qu'il a été démontré à la sous-question b)].

7. a) Comme la dérivée $y'=-y^2$ est toujours négative (ou nulle si $y=0$), la fonction y doit être décroissante (ou égale à 0) sur tout intervalle sur lequel elle est définie.

b) $y=\dfrac{1}{x+C} \;\Rightarrow\; y'=-\dfrac{1}{(x+C)^2}$. Membre de gauche $=y'=-\dfrac{1}{(x+C)^2}=-\left(\dfrac{1}{x+C}\right)^2=-y^2=$ Membre de droite

c) $y=0$ est une solution de $y'=-y^2$ qui n'est pas un membre de la famille décrite à la sous-question b).

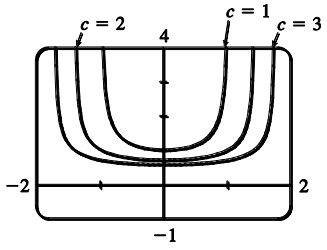
d) Si $y(x)=\dfrac{1}{x+C}$, alors $y(0)=\dfrac{1}{0+C}=\dfrac{1}{C}$. Puisque $y(0)=0{,}5$, $\dfrac{1}{C}=\dfrac{1}{2} \;\Rightarrow\; C=2$, donc $y=\dfrac{1}{x+2}$.

8. a) Si x est voisin de 0, alors xy^3 est voisin de 0 et, par conséquent, y' est voisin de 0. Il doit donc y avoir une droite tangente à la courbe de y en $x=0$ qui est presque horizontale. Si x prend de grandes valeurs, alors xy^3 prend de grandes valeurs et il doit donc y avoir une droite tangente à la courbe de y qui est presque verticale. (Dans les deux cas, nous supposons des valeurs raisonnables pour y.)

b) $y=(c-x^2)^{-1/2} \;\Rightarrow\; y'=x(c-x^2)^{-3/2}$.

Membre de droite $=xy^3-x[(c-x^2)^{-1/2}]^3=x(c-x^2)^{-3/2}=y'=$ Membre de gauche

c)



Lorsque x est voisin de 0, y' est également voisin de 0. À mesure que la valeur de x devient plus grande, celle de $|y'|$ fait de même.

d) $y(0)=(c-0)^{-1/2}=1/\sqrt{c}$ et $y(0)=2 \;\Rightarrow\; \sqrt{c}=\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; c=\frac{1}{4}$, donc $y=(\frac{1}{4}-x^2)^{-1/2}$.

9. a) $\dfrac{dP}{dt}=1{,}2P\left(1-\dfrac{P}{4200}\right)$. Or, $\dfrac{dP}{dt}>0 \;\Rightarrow\; 1-\dfrac{P}{4200}>0$ [en supposant que $P>0$] $\Rightarrow\; \dfrac{P}{4200}<1 \;\Rightarrow\; P<4200 \;\Rightarrow\;$ la population est croissante pour $0<P<4200$.

b) $\dfrac{dP}{dt}<0 \;\Rightarrow\; P>4200$

c) $\dfrac{dP}{dt}=0 \;\Rightarrow\; P=4200$ ou $P=0$

 © Groupe Modulo inc., 2013

10. a) $y = k \Rightarrow y' = 0$, donc $\frac{dy}{dt} = y^4 - 6y^3 + 5y^2 \Leftrightarrow 0 = k^4 - 6k^3 + 5k^2 \Leftrightarrow k^2(k^2 - 6k + 5) = 0 \Leftrightarrow$

$k^2(k-1)(k-5) = 0 \Leftrightarrow k = 0, 1 \text{ ou } 5$

b) y est croissante $\Leftrightarrow \frac{dy}{dt} > 0 \Leftrightarrow y^2(y-1)(y-5) > 0 \Leftrightarrow y \in]-\infty, 0[\cup]0, 1[\cup]5, \infty[$

c) y est décroissante $\Leftrightarrow \frac{dy}{dt} < 0 \Leftrightarrow y \in]1, 5[$

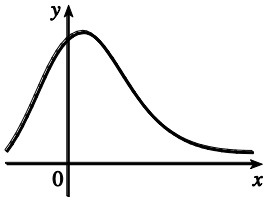
11. a) Cette fonction est à la fois croissante et décroissante. Cependant, $dy/dt = e^t (y - 1)^2 \geq 0$ quelque soit t, ce qui signifie que la courbe de la solution de l'équation différentielle ne peut être décroissante sur aucun intervalle.

b) Lorsque $y = 1$, $dy/dt = 0$; il n'y a cependant pas de droite horizontale tangente à la courbe.

12. Le graphique pour cet exercice apparaît dans la figure ci-contre.

A. $y' = 1 + xy > 1$ pour les points situés dans le premier quadrant, mais nous pouvons observer que $y' < 0$ pour plusieurs points dans le premier quadrant.

B. $y' = -2xy = 0$ lorsque $x = 0$, mais nous pouvons observer que $y' > 0$ pour $x = 0$. Par élimination, les équations A et B ne peuvent être associées à cette courbe et seule l'équation C peut l'être.



C. $y' = 1 - 2xy$ semble acceptable puisque :

1) Lorsque $x = 0$, y' pourrait être 1.

2) Lorsque $x < 0$, y' pourrait être supérieur à 1.

3) En isolant y dans l'équation $y' = 1 - 2xy$, nous obtenons $y = \frac{1 - y'}{2x}$. Si y' prend de petites valeurs négatives, alors, à mesure que $x \to \infty$, $y \to 0^+$, comme le montre la figure.

13. a) $y' = 1 + x^2 + y^2 \geq 1$ et $y' \to \infty$ lorsque $x \to \infty$. La seule courbe satisfaisant à ces conditions est III.

b) $y' = xe^{-x^2-y^2} > 0$ si $x > 0$ et $y' < 0$ si $x < 0$. La seule courbe présentant des pentes de tangente négatives lorsque $x < 0$ et des pentes de tangente positives lorsque $x > 0$ est I.

c) $y' = \frac{1}{1 + e^{x^2+y^2}} > 0$ et $y' \to 0$ lorsque $x \to \infty$. La seule courbe satifaisant à ces conditions est IV.

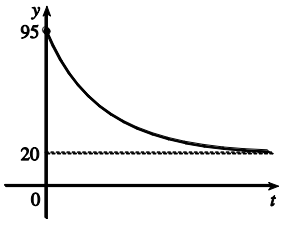
d) $y' = \sin(xy)\cos(xy) = 0$ si $y = 0$. Ceci est la courbe II.

 © Groupe Modulo inc., 2013

14. a) Le café refroidit le plus rapidement dès qu'on l'éloigne de la source de chaleur. Le taux de refroidissement diminue et se rapproche de 0 à mesure que la température du café se rapproche de la température ambiante.

b) $\frac{dy}{dt} = k(y - A)$, où k est une constante de proportionalité, y est la température du café et A est la température ambiante. La condition initiale est $y(0) = 95°C$. La réponse et le modèle s'accompagnent mutuellement car, lorsque y se rapproche de A, dy/dt se rapproche de 0. Le modèle semble donc correspondre.

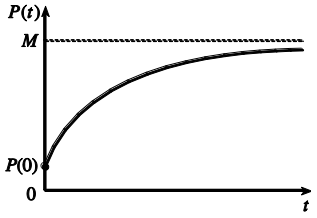
c)



15. a) P augmente le plus rapidement au début, puisqu'au début il y a habituellement plusieurs sous-habiletés simples et faciles à apprendre, lesquelles sont associées à l'apprentissage d'une habileté. Lorsque t augmente, on s'attend à ce que la valeur de dP/dt demeure positive, bien qu'elle puisse diminuer. Ceci provient du fait que lorsque le temps s'écoule, les sous-habiletés qu'il reste à apprendre sont plus difficiles.

b) La valeur de $\frac{dP}{dt} = k(M - P)$ est toujours positive et le niveau de performance P augmente donc. Lorsque P se rapproche de M, dP/dt se rapproche de 0; en d'autres termes, le niveau de performance se stabilise, tel qu'il a été expliqué à la sous-question a).

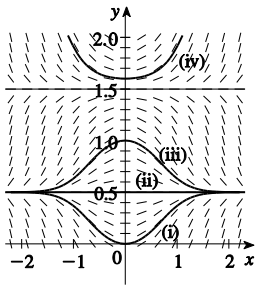
c)



 © Groupe Modulo inc., 2013

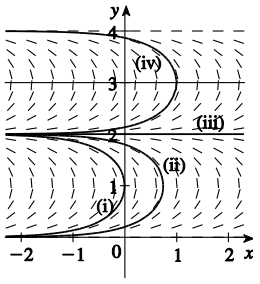
5.2 Le champ de directions et la méthode d'Euler

1. a)



b) Il semble que les fonctions constantes $y = 0{,}5$ et $y = 1{,}5$ sont des solutions stationnaires. Il est à noter que ces deux valeurs de y satisfont à l'équation différentielle donnée $y' = x \cos \pi y$.

2. a)



b) Il semble que les fonctions constantes $y = 0$, $y = 2$ et $y = 4$ sont des solutions stationnaires. On constate que ces trois valeurs de y satisfont à l'équation différentielle donnée $y' = \tan(\frac{1}{2}\pi y)$.

3. $y' = 2 - y$. Les pentes sont indépendentes de x en chaque point; les pentes sont donc identiques le long de chaque droite parallèle à l'axe des x. Par conséquent, le champ de directions III est le champ approprié pour cette équation. On constate que pour $y = 2$, $y' = 0$.

4. $y' = x(2 - y) = 0$ le long des droites $x = 0$ et $y = 2$. Le champ de directions I satisfait à ces conditions.

5. $y' = x + y - 1 = 0$ le long de la droite $y = -x + 1$. Le champ de directions IV satisfait à cette condition. On constate également que $y' = -1$ le long de la droite $y = -x$, ce qu'on retrouve dans le champ de directions IV.

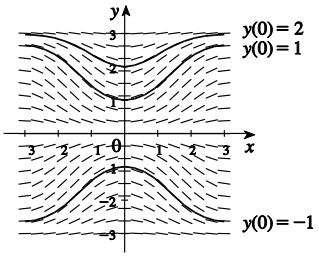
6. $y' = \sin x \sin y = 0$ le long des droites $x = 0$ et $y = 0$, et $y' > 0$ pour $0 < x < \pi$, $0 < y < \pi$. Le champ de directions II satisfait à ces conditions.

7. a) $y(0) = 1$

b) $y(0) = 2$

c) $y(0) = -1$

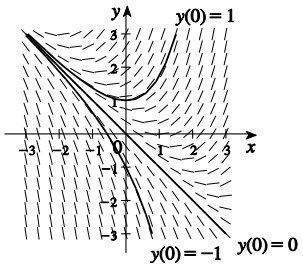
 © Groupe Modulo inc., 2013



8. a) $y(0) = -1$

b) $y(0) = 0$

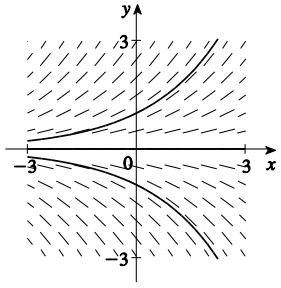
c) $y(0) = 1$



9.

x	y	$y' = \frac{1}{2}y$
0	0	0
0	1	0,5
0	2	1
0	−3	−1,5
0	−2	−1

On constate que pour $y = 0$, $y' = 0$. Les trois courbes intégrales qui ont été tracées passent par les points (0, 0), (0, 1) et (0, −1).

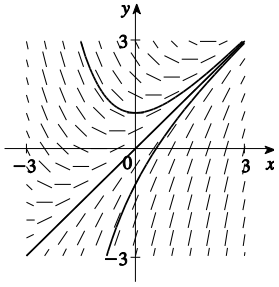


10.

 © Groupe Modulo inc., 2013

x	y	$y' = x - y + 1$
−1	0	0
−1	−1	1
0	0	1
0	1	0
0	2	−1
0	−1	2
0	−2	3
1	0	2
1	1	1

On constate que $y' = 0$ pour $y = x + 1$ et que $y' = 1$ pour $y = x$. Pour toute valeur constante de x, la valeur de y' diminue à mesure que la valeur de y augmente et la valeur de y' augmente à mesure que la valeur de y diminue. Les trois courbes intégrales qui ont été tracées passent par les points (0, 0), (0, 1) et (0, −1).

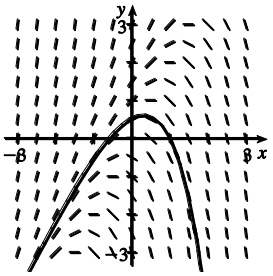


11.

x	y	$y' = y - 2x$
−2	−2	2
−2	2	6
2	2	−2
2	−2	−6

On constate que $y' = 0$ pour tout point sur la droite $y = 2x$. Les pentes sont positives à la gauche de la droite et négatives à sa droite. La courbe intégrale qui a été tracée passe par le point (1, 0).

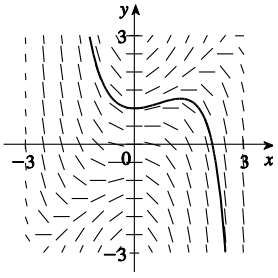
 © Groupe Modulo inc., 2013



12.

x	y	$y' = xy - x^2$
2	3	2
−2	−3	2
±2	0	−4
0	0	0
2	2	0

$y' = xy - x^2 = x(y - x)$, donc $y' = 0$ pour $x = 0$ et $y = x$. Les pentes ne sont positives que dans les régions des quadrants I et III qui sont délimitées par $x = 0$ et $y = x$. La courbe intégrale qui a été tracée passe par le point (0, 1).

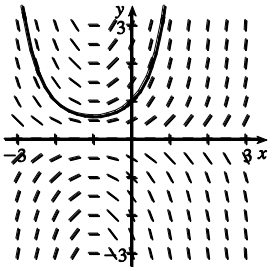


13.

x	y	$y' = y + xy$
0	±2	±2
1	±2	±4
−3	±2	∓4

On constate que $y' = y(x + 1) = 0$ pour tout point sur la droite $y = 0$ ou sur la droite $x = -1$. Les pentes sont positives lorsque les facteurs y et $x + 1$ sont du même signe et négatives lorsqu'ils sont de signes opposés. La courbe intégrale qui a été tracée passe par le point (0, 1).

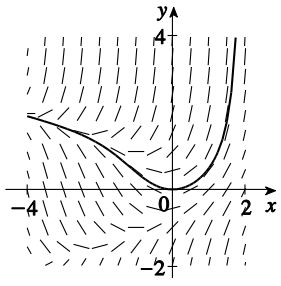
 © Groupe Modulo inc., 2013



14.

x	y	$y' = x + y^2$
−2	±1	−1
−2	±2	2
2	±1	3
0	±2	4
0	0	0

On constate que $y' = x + y^2 = 0$ seulement sur la parabole $x = -y^2$. Les pentes sont positives « à l'extérieur de » $x = -y^2$ et négatives « à l'intérieur de » $x = -y^2$. La courbe intégrale qui a été tracée passe par le point (0, 0).

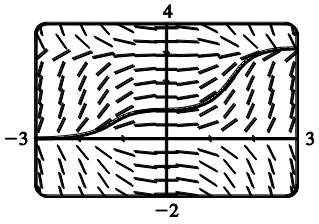


15. Avec Maple, nous pouvons employer *dfieldplot* de l'extension (package) *DEtools* pour tracer un champ de directions. Spécifiez l'option *arrows=line*. Pour superposer la courbe intégrale au champ de directions, nous pouvons soit utiliser *phaseportait* de l'extension *DEtools* ou simplement résoudre l'équation.

Avec Mathematica, nous employons *PlotVectorField* pour tracer le champ de directions et la construction *Plot[Evaluate[…]* pour tracer la courbe intégale, qui est $y = 2\arctan\left(e^{x^3/3} \cdot \tan\frac{1}{2}\right)$.

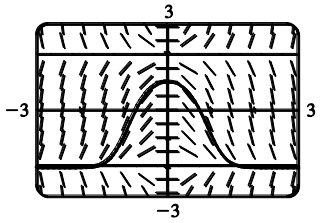
Avec Derive, nous employons *Direction_Field* (dans l'utilitaire *ODE_APPR*) pour tracer le champ de directions. Nous employons ensuite *DSOLVE1(-x^2*SIN(y), 1, x, y, 0, 1)* (dans l'utilitaire *ODE1*) afin de résoudre l'équation. Il faut simplifier chaque résultat.

 © Groupe Modulo inc., 2013

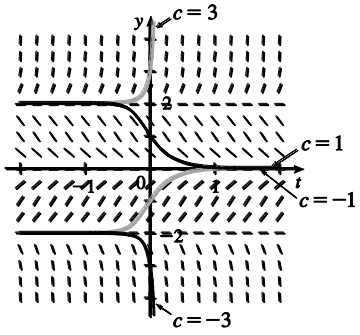


16. L'exercice 15 donne les commandes à employer pour chaque logiciel de calcul symbolique. La solution exacte est :

$$y = \frac{2(3 - e^{2x^2})}{e^{2x^2} + 3}$$



17.



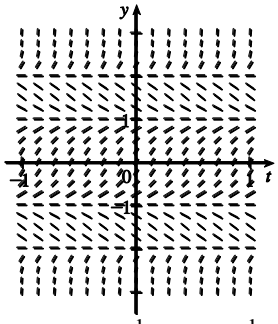
Ce champ de directions est associé à l'équation différentielle $y' = y^3 - 4y$.

$L = \lim_{t \to \infty} y(t)$ existe pour $-2 \le c \le 2$;

$L = \pm 2$ pour $c = \pm 2$ et $L = 0$ pour $-2 < c < 2$.

L n'existe pas pour toute autre valeur de c.

18.



Nous pouvons observer sur le graphique apparaissant dans le manuel que lorsque $f(y) = 0$, nous obtenons $y' = f(y) = 0$; nous avons donc des segments de droite horizontaux en $y = \pm 1, \pm 2$. Nous n'obtenons des segments de droite dont les pentes sont négatives que

 © Groupe Modulo inc., 2013

pour $1 < |y| < 2$. Tous les autres segments de droite ont des pentes positives. En ce qui concerne le comportement limite des solutions :

- Si $y(0) > 2$, alors $\lim_{t\to\infty} y = \infty$ et $\lim_{t\to-\infty} y = 2$.
- Si $1 < y(0) < 2$, alors $\lim_{t\to\infty} y = 1$ et $\lim_{t\to-\infty} y = 2$.
- Si $-1 < y(0) < 1$, alors $\lim_{t\to\infty} y = 1$ et $\lim_{t\to-\infty} y = -1$.
- Si $-2 < y(0) < -1$, alors $\lim_{t\to\infty} y = -2$ et $\lim_{t\to-\infty} y = -1$.
- Si $y < -2$, alors $\lim_{t\to\infty} y = -2$ et $\lim_{t\to-\infty} y = -\infty$.

19. a) $y' = F(x; y) = y$ et $y(0) = 1 \Rightarrow x_0 = 0$, $y_0 = 1$.

i) $h = 0{,}4$ et $y_1 = y_0 + hF(x_0, y_0) \Rightarrow y_1 = 1 + 0{,}4 \cdot 1 = 1{,}4$. $x_1 = x_0 + h = 0 + 0{,}4 = 0{,}4$,

donc $y_1 = y(0{,}4) = 1{,}4$.

ii) $h = 0{,}2 \Rightarrow x_1 = 0{,}2$ et $x_2 = 0{,}4$; il faut donc calculer y_2.

$y_1 = y_0 + hF(x_0; y_0) = 1 + 0{,}2y_0 = 1 + 0{,}2 \cdot 1 = 1{,}2$

$y_2 = y_1 + hF(x_1; y_1) = 1{,}2 + 0{,}2y_1 = 1{,}2 + 0{,}2 \cdot 1{,}2 = 1{,}44$.

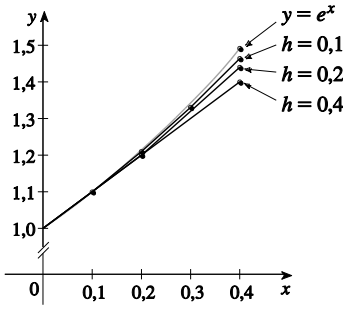
iii) $h = 0{,}1 \Rightarrow x_4 = 0{,}4$; if faut donc calculer y_4. $y_1 = y_0 + hF(x_0; y_0) = 1 + 0{,}1y_0 = 1 + 0{,}1 \cdot = 1{,}1$

$y_2 = y_1 + hF(x_1; y_1) = 1{,}1 + 0{,}1y_1 = 1{,}1 + 0{,}1 \cdot 1{,}1 = 1{,}21$

$y_3 = y_2 + hF(x_{2;}\, y_2) = 1{,}21 + 0{,}1y_2 = 1{,}21 + 0{,}1 \cdot 1{,}21 = 1{,}331$

$y_4 = y_3 + hF(x_3; y_3) = 1{,}331 + 0{,}1y_3 = 1{,}331 + 0{,}1 \cdot 1{,}331 = 1{,}4641$

b)



Nous constatons que les valeurs approchées sont des approximations par défaut puisqu'elles sont toutes situées sous la courbe de $y = e^x$.

c)

i) Pour $h = 0{,}4$: (valeur exacte) − (valeur approchée) = $e^{0,4} - 1{,}4 \approx 0{,}0918$

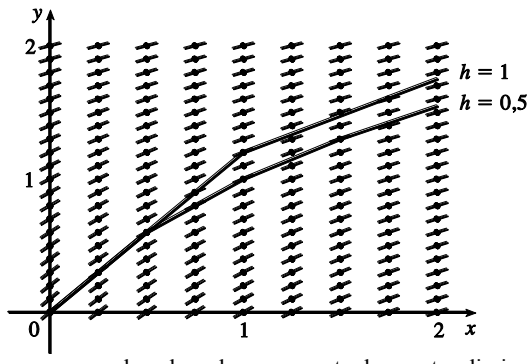
ii) Pour $h = 0{,}2$: (valeur exacte) − (valeur approchée) = $e^{0,4} - 1{,}44 \approx 0{,}0518$

iii) Pour $h = 0{,}1$: (valeur exacte) − (valeur approchée) = $e^{0,4} - 1{,}464\,1 \approx 0{,}0277$

 © Groupe Modulo inc., 2013

Chaque fois qu'on réduit le pas de moitié, l'erreur semble également être réduite de moitié (approximativement).

20.



À mesure que la valeur de x augmente, les pentes diminuent et toutes les valeurs approchées excèdent les valeurs exactes. Les valeurs approchées sont donc toutes des approximations par excès.

21. $h = 0{,}5$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ et $F(x, y) = y - 2x$.

On constate que $x_1 = x_0 + h = 1 + 0{,}5 = 1{,}5$, $x_2 = 2$ et $x_3 = 2{,}5$.

$y_1 = y_0 + hF(x_0, y_0) = 0 + 0{,}5F(1, 0) = 0{,}5[0 - 2(1)] = -1$.

$y_2 = y_1 + hF(x_1, y_1) = -1 + 0{,}5F(1{,}5, -1) = -1 + 0{,}5[-1 - 2(1{,}5)] = -3$.

$y_3 = y_2 + hF(x_2, y_2) = -3 + 0{,}5F(2, -3) = -3 + 0{,}5[-3 - 2(2)] = -6{,}5$.

$y_4 = y_3 + hF(x_3, y_3) = -6{,}5 + 0{,}5F(2{,}5, -6{,}5) = -6{,}5 + 0{,}5[-6{,}5 - 2(2{,}5)] = -12{,}25$.

22. $h = 0{,}2$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ et $F(x, y) = xy - x^2$.

Notez que $x_1 = x_0 + h = 0 + 0{,}2 = 0{,}2$, $x_2 = 0{,}4$, $x_3 = 0{,}6$, $x_4 = 0{,}8$ et $x_5 = 1{,}0$.

$$y_1 = y_0 + hF(x_0, y_0) = 1 + 0{,}2F(0, 1) = 1 + 0{,}2(0) = 1.$$
$$y_2 = y_1 + hF(x_1, y_1) = 1 + 0{,}2F(0{,}2; 1) = 1 + 0{,}2\ (0{,}16) = 1{,}032.$$
$$y_3 = y_2 + hF(x_2, y_2) = 1{,}032 + 0{,}2F(0{,}4; 1{,}032) = 1{,}032 + 0{,}2(0{,}2528) = 1{,}082\ 56.$$
$$y_4 = y_3 + hF(x_3, y_3) = 1{,}082\ 56 + 0{,}2F(0{,}6; 1{,}082\ 56) = 1{,}082\ 56 + 0{,}2(0{,}289\ 536) = 1{,}140\ 467\ 2.$$
$$y_5 = y_4 + hF(x_4, y_4) = 1{,}140\ 467\ 2 + 0{,}2F(0{,}8; 1{,}140\ 467\ 2) = 1{,}140\ 467\ 2 + 0{,}2(0{,}272\ 373\ 76) = 1{,}194\ 941\ 952.$$

Par conséquent, $y(1) \approx 1{,}1949$.

23. $h = 0{,}1$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ et $F(x, y) = y + xy$.

Notez que $x_1 = x_0 + h = 0 + 0{,}1 = 0{,}1$, $x_2 = 0{,}2$, $x_3 = 0{,}3$ et $x_4 = 0{,}4$.

$$y_1 = y_0 + hF(x_0, y_0) = 1 + 0{,}1F(0, 1) = 1 + 0{,}1[1 + (0)(1)] = 1{,}1.$$
$$y_2 = y_1 + hF(x_1, y_1) = 1{,}1 + 0{,}1F(0{,}1; 1{,}1) = 1{,}1 + 0{,}1[1{,}1 + (0{,}1)(1{,}1)] = 1{,}221.$$
$$y_3 = y_2 + hF(x_2, y_2) = 1{,}221 + 0{,}1F(0{,}2; 1{,}221) = 1{,}221 + 0{,}1[1{,}221 + (0{,}2)(1{,}221)] = 1{,}367\ 52.$$
$$y_4 = y_3 + hF(x_3, y_3) = 1{,}367\ 52 + 0{,}1F(0{,}3; 1{,}367\ 52) = 1{,}367\ 52 + 0{,}1[1{,}367\ 52 + (0{,}3)(1{,}367\ 52)]$$
$$= 1{,}545\ 297\ 6.$$
$$y_5 = y_4 + hF(x_4, y_4) = 1{,}545\ 297\ 6 + 0{,}1F(0{,}4; 1{,}545\ 297\ 6)$$
$$= 1{,}545\ 297\ 6 + 0{,}1[1{,}545\ 297\ 6 + (0{,}4)(1{,}545\ 297\ 6)] = 1{,}761\ 639\ 264.$$

Par conséquent, $y(0{,}5) \approx 1{,}7616$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

24. a) $h = 0{,}2$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ et $F(x, y) = x + y^2$.

Notez que $x_1 = x_0 + h = 0 + 0{,}2 = 0{,}2$ et $x_2 = x_1 + h = 0{,}4$.

$y_1 = y_0 + hF(x_0, y_0) = 0 + 0{,}2F(0, 0) = 0{,}2\ (0) = 0$

$y_2 = y_1 + hF(x_1, y_1) = 0 + 0{,}2F(0{,}2;\ 0) = 0{,}2\ (0{,}2) = 0{,}04$

Par conséquent, $y(0{,}4) \approx 0{,}04$.

b) Maintenant, $x_1 = x_0 + h = 0 + 0{,}1 = 0{,}1$, $x_2 = 0{,}2$, $x_3 = 0{,}3$ et $x_4 = 0{,}4$.

$y_1 = y_0 + hF(x_0, y_0) = 0 + 0{,}1F(0, 0) = 0{,}1(0) = 0.$
$y_2 = y_1 + hF(x_1, y_1) = 0 + 0{,}1F(0{,}1;\ 0) = 0{,}1(0{,}1) = 0{,}01.$
$y_3 = y_2 + hF(x_2, y_2) = 0{,}01 + 0{,}1F(0{,}2;\ 0{,}01) = 0{,}01 + 0{,}1(0{,}2001) = 0{,}030\ 01.$
$y_4 = y_3 + hF(x_3, y_3) = 0{,}030\ 01 + 0{,}1F(0{,}3;\ 0{,}030\ 01) = 0{,}030\ 01 + 0{,}1(0{,}300\ 900\ 600\ 1) = 0{,}060\ 100\ 060\ 01.$

Par conséquent, $y(0{,}4) \approx 0{,}06$.

25. a) $dy/dx + 3x^2y = 6x^2 \quad \Rightarrow \quad y' = 6x^2 - 3x^2y$. Saisissez cette expression en mémoire en Y_1 et servez-vous du programme simple ci-après pour évaluer $y(1)$ dans chaque sous-question, en utilisant H = h = 1 et N = 1 pour la sous-question i), H = 0,1 et N = 10 pour la sous-question ii) et ainsi de suite.

$h \to$ H: $0 \to$ X: $3 \to$ Y:
For(I, 1, N): $Y + H \times Y_1 \to$ Y: $X + H \to$ X:
End(loop):
Display Y. [Pour voir chaque itération, assurez-vous d'inclure cette commande dans la boucle.]

i) $\mathrm{H} = 1,\ \mathrm{N} = 1 \quad \Rightarrow \quad y(1) = 3$

ii) $\mathrm{H} = 0{,}1,\ \mathrm{N} = 10 \quad \Rightarrow \quad y(1) \approx 2{,}3928$

iii) $\mathrm{H} = 0{,}01,\ \mathrm{N} = 100 \quad \Rightarrow \quad y(1) \approx 2{,}3701$

iv) $\mathrm{H} = 0{,}001,\ \mathrm{N} = 1000 \quad \Rightarrow \quad y(1) \approx 2{,}3681$

b) $y = 2 + e^{-x^3} \quad \Rightarrow \quad y' = -3x^2e^{-x^3}$

$$\text{Membre de gauche} = y' + 3x^2y = -3x^2e^{-x^3} + 3x^2\left(2 + e^{-x^3}\right) = -3x^2e^{-x^3} + 6x^2 + 3x^2e^{-x^3} = 6x^2 = \text{Membre de droite}$$

$y(0) = 2 + \mathrm{e}^{-0} = 2 + 1 = 3$

c) La valeur exacte de $y(1)$ est $2 + e^{-1^3} = 2 + e^{-1}$.

i) Pour $h = 1$: (valeur exacte) − (valeur approchée) $= 2 + e^{-1} - 3 \approx -0{,}6321$

ii) Pour $h = 0{,}1$: (valeur exacte) − (valeur approchée) $= 2 + e^{-1} - 2{,}392\ 8 \approx -0{,}0249$

iii) Pour $h = 0{,}01$: (valeur exacte) − (valeur approchée) $= 2 + e^{-1} - 2{,}370\ 1 \approx -0{,}0022$

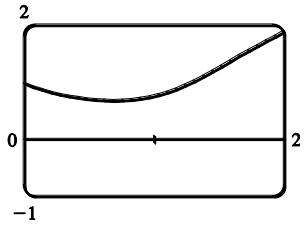
iv) Pour $h = 0{,}001$: (valeur exacte) − (valeur approchée) $= 2 + e^{-1} - 2{,}368\ 1 \approx -0{,}0002$

 © Groupe Modulo inc., 2013

Aux sous-questions ii) à iv), il semble que lorsque le pas est divisé par 10, l'erreur est également divisée par 10 (approximativement).

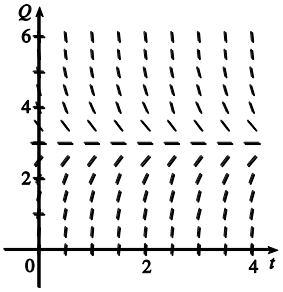
26. a) Utilisons le programme proposé dans la solution de l'exercice 25, avec $Y_1 = x^3 - y^3$, H = 0,01 et $N = \frac{2-0}{0,01} = 200$.

Avec $(x_0, y_0) = (0, 1)$, nous obtenons $y(2) \approx 1,9000$.

b) 

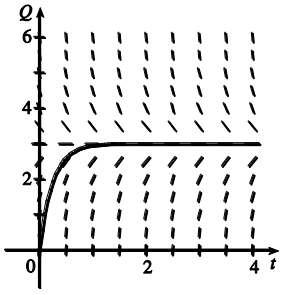
On évalue graphiquement que $y(2) \approx 1,9$, ce qui nous permet de confirmer notre calcul à la sous-question a).

27. a) $R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$ devient $5Q' + \frac{1}{0,05}Q = 60$ ou $Q' + 4Q = 12$.



b) Le graphique semble montrer que la valeur limite de la charge Q est d'environ 3.

c) Si $Q' = 0$, alors $4Q = 12 \Rightarrow Q = 3$ est une solution stationnaire.

d) 

e) $Q' + 4Q = 12 \Rightarrow Q' = 12 - 4Q$. Maintenant, $Q(0) = 0$, donc $t_0 = 0$ et $Q_0 = 0$.

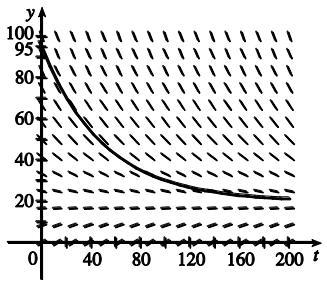
$$Q_1 = Q_0 + hF(t_0; Q_0) = 0 + 0,1(12 - 4 \cdot 0) = 1,2$$
$$Q_2 = Q_1 + hF(t_1; Q_1) = 1,2 + 0,1(12 - 4 \cdot 1,2) = 1,92$$
$$Q_3 = Q_2 + hF(t_2; Q_2) = 1,92 + 0,1(12 - 4 \cdot 1,92) = 2,352$$
$$Q_4 = Q_3 + hF(t_3; Q_3) = 2,352 + 0,1(12 - 4 \cdot 2,352) = 2,6112$$
$$Q_5 = Q_4 + hF(t_4; Q_4) = 2;6112 + 0,1(12 - 4 \cdot 2,6112) = 2,766\,72$$

Par conséquent, $Q_5 = Q(0,5) \approx 2,77$ C.

 © Groupe Modulo inc., 2013

28. a) Nous avons vu à l'exercice 5.1.14 que $dy/dt = k(y - A)$. Le problème spécifie que $A = 20°C$ et que $dy/dt = -1°C/min$ lorsque $y = 70°C$. Par conséquent, $-1 = k(70 - 20) \Rightarrow k = -\frac{1}{50}$ et l'équation différentielle devient $dy/dt = -\frac{1}{50}(y - 20)$.

b)



La valeur limite de la température est 20°C, c'est-à-dire la température ambiante.

c) Nous avons trouvé à la sous-question a) que $dy/dt = -\frac{1}{50}(y - 20)$. Avec $t_0 = 0$, $y_0 = 95$ et $h = 2$ min, nous obtenons

$$y_1 = y_0 + hF(t_0; y_0) = 95 + 2[-\tfrac{1}{50}(95 - 20)] = 92$$
$$y_2 = y_1 + hF(t_1; y_1) = 92 + 2[-\tfrac{1}{50}(92 - 20)] = 89{,}12$$
$$y_3 = y_2 + hF(t_2; y_2) = 89{,}12 + 2[-\tfrac{1}{50}(89{,}12 - 20)] = 86{,}3552$$
$$y_4 = y_3 + hF(t_3; y_3) = 86{,}3552 + 2[-\tfrac{1}{50}(86{,}3552 - 20)] = 83{,}700\,992$$
$$y_5 = y_4 + hF(t_4; y_4) = 83{,}700\,992 + 2[-\tfrac{1}{50}(83{,}700\,992 - 20)] = 81{,}152\,952\,32$$

Par conséquent, $y(10) \approx 81{,}15°C$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

5.3 Les équations différentielles à variables séparables

1. $\frac{dy}{dx} = xy^2 \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = xdx\ [y \neq 0] \Rightarrow \int y^{-2}dy = \int xdx \Rightarrow -y^{-1} = \frac{1}{2}x^2 + C \Rightarrow \frac{1}{y} = -\frac{1}{2}x^2 - C \Rightarrow y = \frac{1}{-\frac{1}{2}x^2 - C} = \frac{2}{K - x^2}$, où $K = -2C$. $y = 0$ est également une solution.

2. $\frac{dy}{dx} = xe^{-y} \Rightarrow \frac{dy}{e^{-y}} = xdx \Rightarrow \int e^y dy = \int xdx \Rightarrow e^y = \frac{1}{2}x^2 + C \Rightarrow y = \ln(\frac{1}{2}x^2 + C)$

3. $xy^2y' = x + 1 \Rightarrow y^2\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{x} \Rightarrow y^2dy = \left(1 + \frac{1}{x}\right)dx \Rightarrow \int y^2dy = \int\left(1 + \frac{1}{x}\right)dx \Rightarrow$

$\frac{1}{3}y^3 = x + \ln|x| + C \Rightarrow y^3 = 3x + 3\ln|x| + 3C \Rightarrow y = \sqrt[3]{3x + 3\ln|x| + K}$, où $K = 3C$.

4. $(y^2 + xy^2)y' = 1 \Rightarrow y^2(1 + x)\frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow y^2dy = \frac{1}{1+x}dx \Rightarrow \int y^2dy = \int\frac{1}{1+x}dx \Rightarrow$

$\frac{1}{3}y^3 = \ln|1+x| + C \Rightarrow y^3 = 3\ln|1 + x| + 3C \Rightarrow y = \sqrt[3]{3\ln|1 + x| + K}$, où $K = 3C$.

5. $(y + \sin y)y' = x + x^3 \Rightarrow (y + \sin y)\frac{dy}{dx} = x + x^3 \Rightarrow \int(y + \sin y)dy = \int(x + x^3)dx \Rightarrow \frac{1}{2}y^2 - \cos y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + C$. Il est impossible d'exprimer y explicitement.

6. $\frac{dv}{ds} = \frac{s+1}{sv+s} = \frac{s+1}{s(v+1)} \Rightarrow (v+1)dv = \left(1 + \frac{1}{s}\right)ds \Rightarrow \int(v+1)dv = \int\left(1 + \frac{1}{s}\right)ds \Rightarrow$

$\frac{1}{2}v^2 + v = s + \ln|s| + C \Rightarrow v^2 + 2v = 2s + 2\ln|s| + 2C \Rightarrow v^2 + 2v + 1 = 2s + 2\ln|s| + 2C + 1 \Rightarrow$

$(v+1)^2 = 2s + 2\ln|s| + 2C + 1 \Rightarrow v + 1 = \pm\sqrt{2s + 2\ln|s| + K} \Rightarrow v = -1 \pm \sqrt{2s + 2\ln|s| + K}$, où $K = 2C + 1$.

7. $\frac{dy}{dt} = \frac{t}{ye^{y+t^2}} = \frac{t}{ye^ye^{t^2}} \Rightarrow ye^ydy = te^{-t^2}dt \Rightarrow \int ye^ydy = \int te^{-t^2}dt \Rightarrow ye^y - e^y$ [intégration par parties] $= -\frac{1}{2}e^{-t^2} + C$.

L'équation $e^y(y-1) = C - \frac{1}{2}e^{-t^2}$ donne la solution sous forme implicite. Il est impossible d'exprimer y explicitement.

8. $\frac{dy}{d\theta} = \frac{e^y\sin^2\theta}{y\sec\theta} \Rightarrow \frac{y}{e^y}dy = \frac{\sin^2\theta}{\sec\theta}d\theta \Rightarrow \int ye^{-y}dy = \int\sin^2\theta\cos\theta d\theta$. Intégrons par partie le membre de gauche avec $u = y$ et $dv = e^{-y}\,dy$, puis le membre de droite en posant $u = \sin\theta$. Nous obtenons $-ye^{-y} - e^{-y} = \frac{1}{3}\sin^3\theta + C$. Il est impossible d'exprimer y explicitement.

 © Groupe Modulo inc., 2013

9. $\frac{dp}{dt} = t^2 p - p + t^2 - 1 = p(t^2-1) + 1(t^2-1) = (p+1)(t^2-1) \Rightarrow \frac{1}{p+1}dp = (t^2-1)dt \Rightarrow$

$\int \frac{1}{p+1}dp = \int (t^2-1)dt \Rightarrow \ln|p+1| = \frac{1}{3}t^3 - t + C \Rightarrow |p+1| = e^{t^3/3-t+C} \Rightarrow p+1 = \pm e^C e^{t^3/3-t} \Rightarrow p = Ke^{t^3/3-t} - 1$, où $K = \pm e^C$.

Puisque $p = -1$ est également une solution, K peut être égal à 0 et, par conséquent, K est un nombre réel quelconque.

10. $\frac{dz}{dt} + e^{t+z} = 0 \Rightarrow \frac{dz}{dt} = -e^t e^z \Rightarrow \int e^{-z}dz = -\int e^t dt \Rightarrow -e^{-z} = -e^t + C \Rightarrow e^{-z} = e^t - C \Rightarrow$

$\frac{1}{e^z} = e^t - C \Rightarrow e^z = \frac{1}{e^t - C} \Rightarrow z = \ln\left(\frac{1}{e^t - C}\right) \Rightarrow z = -\ln(e^t - C)$

11. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \Rightarrow ydy = xdx \Rightarrow \int ydy = \int xdx \Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + C$. $y(0) = -3 \Rightarrow \frac{1}{2}(-3)^2 = \frac{1}{2}(0)^2 + C \Rightarrow C = \frac{9}{2}$, donc

$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2} \Rightarrow y^2 = x^2 + 9 \Rightarrow y = -\sqrt{x^2+9}$ puisque $y(0) = -3 < 0$.

12. $\frac{dy}{dx} = \frac{\ln x}{xy}$, $y(1) = 2$. $\int ydy = \int \frac{\ln x}{x}dx \Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$. Or, $y(1) = 2 \Rightarrow \frac{1}{2}(2)^2 = \frac{1}{2}(\ln 1)^2 + C \Rightarrow 2 = C$,

donc $\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + 2 \Rightarrow y^2 = (\ln x)^2 + 4 \Rightarrow y = \pm\sqrt{(\ln x)^2 + 4}$. Puisque $y(1) = 2$, nous obtenons $y = \sqrt{(\ln x)^2 + 4}$.

13. $\frac{du}{dt} = \frac{2t + \sec^2 t}{2u}$, $u(0) = -5$. $\int 2udu = \int (2t + \sec^2 t)dt \Rightarrow u^2 = t^2 + \tan t + C$, où $[u(0)]^2 = 0^2 + \tan 0 + C \Rightarrow C = (-5)^2 = 25$. Par

conséquent, $u^2 = t^2 + \tan t + 25$, donc $u = \pm\sqrt{t^2 + \tan t + 25}$. Puisque $u(0) = -5$, il s'ensuit que $u = -\sqrt{t^2 + \tan t + 25}$.

14. $y' = \frac{xy\sin x}{y+1}$, $y(0) = 1$. $\frac{y+1}{y}\frac{dy}{dx} = x\sin x \Rightarrow \int\left(1 + \frac{1}{y}\right)dy = \int x\sin x dx \Rightarrow y + \ln|y| = -x\cos x + \sin x + C$ [intégrer par parties avec

$u = x$ et $dv = \sin x\, dx$]. Or, $y(0) = 1 \Rightarrow 1 + 0 = 0 + 0 + C \Rightarrow C = 1$, donc $y + \ln|y| = -x\cos x + \sin x + 1$. Il est impossible

d'exprimer y explicitement.

15. $x\ln x = y\left(1 + \sqrt{3 + y^2}\right)y'$, $y(1) = 1$. $\int x\ln x dx = \int\left(y + y\sqrt{3 + y^2}\right)dy \Rightarrow \frac{1}{2}x^2\ln x - \int \frac{1}{2}xdx$ [intégrer par parties avec

$u = \ln x$ et $dv = xdx$] $= \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}(3 + y^2)^{3/2} \Rightarrow \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}(3 + y^2)^{3/2}$. Or,

$y(1) = 1 \Rightarrow 0 - \frac{1}{4} + C = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}(4)^{3/2} \Rightarrow C = \frac{1}{2} + \frac{8}{3} + \frac{1}{4} = \frac{41}{12}$, donc $\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{41}{12} = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}(3 + y^2)^{3/2}$. Il est impossible

d'exprimer y explicitement.

 © Groupe Modulo inc., 2013

16. $\frac{dP}{dt} = \sqrt{Pt} \;\Rightarrow\; dP/\sqrt{P} = \sqrt{t}dt \;\Rightarrow\; \int P^{-1/2}dP = \int t^{1/2}dt \;\Rightarrow\; 2P^{1/2} = \frac{2}{3}t^{3/2} + C$. $P(1) = 2 \;\Rightarrow\; 2\sqrt{2} = \frac{2}{3} + C \;\Rightarrow\; C = 2\sqrt{2} - \frac{2}{3}$,

donc $2P^{1/2} = \frac{2}{3}t^{3/2} + 2\sqrt{2} - \frac{2}{3} \;\Rightarrow\; \sqrt{P} = \frac{1}{3}t^{3/2} + \sqrt{2} - \frac{1}{3} \;\Rightarrow\; P = \left(\frac{1}{3}t^{3/2} + \sqrt{2} - \frac{1}{3}\right)^2$.

17. $y' \tan x = a + y,\ 0 < x < \pi/2 \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = \frac{a+y}{\tan x} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{a+y} = \cot x dx \quad [a + y \neq 0] \;\Rightarrow$

$\int \frac{dy}{a+y} = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx \;\Rightarrow\; \ln|a+y| = \ln|\sin x| + C \;\Rightarrow\; |a+y| = e^{\ln|\sin x| + C} = e^{\ln|\sin x|} \cdot e^C = e^C|\sin x| \;\Rightarrow$

$a + y = K \sin x$, où $K = \pm e^C$. (Lorsque nous avons effectué la dérivation, $K \neq 0$, mais en permettant à K d'être égal à 0, nous pouvons éliminer l'exclusion de $y = -a$.) $y(\pi/3) = a \;\Rightarrow\; a + a = K \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \;\Rightarrow\; 2a = K\frac{\sqrt{3}}{2} \;\Rightarrow\; K = \frac{4a}{\sqrt{3}}$. Par conséquent,

$a + y = \frac{4a}{\sqrt{3}}\sin x$ et donc, $y = \frac{4a}{\sqrt{3}}\sin x - a$.

18. $\frac{dL}{dt} = kL^2 \ln t \;\Rightarrow\; \frac{dL}{L^2} = k \ln t dt \;\Rightarrow\; \int \frac{dL}{L^2} = \int k \ln t dt \;\Rightarrow\; -\frac{1}{L} = kt \ln t - \int k dt$

[intégration par parties avec $u = \ln t$ et $dv = kdt$] $\;\Rightarrow\; -\frac{1}{L} = kt \ln t - kt + C \;\Rightarrow\; L = \frac{1}{kt - kt\ln t - C}$.

$L(1) = -1 \;\Rightarrow\; -1 = \frac{1}{k - k\ln 1 - C} \;\Rightarrow\; C - k = 1 \;\Rightarrow\; C = k + 1$. Par conséquent, $L = \frac{1}{kt - kt\ln t - k - 1}$.

19. Si la pente au point (x, y) est xy, nous obtenons $\frac{dy}{dx} = xy \;\Rightarrow\; \frac{dy}{y} = xdx \quad [y \neq 0] \;\Rightarrow\; \int \frac{dy}{y} = \int x dx \;\Rightarrow\; \ln|y| = \frac{1}{2}x^2 + C$.

$y(0) = 1 \;\Rightarrow\; \ln 1 = 0 + C \;\Rightarrow\; C = 0$. Par conséquent, $|y| = e^{x^2/2} \;\Rightarrow\; y = \pm e^{x^2/2}$, donc $y = e^{x^2/2}$ puisque $y(0) = 1 > 0$. $y = 0$ n'est pas une solution parce qu'elle ne satisfait pas à la condition initiale $y(0) = 1$.

20. $f'(x) = f(x)(1 - f(x)) \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = y(1-y) \;\Rightarrow\; \frac{dy}{y(1-y)} = dx \quad [y \neq 0; 1] \;\Rightarrow\; \int \frac{dy}{y(1-y)} = \int dx \;\Rightarrow$

$\int\left(\frac{A}{y} + \frac{B}{1-y}\right)dy = \int dx \;\Rightarrow\; \int\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}\right)dy = \int dx \;\Rightarrow\; \ln|y| - \ln|1-y| = x + C \;\Rightarrow$

$\ln\left|\frac{y}{1-y}\right| = x + C \;\Rightarrow\; \left|\frac{y}{1-y}\right| = e^{x+C} \;\Rightarrow\; \frac{y}{1-y} = Ke^x$, où $K = \pm e^C \;\Rightarrow$

$y = (1-y)Ke^x = Ke^x - yKe^x \;\Rightarrow\; y + yKe^x = Ke^x \;\Rightarrow\; y(1 + Ke^x) = Ke^x \;\Rightarrow\; y = \frac{Ke^x}{1 + Ke^x}$.

$f(0) = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \frac{1}{2} = \frac{K}{1+K} \;\Rightarrow\; 1 + K = 2K \;\Rightarrow\; K = 1$, donc $y = \frac{e^x}{1+e^x}\left[\text{ou } \frac{1}{1+e^{-x}}\right]$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

$y = 0$ et $y = 1$ ne sont pas des solutions parce qu'elles ne satisfont pas à la condition initiale $f(0) = \frac{1}{2}$.

21. $u = x + y \;\Rightarrow\; \frac{d}{dx}(u) = \frac{d}{dx}(x + y) \;\Rightarrow\; \frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$. Cependant, $\frac{dy}{dx} = x + y = u$, donc $\frac{du}{dx} = 1 + u \;\Rightarrow$

$\frac{du}{1+u} = dx \quad [u \neq -1] \;\Rightarrow\; \int \frac{du}{1+u} = \int dx \;\Rightarrow\; \ln|1+u| = x + C \;\Rightarrow |1+u| = e^{x+C} \;\Rightarrow$

$1 + u = \pm e^C e^x \;\Rightarrow\; u = \pm e^C e^x - 1 \;\Rightarrow\; x + y = \pm e^C e^x - 1 \;\Rightarrow\; y = Ke^x - x - 1$, où $K = \pm e^C \neq 0$. Si $u = -1$, alors

$-1 = x + y \;\Rightarrow\; y = -x - 1$, qui est la même chose que $y = Ke^x - x - 1$ avec $K = 0$. Par conséquent, la solution générale est $y = Ke^x - x - 1$, où $K \in \mathbb{R}$.

22. $xy' = y + xe^{y/x} \;\Rightarrow\; y' = y/x + e^{y/x} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = v + e^v$. De plus, $v = y/x \;\Rightarrow\; xv = y \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v$, donc

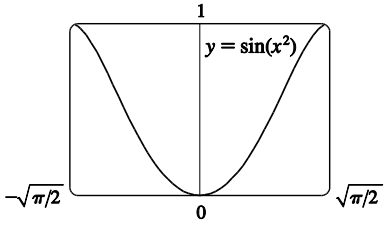
$v + e^v = x\frac{dv}{dx} + v \;\Rightarrow\; \frac{dv}{e^v} = \frac{dx}{x} \quad [x \neq 0] \;\Rightarrow\; \int \frac{dv}{e^v} = \int \frac{dx}{x} \;\Rightarrow\; -e^{-v} = \ln|x| + C \;\Rightarrow$

$e^{-v} = -\ln|x| - C \;\Rightarrow\; -v = \ln(-\ln|x| - C) \;\Rightarrow\; y/x = -\ln(-\ln|x| - C) \;\Rightarrow\; y = -x\ln(-\ln|x| - C)$.

23. a) $y' = 2x\sqrt{1-y^2} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = 2x\sqrt{1-y^2} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 2x\,dx \;\Rightarrow\; \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int 2x\,dx \;\Rightarrow \arcsin y = x^2 + C$

pour $-\frac{\pi}{2} \leq x^2 + C \leq \frac{\pi}{2}$.

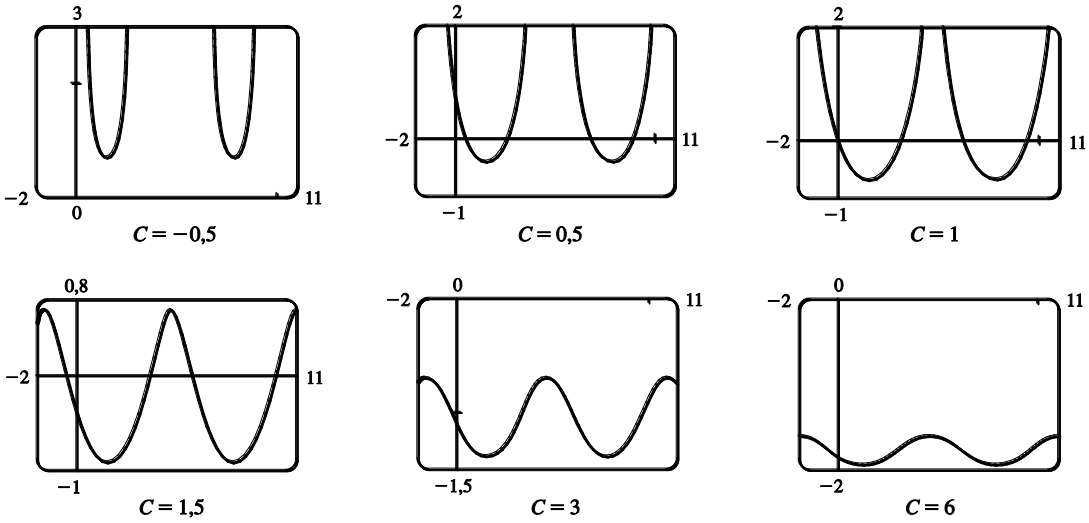
b) $y(0) = 0 \;\Rightarrow\; \arcsin 0 = 0^2 + C \;\Rightarrow\; C = 0$, donc $\arcsin y = x^2$ et $y = \sin(x^2)$ pour $-\sqrt{\pi/2} \leq x \leq \sqrt{\pi/2}$.



c) Pour que $\sqrt{1-y^2}$ soit un nombre réel, il faut que $-1 \leq y \leq 1$, c'est-à-dire que $-1 \leq y(0) \leq 1$. Par conséquent, le problème de Cauchy $y' = 2x\sqrt{1-y^2}$, $y(0) = 2$ *n*'a *pas* de solution.

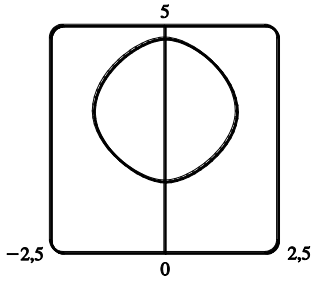
24. $e^{-y}y' + \cos x = 0 \;\Leftrightarrow\; \int e^{-y}dy = -\int \cos x\,dx \;\Leftrightarrow\; -e^{-y} = -\sin x + C_1 \;\Leftrightarrow\; y = -\ln(\sin x + C)$. La solution est périodique et sa période est 2π. On constate que pour $C > 1$, le domaine de la solution est $\mathbb{R}$; cependant, pour $-1 < C \leq 1$, elle n'est définie que sur les intervalles où $\sin x + C > 0$ et elle n'a aucune signification lorsque $C \leq -1$, puisqu'alors $\sin x + C \leq 0$ et le logarithme n'est pas défini.

 © Groupe Modulo inc., 2013



Pour $-1 < C < 1$, la courbe intégrale est par morceaux concaves vers le haut séparées par des intervalles sur lesquels la solution n'existe pas (où $\sin x + C \le 0$). Pour $C = 1$, la courbe intégrale est par morceaux concaves vers le haut séparées par des asymptotes verticales aux points où $\sin x + C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = -1$. Pour $C > 1$, la courbe intégrale est continue et, lorsque C augmente, la courbe se déplace vers le bas et l'amplitude des oscillations diminue.

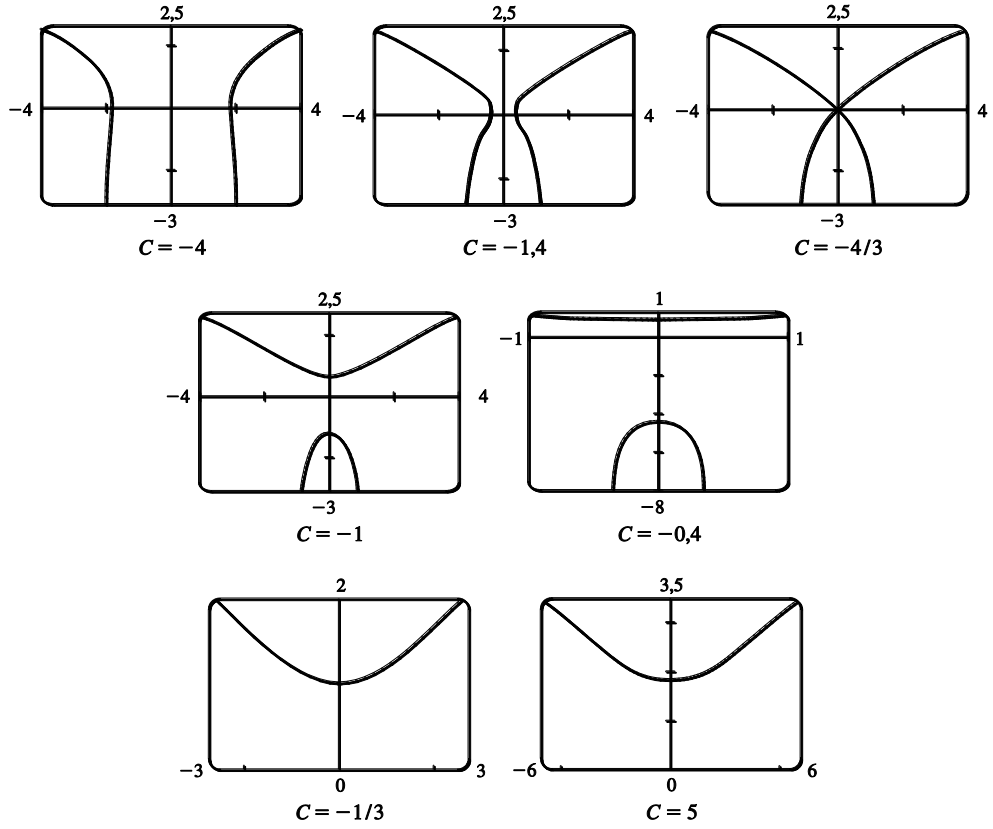
25. $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{\sin y}$, $y(0) = \frac{\pi}{2}$. Donc, $\int \sin y dy = \int \sin x dx \quad \Leftrightarrow \quad -\cos y = -\cos x + C \quad \Leftrightarrow \quad \cos y = \cos x - C$. La condition initiale exige que $\cos \frac{\pi}{2} = \cos 0 - C \quad \Rightarrow \quad 0 = 1 - C \quad \Rightarrow \quad C = 1$ et la solution est donc cos *y* = cos*x* − 1. Nous ne pouvons appliquer la fonction arccos aux deux membres de l'équation, puisque cela restreindrait sans nécessité la solution au cas où $-1 \le \cos x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le \cos x$ étant donné que *arccos* n'est défini que sur l'intervalle [−1, 1]. Traçons plutôt la courbe intégrale à l'aide de la commande *plots[implicitplot]* de Maple ou *Plot[Evaluate[···]]* de Mathematica.



26. $\frac{dy}{dx} = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{ye^y} \quad \Leftrightarrow \quad \int ye^y dy = \int x\sqrt{x^2+1} dx$. En intégrant par partie le membre de gauche avec $u = y$ et $dv = e^y\, dy$ et le membre de droite en posant $z = x^2 + 1$, nous obtenons $dz = 2x\, dx$. L'équation devient $ye^y - \int e^y dy = \frac{1}{2}\int \sqrt{z} dz \quad \Leftrightarrow \quad e^y(y-1) = \frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2} + C$. Ce qui montrer que les courbes sont symétriques par rapport à l'axe des *y*. Chaque point (*x*, *y*) dans le plan appartient à l'une de ces courbes, soit toute courbe pour laquelle $C = (y-1)e^y - \frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2}$. Par exemple, le long de l'axe des *y*, $C = (y-1)e^y - \frac{1}{3}$, et l'origine

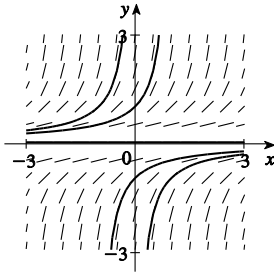
 © Groupe Modulo inc., 2013

appartient donc à cette courbe, avec $C = -\frac{4}{3}$. Traçons la courbe intégrale pour différentes valeurs de C à l'aide de la commande *plots[implicitplot]* de Maple ou *Plot[Evaluate[···]]* de Mathematica.



Il semble que les valeurs de C aux points où la forme de la courbe change sont $-\frac{4}{3}$ et $-\frac{1}{3}$. Pour $C < -\frac{4}{3}$, la courbe est composée d'une branche gauche et d'une branche droite. Pour $C = -\frac{4}{3}$, les deux branches se rejoignent à l'origine et, lorsque C augmente, la courbe se divise en branches au haut et au bas du graphique. Pour $C = -\frac{1}{3}$, la moitié du bas disparaît. Avec de plus grandes valeurs de C, la courbe se déplace vers le haut, mais sa forme demeure essentiellement inchangée.

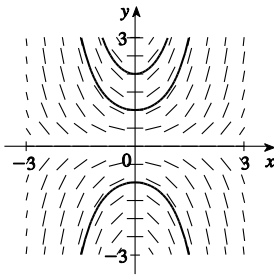
27. a), c)



b) $y' = y^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y^2 \Rightarrow \int y^{-2}dy = \int dx \Rightarrow -y^{-1} = x + C \Rightarrow \frac{1}{y} = -x - C \Rightarrow y = \frac{1}{K - x}$, où $K = -C$. $y = 0$ est également une solution.

 © Groupe Modulo inc., 2013

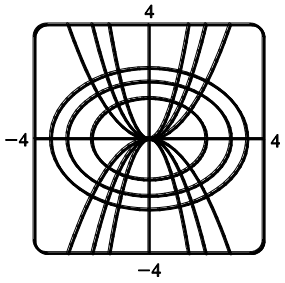
28. a), c)



b) $y' = xy \;\Rightarrow\; \dfrac{dy}{dx} = xy \;\Rightarrow\; \displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int x\,dx \;\Rightarrow\; \ln|y| = \tfrac{1}{2}x^2 + C \;\Rightarrow\; |y| = e^{x^2/2+C} = e^{x^2/2}e^C \;\Rightarrow\; y = Ke^{x^2/2}$, où $K = \pm e^C$. En posant $K = 0$, nous obtenons la solution $y = 0$.

29. Les courbes $x^2 + 2y^2 = k^2$ forment une famille d'ellipses dont l'axe principal repose sur l'axe des x. En prenant la dérivée, nous obtenons $\dfrac{d}{dx}(x^2 + 2y^2) = \dfrac{d}{dx}(k^2) \;\Rightarrow\; 2x + 4yy' = 0 \;\Rightarrow\; 4yy' = -2x \;\Rightarrow\; y' = \dfrac{-x}{2y}$. Par conséquent, la pente de la droite tangente à tout point (x, y) situé sur une des ellipses est $y' = \dfrac{-x}{2y}$, et les trajectoires orthogonales doivent satisfaire à $y' = \dfrac{2y}{x} \;\Leftrightarrow\; \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y}{x} \;\Leftrightarrow\; \dfrac{dy}{y} = 2\dfrac{dx}{x} \;\Leftrightarrow\; \displaystyle\int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x} \;\Leftrightarrow\; \ln|y| = 2\ln|x| + C_1 \;\Leftrightarrow\; \ln|y| = \ln|x|^2 + C_1 \;\Leftrightarrow$

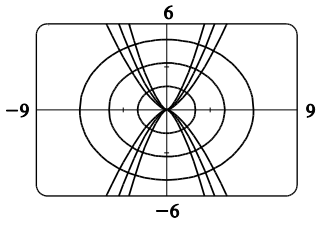
$|y| = e^{\ln x^2 + C_1} \;\Leftrightarrow\; y = \pm x^2 \cdot e^{C_1} = Cx^2$. Il s'agit ici d'une famille de paraboles.



30. Les courbes $y^2 = kx^3$ forment une famille de fonctions puissances. En prenant la dérivée, nous obtenons $\dfrac{d}{dx}(y^2) = \dfrac{d}{dx}(kx^3) \;\Rightarrow\; 2yy' = 3kx^2 \;\Rightarrow\; y' = \dfrac{3kx^2}{2y} = \dfrac{3(y^2/x^3)x^2}{2y} = \dfrac{3y}{2x}$, la pente de la droite tangente au point (x, y) situé sur une des courbes. Les trajectoires orthogonales doivent donc satisfaire à $y' = -\dfrac{2x}{3y} \;\Leftrightarrow\; \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x}{3y} \;\Leftrightarrow$

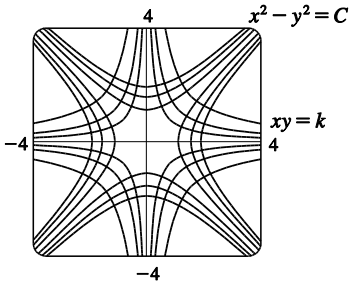
$3y\,dy = -2x\,dx \;\Leftrightarrow\; \displaystyle\int 3y\,dy = \int -2x\,dx \;\Leftrightarrow\; \tfrac{3}{2}y^2 = -x^2 + C_1 \;\Leftrightarrow\; 3y^2 = -2x^2 + C_2 \;\Leftrightarrow\; 2x^2 + 3y^2 = C$. Il s'agit ici d'une famille d'ellipses.

 © Groupe Modulo inc., 2013



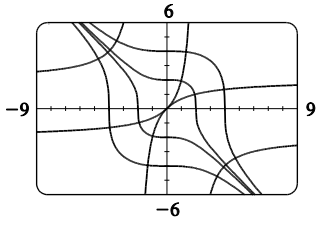
31. Les courbes $y = k/x$ forment une famille d'hyperboles dont les asymptotes sont $x = 0$ et $y = 0$. En prenant la dérivée, nous obtenons

$\frac{d}{dx}(y) = \frac{d}{dx}\left(\frac{k}{x}\right) \Rightarrow y' = -\frac{k}{x^2} \Rightarrow y' = -\frac{xy}{x^2}$ [puisque $y = k/x \Rightarrow xy = k$] $\Rightarrow y' = -\frac{y}{x}$. Par conséquent, la pente de la droite tangente à tout point (x, y) situé sur une des hyperboles est $y' = -y/x$ et les trajectoires orthogonales doivent satisfaire à $y' = x/y \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \Leftrightarrow ydy = xdx \Leftrightarrow \int ydy = \int xdx \Leftrightarrow \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + C_1 \Leftrightarrow y^2 = x^2 + C_2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = C$. Il s'agit ici d'une famille d'hyperboles dont les asymptotes sont $y = \pm x$.



32. En prenant la dérivée de $y = \frac{x}{1+kx}$, nous obtenons $y' = \frac{1}{(1+kx)^2}$; cependant, $k = \frac{x-y}{xy}$, donc $y' = \frac{1}{\left(1+\frac{x-y}{y}\right)^2} = \frac{y^2}{x^2}$. Les trajectoires orthogonales doivent donc satisfaire à $y' = -x^2/y^2 \Leftrightarrow y^2dy = -x^2dx \Leftrightarrow \int y^2dy = -\int x^2dx \Leftrightarrow$

$\frac{1}{3}y^3 = -\frac{1}{3}x^3 + C_1 \Leftrightarrow y^3 = C - x^3 \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{C - x^3}$.



33. $y(x) = 2 + \int_2^x [t - ty(t)]dt \Rightarrow y'(x) = x - xy(x)$ [selon TFC 1] $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = x(1-y) \Rightarrow \int \frac{dy}{1-y} = \int xdx \Rightarrow -\ln|1-y| = \frac{1}{2}x^2 + C$.

En posant $x = 2$ dans l'équation intégrale initiale, nous obtenons $y(2) = 2 + 0 = 2$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

Donc, $-\ln|1-2| = \frac{1}{2}(2)^2 + C \;\Rightarrow\; 0 = 2 + C \;\Rightarrow\; C = -2$. Par conséquent,

$-\ln|1-y| = \frac{1}{2}x^2 - 2 \;\Rightarrow\; \ln|1-y| = 2 - \frac{1}{2}x^2 \;\Rightarrow\; |1-y| = e^{2-x^2/2} \;\Rightarrow\; 1-y = \pm e^{2-x^2/2} \;\Rightarrow\; y = 1 + e^{2-x^2/2}$ [$y(2) = 2$].

34. $y(x) = 2 + \int_1^x \frac{dt}{ty(t)},\ x > 0 \;\Rightarrow\; y'(x) = \frac{1}{xy(x)} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = \frac{1}{xy} \;\Rightarrow\; \int y\,dy = \int \frac{1}{x}dx \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}y^2 = \ln x + C$ [$x > 0$]. En posant $x = 1$ dans l'équation intégrale initiale, nous obtenons $y(1) = 2 + 0 = 2$. Par conséquent,

$\frac{1}{2}(2)^2 = \ln 1 + C \;\Rightarrow\; C = 2.\ \frac{1}{2}y^2 = \ln x + 2 \Rightarrow y^2 = 2\ln x + 4$ [> 0] $\Rightarrow y = \sqrt{2\ln x + 4}$.

35. $y(x) = 4 + \int_0^x 2t\sqrt{y(t)dt} \;\Rightarrow\; y'(x) = 2x\sqrt{y(x)} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = 2x\sqrt{y} \;\Rightarrow\; \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int 2x\,dx \;\Rightarrow\; 2\sqrt{y} = x^2 + C$. En posant $x = 0$ dans l'équation intégrale initiale, nous obtenons $y(0) = 4 + 0 = 4$. Par conséquent, $2\sqrt{4} = 0^2 + C \;\Rightarrow\; C = 4$.

$2\sqrt{y} = x^2 + 4 \;\Rightarrow\; \sqrt{y} = \frac{1}{2}x^2 + 2 \;\Rightarrow\; y = (\frac{1}{2}x^2 + 2)^2$.

36. $(t^2+1)f'(t) + [f(t)]^2 + 1 = 0 \;\Rightarrow\; (t^2+1)\frac{dy}{dt} + y^2 + 1 = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dt} = \frac{-y^2-1}{t^2+1} \;\Rightarrow$

$\int \frac{dy}{y^2+1} = -\int \frac{dt}{t^2+1} \;\Rightarrow\; \arctan y = -\arctan t + C \;\Rightarrow\; \arctan t + \arctan y = C \;\Rightarrow$

$\tan(\arctan t + \arctan y) = \tan C \;\Rightarrow\; \frac{\tan(\arctan t) + \tan(\arctan y)}{1 - \tan(\arctan t)\tan(\arctan y)} = \tan C \;\Rightarrow\; \frac{t+y}{1-ty} = \tan C = k \;\Rightarrow$

$t + y = k - kty \;\Rightarrow\; y + kty = k - t \;\Rightarrow\; y(1+kt) = k - t \;\Rightarrow\; f(t) = y = \frac{k-t}{1+kt}$. Puisque

$f(3) = 2 = \frac{k-3}{1+3k} \;\Rightarrow\; 2 + 6k = k - 3 \;\Rightarrow\; 5k = -5 \;\Rightarrow\; k = -1$, nous obtenons $y = \frac{-1-t}{1+(-1)t} = \frac{t+1}{t-1}$.

37. Selon l'exercice 5.2.27, $\frac{dQ}{dt} = 12 - 4Q \;\Leftrightarrow\; \int \frac{dQ}{12-4Q} = \int dt \;\Leftrightarrow\; -\frac{1}{4}\ln|12-4Q| = t + C \;\Leftrightarrow$

$\ln|12-4Q| = -4t - 4C \;\Leftrightarrow\; |12-4Q| = e^{-4t-4C} \;\Leftrightarrow\; 12 - 4Q = Ke^{-4t}$ [$K = \pm e^{-4C}$] $\Leftrightarrow$

$4Q = 12 - Ke^{-4t} \;\Leftrightarrow\; Q = 3 - Ae^{-4t}$ [$A = K/4$]. $Q(0) = 0 \;\Leftrightarrow\; 0 = 3 - A \;\Leftrightarrow\; A = 3 \;\Leftrightarrow Q(t) = 3 - 3e^{-4t}$.

Lorsque $t \to \infty$, $Q(t) \to 3 - 0 = 3$ (la valeur limite).

38. Selon l'exercice 5.2.28, $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{50}(y - 20) \;\Leftrightarrow\; \int \frac{dy}{y-20} = \int (-\frac{1}{50})dt \;\Leftrightarrow\; \ln|y-20| = -\frac{1}{50}t + C \;\Leftrightarrow$

$y - 20 = Ke^{-t/50} \;\Leftrightarrow\; y(t) = Ke^{-t/50} + 20$. $y(0) = 95 \;\Leftrightarrow\; 95 = K + 20 \;\Leftrightarrow\; K = 75 \;\Leftrightarrow y(t) = 75e^{-t/50} + 20$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

39. $\frac{dP}{dt} = k(M-P) \Leftrightarrow \int \frac{dP}{P-M} = \int (-k)dt \Leftrightarrow \ln|P-M| = -kt + C \Leftrightarrow |P-M| = e^{-kt+C} \Leftrightarrow$

$P - M = Ae^{-kt}$ $[A = \pm e^C] \Leftrightarrow P = M + Ae^{-kt}$. Si nous supposons que la performance est au niveau 0 lorsque $t = 0$,

alors $P(0) = 0 \Leftrightarrow 0 = M + A \Leftrightarrow A = -M \Leftrightarrow P(t) = M - Me^{-kt}$. $\lim_{t\to\infty} P(t) = M - M \cdot 0 = M$.

40. a) $\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x)$, $a \neq b$. Décomposons en fractions partielles, $\frac{1}{(a-x)(b-x)} = \frac{1/(b-a)}{a-x} - \frac{1/(b-a)}{b-x}$, donc

$\int \frac{dx}{(a-x)(b-x)} = \int k dt \Rightarrow \frac{1}{b-a}(-\ln|a-x| + \ln|b-x|) = kt + C \Rightarrow \ln\left|\frac{b-x}{a-x}\right| = (b-a)(kt+C)$. Les concentrations

[A] = $a - x$ et [B] = $b - x$ ne peuvent pas être négatives, donc $\frac{b-x}{a-x} \geq 0$ et $\left|\frac{b-x}{a-x}\right| = \frac{b-x}{a-x}$. Nous obtenons

donc $\ln\left(\frac{b-x}{a-x}\right) = (b-a)(kt+C)$. Puisque $x(0) = 0$, nous obtenons $\ln\left(\frac{b}{a}\right) = (b-a)C$. Par conséquent,

$\ln\left(\frac{b-x}{a-x}\right) = (b-a)kt + \ln\left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow \frac{b-x}{a-x} = \frac{b}{a}e^{(b-a)kt} \Rightarrow x = \frac{b[e^{(b-a)kt}-1]}{be^{(b-a)kt}/a - 1} = \frac{ab[e^{(b-a)kt}-1]}{be^{(b-a)kt} - a}\frac{\text{mol}}{\text{L}}$.

b) Si $b = a$, alors $\frac{dx}{dt} = k(a-x)^2$, donc $\int \frac{dx}{(a-x)^2} = \int k dt$ et $\frac{1}{a-x} = kt + C$. Puisque $x(0) = 0$, nous obtenons $C = \frac{1}{a}$. Par

conséquent, $a - x = \frac{1}{kt + 1/a}$ et $x = a - \frac{a}{akt+1} = \frac{a^2kt}{akt+1}\frac{\text{mol}}{\text{L}}$. Supposons que x = [C] = $a/2$ lorsque $t = 20$. Alors,

$x(20) = a/2 \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{20a^2k}{20ak+1} \Rightarrow 40a^2k = 20a^2k + a \Rightarrow 20a^2k = a \Rightarrow k = \frac{1}{20a}$, donc

$x = \frac{a^2t/(20a)}{1 + at/(20a)} = \frac{at/20}{1 + t/20} = \frac{at}{t+20}\frac{\text{mol}}{\text{L}}$.

41. a) Si $a = b$, alors $\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x)^{1/2}$ devient $\frac{dx}{dt} = k(a-x)^{3/2} \Rightarrow (a-x)^{-3/2}dx = kdt \Rightarrow$

$\int (a-x)^{-3/2}dx = \int k dt \Rightarrow 2(a-x)^{-1/2} = kt + C$ [par changement de variables] $\Rightarrow \frac{2}{kt+C} = \sqrt{a-x} \Rightarrow$

$\left(\frac{2}{kt+C}\right)^2 = a - x \Rightarrow x(t) = a - \frac{4}{(kt+C)^2}$. La concentration initiale de HBr est 0, donc

$x(0) = 0 \Rightarrow 0 = a - \frac{4}{C^2} \Rightarrow \frac{4}{C^2} = a \Rightarrow C^2 = \frac{4}{a} \Rightarrow C = 2/\sqrt{a}$ [C est positif puisque $kt + C = 2(a-x)^{-1/2} > 0$]. Par

conséquent, $x(t) = a - \frac{4}{\left(kt + 2/\sqrt{a}\right)^2}$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

b) $\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x)^{1/2} \Rightarrow \frac{dx}{(a-x)\sqrt{b-x}} = kdt \Rightarrow \int \frac{dx}{(a-x)\sqrt{b-x}} = \int kdt$(*) . Suivant l'indice donné, $u = \sqrt{b-x} \Rightarrow u^2 = b-x \Rightarrow 2udu = -dx$, donc

$$\int \frac{dx}{(a-x)\sqrt{b-x}} = \int \frac{-2udu}{[a-(b-u^2)]u} = -2\int \frac{du}{a-b+u^2} = -2\int \frac{du}{\left(\sqrt{a-b}\right)^2 + u^2}$$

$$\overset{17}{=} -2\left(\frac{1}{\sqrt{a-b}} \arctan \frac{u}{\sqrt{a-b}}\right)$$

(*) devient donc $\frac{-2}{\sqrt{a-b}} \arctan \frac{\sqrt{b-x}}{\sqrt{a-b}} = kt + C$. Or, $x(0) = 0 \Rightarrow C = \frac{-2}{\sqrt{a-b}} \arctan \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a-b}}$ et nous obtenons $\frac{-2}{\sqrt{a-b}} \arctan \frac{\sqrt{b-x}}{\sqrt{a-b}} = kt - \frac{2}{\sqrt{a-b}} \arctan \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a-b}} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{a-b}}\left(\arctan \sqrt{\frac{b}{a-b}} - \arctan \sqrt{\frac{b-x}{a-b}}\right) = kt \Rightarrow$

$$t(x) = \frac{2}{k\sqrt{a-b}}\left(\arctan \sqrt{\frac{b}{a-b}} - \arctan \sqrt{\frac{b-x}{a-b}}\right).$$

42. Si $S = \frac{dT}{dr}$, alors $\frac{dS}{dr} = \frac{d^2T}{dr^2}$. L'équation différentielle $\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dT}{dr} = 0$ devient $\frac{dS}{dr} + \frac{2}{r}S = 0$. Par conséquent, $\frac{dS}{dr} = \frac{-2S}{r} \Rightarrow \frac{dS}{S} = -\frac{2}{r}dr \Rightarrow \int \frac{1}{S}dS = \int -\frac{2}{r}dr \Rightarrow \ln|S| = -2\ln|r| + C$. En posant $S = dT/dr > 0$ et $r > 0$, nous obtenons $S = e^{-2\ln r + C} = e^{\ln r^{-2}} e^C = r^{-2}k \quad [k = e^C] \Rightarrow S = \frac{1}{r^2}k \Rightarrow \frac{dT}{dr} = \frac{1}{r^2}k \Rightarrow$

$dT = \frac{1}{r^2}kdr \Rightarrow \int dT = \int \frac{1}{r^2}kdr \Rightarrow T(r) = -\frac{k}{r} + A$. $T(1) = 15 \Rightarrow 15 = -k + A$ **(1)** et $T(2) = 25 \Rightarrow 25 = -\frac{1}{2}k + A$ **(2)**.

Trouvons maintenant la valeur de k et de A : $-2(\mathbf{2}) + (\mathbf{1}) \Rightarrow -35 = -A$, donc $A = 35$ et $k = 20$, et $T(r) = -20/r + 35$.

43. a) $\frac{dC}{dt} = r - kC \Rightarrow \frac{dC}{dt} = -(kC - r) \Rightarrow \int \frac{dC}{kC - r} = \int -dt \Rightarrow (1/k)\ln|kC - r| = -t + M_1 \Rightarrow$

$\ln|kC - r| = -kt + M_2 \Rightarrow |kC - r| = e^{-kt + M_2} \Rightarrow kC - r = M_3 e^{-kt} \Rightarrow kC = M_3 e^{-kt} + r \Rightarrow C(t) = M_4 e^{-kt} + r/k.$

$C(0) = C_0 \Rightarrow C_0 = M_4 + r/k \Rightarrow M_4 = C_0 - r/k \Rightarrow C(t) = (C_0 - r/k)e^{-kt} + r/k.$

b) Si $C_0 < r/k$, alors $C_0 - r/k < 0$ et la formule pour $C(t)$ montre que $C(t)$ augmente et que $\lim_{t\to\infty} C(t) = r/k$. Lorsque t augmente, la formule pour $C(t)$ montre que le rôle de C_0 diminue de façon constante à mesure que celui de r/k augmente.

44. a)Considérons que l'unité de la variable x est 1 milliard de dollars et que l'unité de la variable t est 1 jour. Initialement, le total des anciens billets en circulation s'élève à 10 milliards de dollars; le montant total de 50 millions de dollars qui entre dans les banques est donc complètement constitué d'anciens billets. Au temps t, le montant de la nouvelle devise en circulation est $x(t)$ milliards de dollars et donc, $10 - x(t)$ milliards de dollars des billets en circulation sont anciens. La fraction des billets en

 © Groupe Modulo inc., 2013

circulation qui sont anciens est $[10 - x(t)]/10$ et le montant d'anciens billets qui est retourné aux banques chaque jour est

$\frac{10-x(t)}{10}0{,}05$ milliards de dollars. Le même montant de nouveaux billets est mis en circulation chaque jour, donc

$\frac{dx}{dt} = \frac{10-x}{10} \cdot 0{,}05 = 0{,}005(10-x)$ milliards de dollars par jour.

b) $\frac{dx}{10-x} = 0{,}005dt \quad \Rightarrow \quad \frac{-dx}{10-x} = -0{,}005dt \quad \Rightarrow \quad \ln(10-x) = -0{,}005t + c \quad \Rightarrow \quad 10 - x = Ce^{-0{,}005t}$, où

$C = e^c \quad \Rightarrow \quad x(t) = 10 - Ce^{-0{,}005t}$. Puisque $x(0) = 0$, nous obtenons $C = 10$, donc $x(t) = 10(1 - e^{-0{,}005t})$.

c) Les nouveaux billets constituent 90 % de la masse monétaire en circulation lorsque $x(t) = 0{,}9 \cdot 10 = 9$ milliards de dollars.

$9 = 10(1 - e^{-0{,}005t}) \quad \Rightarrow \quad 0{,}9 = 1 - e^{-0{,}005t} \quad \Rightarrow \quad e^{-0{,}005t} = 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad -0{,}005t = -\ln 10 \quad \Rightarrow$

$t = 200 \ln 10 \approx 460{,}517$ jours $\approx 1{,}26$ année.

45. a) Soit $y(t)$ la quantité de sel (en kg) après t minutes. Alors, $y(0) = 15$. Le volume de liquide dans le réservoir est maintenu constant à 1000 L, donc la concentration en tout temps t (en minutes) est $y(t)/1000$ kg/L et $\frac{dy}{dt} = -\left[\frac{y(t)}{1000}\frac{kg}{L}\right]\left(10\frac{L}{\text{min}}\right) = -\frac{y(t)}{100}\frac{\text{kg}}{\text{min}}$.

$\int \frac{dy}{y} = -\frac{1}{100}\int dt \quad \Rightarrow \quad \ln y = -\frac{t}{100} + C\,; \; y(0) = 15 \quad \Rightarrow \quad \ln 15 = C$, donc $\ln y = \ln 15 - \frac{t}{100}$. Il s'ensuit

que $\ln\left(\frac{y}{15}\right) = -\frac{t}{100}$ et $\frac{y}{15} = e^{-t/100}$, donc $y = 15e^{-t/100}$ kg.

b) Après 20 minutes, $y = 15e^{-20/100} = 15e^{-0{,}2} \approx 12{,}3$ kg.

46. Soit $y(t)$ la quantité de dioxyde de carbone dans la pièce après t minutes. Alors, $y(0) = 0{,}001\,5(180) = 0{,}27$ m^3. Le volume d'air dans la pièce est maintenu constant à 180 m^3, donc le pourcentage de dioxide en tout temps t (en minutes) est $y(t)/180 \times 100$, et la variation dioxyde de carbone par rapport au temps t est

$$\frac{dy}{dt} = (0{,}0005)\left(2\frac{\text{m}^3}{\text{min}}\right) - \frac{y(t)}{180}\left(2\frac{\text{m}^3}{\text{min}}\right) = 0{,}001 - \frac{y}{90} = \frac{9-100y}{9000}\frac{\text{m}^3}{\text{min}}$$

Par conséquent, $\int \frac{dy}{9-100y} = \int \frac{dt}{9000}$ et $-\frac{1}{100}\ln|9-100y| = \frac{1}{9000}t + C$. Puisque $y(0) = 0{,}27$, nous obtenons $-\frac{1}{100}\ln 18 = C$,

donc $-\frac{1}{100}\ln|9-100y| = \frac{1}{9000}t - \frac{1}{100}\ln 18 \quad \Rightarrow \quad \ln|9-100y| = -\frac{1}{90}t + \ln 18 \quad \Rightarrow$

$\ln|9-100y| = \ln e^{-t/90} + \ln 18 \quad \Rightarrow \quad \ln|9-100y| = \ln(18e^{-t/90})$ et $|9-100y| = 18e^{-t/90}$. Comme la fonction y est continue, $y(0) = 0{,}27$ et que le membre de droite de l'équation ne s'annule jamais, nous en déduisons que $9 - 100y$ est toujours négative. Donc, $|9 - 100y| = 100y - 9$ et nous obtenons $100y - 9 = 18e^{-t/90} \quad \Rightarrow \quad 100y = 9 + 18e^{-t/90} \quad \Rightarrow \quad y = 0{,}09 + 0{,}18e^{-t/90}$. Le pourcentage de dioxyde de carbone dans la pièce est

 © Groupe Modulo inc., 2013

$$p(t) = \frac{y}{180} \times 100 = \frac{0{,}09 + 0{,}18e^{-t/90}}{180} \times 100 = (0{,}0005 + 0{,}001e^{-t/90}) \times 100 = 0{,}05 + 0{,}1e^{-t/90}$$

À long terme, nous obtenons $\lim_{t\to\infty} p(t) = 0{,}05 + 0{,}1(0) = 0{,}05$, c'est-à-dire que le pourcentage de dioxyde de carbone se rapproche de 0,05 % à mesure que le temps s'écoule.

47. Soit $y(t)$ la quantité d'alcool dans la cuve après t minutes. Alors, $y(0) = 0{,}04(2000) = 80$ L. La quantité de bière dans la cuve est maintenue constante à 2000 L, donc le pourcentage d'alcool en tout temps t (en minutes) est $y(t)/2000 \times 100$ et la variation de la quantité d'alcool par rapport au temps t est

$\frac{dy}{dt} = \text{taux entrant} - \text{taux sortant} = 0{,}06\left(5\frac{\text{L}}{\text{min}}\right) - \frac{y(t)}{2000}\left(5\frac{\text{L}}{\text{min}}\right) = 0{,}3 - \frac{y}{400} = \frac{120 - y}{400}\frac{\text{L}}{\text{min}}$. Par conséquent,

$\int \frac{dy}{120 - y} = \int \frac{dt}{400}$ et $-\ln|120 - y| = \frac{1}{400}t + C$. Puisque $y(0) = 80$, nous obtenons $-\ln 40 = C$, donc

$-\ln|120 - y| = \frac{1}{400}t - \ln 40 \quad \Rightarrow \quad \ln|120 - y| = -t/400 + \ln 40 \quad \Rightarrow \quad \ln|120 - y| = \ln e^{-t/400} + \ln 40 \quad \Rightarrow$

$\ln|120 - y| = \ln(40e^{-t/400}) \quad \Rightarrow \quad |120 - y| = 40e^{-t/400}$. Comme la fonction y est continue, $y(0) = 80$ et que le membre de droite de l'équation ne s'annule jamais, nous en déduisons que $120 - y$ est toujours positive. Donc,

$120 - y = 40e^{-t/400} \quad \Rightarrow \quad y = 120 - 40e^{-t/400}$.

Le pourcentage d'alcool est $p(t) = y(t)/2000 \times 100 = y(t)/20 = 6 - 2e^{-t/400}$. Le pourcentage d'alcool après une heure est $p(60) = 6 - 2e^{-60/400} \approx 4{,}3$.

48. a) Si $y(t)$ est la quantité de sel (en kg) après t minutes, alors $y(0) = 0$ et la quantité de liquide dans le réservoir est maintenue constante à 1000 L.

$$\frac{dy}{dt} = \left(0{,}05\frac{\text{kg}}{\text{L}}\right)\left(5\frac{\text{L}}{\text{min}}\right) + \left(0{,}04\frac{\text{kg}}{\text{L}}\right)\left(10\frac{\text{L}}{\text{min}}\right) - \left(\frac{y(t)}{1000}\frac{\text{kg}}{\text{L}}\right)\left(15\frac{\text{L}}{\text{min}}\right)$$
$$= 0{,}25 + 0{,}40 - 0{,}015y = 0{,}65 - 0{,}015y = \frac{130 - 3y}{200}\frac{\text{kg}}{\text{min}}$$

Par conséquent, $\int \frac{dy}{130 - 3y} = \int \frac{dt}{200}$ et $-\frac{1}{3}\ln|130 - 3y| = \frac{1}{200}t + C$. Puisque $y(0) = 0$, nous obtenons $-\frac{1}{3}\ln 130 = C$,

donc $-\frac{1}{3}\ln|130 - 3y| = \frac{1}{200}t - \frac{1}{3}\ln 130 \quad \Rightarrow \quad \ln|130 - 3y| = -\frac{3}{200}t + \ln 130 = \ln(130e^{-3t/200})$ et $|130 - 3y| = 130e^{-3t/200}$. Comme la fonction y est continue, $y(0) = 0$ et que le membre de droite de l'équation ne s'annule jamais, nous en déduisons que $130 - 3y$ est toujours positive. Par conséquent, $130 - 3y = 130e^{-3t/200}$ et $y = \frac{130}{3}(1 - e^{-3t/200})$ kg .

b) Après une heure, $y = \frac{130}{3}(1 - e^{-3 \cdot 60/200}) = \frac{130}{3}(1 - e^{-0{,}9}) \approx 25{,}7$ kg .

Remarque : Lorsque $t \to \infty$, $y(t) \to \frac{130}{3} = 43\frac{1}{3}$ kg .

 © Groupe Modulo inc., 2013

49. Considérons que la goutte de pluie part de la position repos, de sorte que $v(0) = 0$. $dm/dt = km$ et

$(mv)' = gm \Rightarrow mv' + vm' = gm \Rightarrow mv' + v(km) = gm \Rightarrow v' + vk = g \Rightarrow \frac{dv}{dt} = g - kv \Rightarrow \int \frac{dv}{g - kv} = \int dt \Rightarrow$

$-(1/k)\ln|g - kv| = t + C \Rightarrow \ln|g - kv| = -kt - kC \Rightarrow g - kv = Ae^{-kt}$. $v(0) = 0 \Rightarrow A = g$. Donc,

$kv = g - ge^{-kt} \Rightarrow v = (g/k)(1 - e^{-kt})$. Puisque $k > 0$, lorsque $t \to \infty$, $e^{-kt} \to 0$ et, par conséquent, $\lim_{t\to\infty} v(t) = g/k$.

50. a) $m\frac{dv}{dt} = -kv \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}dt \Rightarrow \ln|v| = -\frac{k}{m}t + C$. Puisque $v(0) = v_0$, $\ln|v_0| = C$. Par conséquent,

$\ln\left|\frac{v}{v_0}\right| = -\frac{k}{m}t \Rightarrow \left|\frac{v}{v_0}\right| = e^{-kt/m} \Rightarrow v(t) = \pm v_0 e^{-kt/m}$. Le signe est + lorsque $t = 0$, et nous supposons que la fonction v est

continue, ce qui fait que le signe est + pour tout t. Donc, $v(t) = v_0e^{-kt/m}$. $ds/dt = v_0e^{-kt/m} \Rightarrow s(t) = -\frac{mv_0}{k}e^{-kt/m} + C'$.

Puisque $s(0) = s_0$, nous obtenons $s_0 = -\frac{mv_0}{k} + C'$, donc $C' = s_0 + \frac{mv_0}{k}$ et $s(t) = s_0 + \frac{mv_0}{k}(1 - e^{-kt/m})$. La distance parcourue du

temps 0 au temps t est $s(t) - s_0$ et la distance totale parcourue est donc $\lim_{t\to\infty}[s(t) - s_0] = \frac{mv_0}{k}$.

Remarque : Lorsque nous calculons la limite, nous considérons que $k > 0$ pour conclure que $\lim_{t\to\infty} e^{-kt/m} = 0$.

b) $m\frac{dv}{dt} = -kv^2 \Rightarrow \frac{dv}{v^2} = -\frac{k}{m}dt \Rightarrow \frac{-1}{v} = -\frac{kt}{m} + C \Rightarrow \frac{1}{v} = \frac{kt}{m} - C$. Puisque $v(0) = v_0$, $C = -\frac{1}{v_0}$ et $\frac{1}{v} = \frac{kt}{m} + \frac{1}{v_0}$. Par

conséquent, $v(t) = \frac{1}{kt/m + 1/v_0} = \frac{mv_0}{kv_0t + m}$. $\frac{ds}{dt} = \frac{mv_0}{kv_0t + m} \Rightarrow s(t) = \frac{m}{k}\int \frac{kv_0dt}{kv_0t + m} = \frac{m}{k}\ln|kv_0t + m| + C'$. Puisque $s(0) = s_0$, nous

obtenons $s_0 = \frac{m}{k}\ln m + C' \Rightarrow C' = s_0 - \frac{m}{k}\ln m \Rightarrow s(t) = s_0 + \frac{m}{k}(\ln|kv_0t + m| - \ln m) = s_0 + \frac{m}{k}\ln\left|\frac{kv_0t + m}{m}\right|$.

Nous pouvons reformuler les équations pour $v(t)$ et $s(t)$ de sorte qu'elles soient $v(t) = \frac{v_0}{1 + (kv_0/m)t}$ et $s(t) = s_0 + \frac{m}{k}\ln\left|1 + \frac{kv_0}{m}t\right|$.

Remarques : Ce modèle de mouvement horizontal dans un médium qui oppose une résistance a été conçu spécialement pour le cas où $v_0 > 0$. Le terme $-kv^2$ représente donc la force de résistance qui cause le ralentissement de l'objet. La valeur absolue qui apparaît dans l'expression pour $s(t)$ n'est pas nécessaire (puisque k, v_0 et m sont tous positifs) et $\lim_{t\to\infty} s(t) = \infty$. En d'autres termes, l'objet parcourt une distance infinie. Toutefois, $\lim_{t\to\infty} v(t) = 0$. Lorsque $v_0 < 0$, le terme $-kv^2$ augmente l'ampleur de la vitesse négative de l'objet. Selon la formule pour $s(t)$, la position de l'objet se rapproche de $-\infty$ lorsque t se rapproche de $m/k(-v_0)$: $\lim_{t\to -m/(kv_0)} s(t) = -\infty$. Encore une fois, l'objet parcourt une distance infinie, mais, cette fois, ceci est accompli en une

 © Groupe Modulo inc., 2013

quantité finie de temps. On constate également que $\lim_{t \to -m/(kv_0)} v(t) = -\infty$ lorsque $v_0 < 0$, ce qui montre que la vitesse de l'objet augmente de façon infinie (la limite n'existe pas).

51. a) $\frac{1}{L_1}\frac{dL_1}{dt} = k\frac{1}{L_2}\frac{dL_2}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt}(\ln L_1) = \frac{d}{dt}(k \ln L_2) \Rightarrow \int \frac{d}{dt}(\ln L_1)dt = \int \frac{d}{dt}(\ln L_2^k)dt \Rightarrow$

$\ln L_1 = \ln L_2^k + C \Rightarrow L_1 = e^{\ln L_2^k + C} = e^{\ln L_2^k} e^C \Rightarrow L_1 = KL_2^k$, où $K = e^C$.

b) Selon la sous-question a) avec $L_1 = B$, $L_2 = V$ et $k = 0{,}0794$, nous obtenons $B = KV^{0{,}0794}$.

52. a) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\theta}\frac{y}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \frac{1}{\theta}\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{\theta}\ln x + C \ [x > 0, y > 0] \Rightarrow y = e^{(\ln x)(1/\theta)+C} = (e^{\ln x})^{1/\theta} e^C \Rightarrow y = Kx^{1/\theta}$, où $K = e^C$.

b) Lorsque $\theta = 1$, nous obtenons $y = Kx$ et la relation entre x et y est donc linéaire. Lorsque $\theta \to \infty$, $1/\theta \to 0$, donc $y \to K$, c'est-à-dire que la teneur en éléments nutritifs du consommateur est constante.

53. a) Le taux de croissance de l'aire est proportionnel à la fois à $\sqrt{A(t)}$ et à $M - A(t)$, c'est-à-dire que le taux est proportionnel au produit de ces deux quantités. Donc, pour une constante k, $dA/dt = k\sqrt{A}(M - A)$. Nous cherchons la valeur maximale de la fonction dA/dt (lorsque le tissu croît le plus rapidement); nous prenons donc la dérivée à l'aide de la dérivation en chaîne et effectuons ensuite un changement de variables pour dA/dt dans l'équation différentielle :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dA}{dt}\right) = k\left[\sqrt{A}(-1)\frac{dA}{dt} + (M - A)\cdot \tfrac{1}{2}A^{-1/2}\frac{dA}{dt}\right] = \tfrac{1}{2}kA^{-1/2}\frac{dA}{dt}[-2A + (M - A)]$$
$$= \tfrac{1}{2}kA^{-1/2}\left[k\sqrt{A}(M - A)\right][M - 3A] = \tfrac{1}{2}k^2(M - A)(M - 3A)$$

Ceci est égal à 0 lorsque $M - A = 0$ [cette situation ne se produit réellement jamais, puisque la courbe de $A(t)$ est asymptotique à la droite $y = M$, comme c'est le cas pour le modèle logistique] et lorsque $M - 3A = 0 \Leftrightarrow A(t) = M/3$. Ceci constitue une valeur maximale selon le test de la dérivée première, puisque la valeur de $\frac{d}{dt}\left(\frac{dA}{dt}\right)$ passe de positive à négative lorsque $A(t) = M/3$.

b) À l'aide d'un logiciel de calcul symbolique, nous obtenons $A(t) = M\left(\frac{Ce^{\sqrt{M}kt} - 1}{Ce^{\sqrt{M}kt} + 1}\right)^2$. Afin de calculer C en fonction de l'aire initiale A_0 et de l'aire maximale M, nous effectuons le changement de variables $t = 0$ et $A = A_0 = A(0)$:

$$A_0 = M\left(\frac{C - 1}{C + 1}\right)^2 \Leftrightarrow (C + 1)\sqrt{A_0} = (C - 1)\sqrt{M} \Leftrightarrow C\sqrt{A_0} + \sqrt{A_0} = C\sqrt{M} - \sqrt{M} \Leftrightarrow \sqrt{M} + \sqrt{A_0} = C\sqrt{M} - C\sqrt{A_0} \Leftrightarrow$$

$\sqrt{M} + \sqrt{A_0} = C\left(\sqrt{M} - \sqrt{A_0}\right) \Leftrightarrow C = \frac{\sqrt{M} + \sqrt{A_0}}{\sqrt{M} - \sqrt{A_0}}$. [On constate que si $A_0 = 0$, alors $C = 1$.]

 © Groupe Modulo inc., 2013

54. a) Suivant l'indice donné, nous utilisons la dérivation en chaîne : $m\dfrac{dv}{dt} = m\dfrac{dv}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt} = mv\dfrac{dv}{dx} = -\dfrac{mgR^2}{(x+R)^2} \quad \Rightarrow$

$\int v\,dv = \int \dfrac{-gR^2\,dx}{(x+R)^2} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{v^2}{2} = \dfrac{gR^2}{x+R} + C$. Lorsque $x = 0$, $v = v_0$, donc $\dfrac{v_0^2}{2} = \dfrac{gR^2}{0+R} + C \quad \Rightarrow$

$C = \frac{1}{2}v_0^2 - gR \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = \dfrac{gR^2}{x+R} - gR$. La vitesse de la fusée, lorsqu'elle sera à sa hauteur maximale, sera 0 et sa hauteur sera $x = h$. Trouvons la valeur de v_0 : $-\frac{1}{2}v_0^2 = \dfrac{gR^2}{h+R} - gR \quad \Rightarrow \quad \dfrac{v_0^2}{2} = g\left[-\dfrac{R^2}{R+h} + \dfrac{R(R+h)}{R+h}\right] = \dfrac{gRh}{R+h} \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\dfrac{2gRh}{R+h}}$.

b) $v_e = \lim\limits_{h\to\infty} v_0 = \lim\limits_{h\to\infty}\sqrt{\dfrac{2gRh}{R+h}} = \lim\limits_{h\to\infty}\sqrt{\dfrac{2gR}{(R/h)+1}} = \sqrt{2gR}$

c) $v_e = \sqrt{2\cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 6\,373\ \text{km}\cdot 1\,000\ \text{m/km}} \approx 11\,176{,}35\ \text{m/s} \approx 11{,}2\ \text{km/s}$

PROJET CONCRET

Combien de temps un réservoir met-il à se vider?

1. a) $V = \pi r^2 h \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dV}{dt} = \pi r^2 \dfrac{dh}{dt}$ [dérivation implicite] $\Rightarrow$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi r^2}\frac{dV}{dt} = \frac{1}{\pi r^2}\left(-a\sqrt{2gh}\right) = \frac{1}{\pi 0{,}6^2}\left[-\pi(0{,}025)^2\sqrt{2\cdot 9{,}8}\sqrt{h}\right] = -\tfrac{\sqrt{19{,}6}}{576}\sqrt{h}$$

b) $\dfrac{dh}{dt} = -\tfrac{\sqrt{19{,}6}}{576}\sqrt{h} \quad \Rightarrow \quad h^{-1/2}dh = -\tfrac{\sqrt{19{,}6}}{576}dt \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{h} = -\tfrac{\sqrt{19{,}6}}{576}t + C$.

$h(0) = 1{,}8 \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{1{,}8} = 0 + C \quad \Rightarrow \quad C = 2\sqrt{1{,}8} \quad \Rightarrow \quad h(t) = \left(-\tfrac{\sqrt{19{,}6}}{1152}t + \sqrt{1{,}8}\right)^2$.

c) Nous voulons calculer t lorsque $h = 0$, donc nous posons $h = 0 = \left(-\tfrac{\sqrt{19{,}6}}{1152}t + \sqrt{1{,}8}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad t = 1152\sqrt{\dfrac{1{,}8}{19{,}6}} \approx 5\ \text{min}\ 49\ \text{sec}$.

2. a) $\dfrac{dh}{dt} = k\sqrt{h} \quad \Rightarrow \quad h^{-1/2}dh = k\,dt \quad [h \neq 0] \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{h} = kt + C \quad \Rightarrow \quad h(t) = \frac{1}{4}(kt + C)^2$. Puisque $h(0) = 10$ cm, la relation $2\sqrt{h(t)} = kt + C$ produit $2\sqrt{10} = C$. De plus, $h(68) = 3$ cm, donc $2\sqrt{3} = 68k + 2\sqrt{10}$ et $k = -\dfrac{\sqrt{10} - \sqrt{3}}{34}$.

Ainsi, $h(t) = \dfrac{1}{4}\left(2\sqrt{10} - \dfrac{\sqrt{10} - \sqrt{3}}{34}t\right)^2 \approx 10 - 0{,}133t + 0{,}000\,44t^2$. Voici un tableau des valeurs de $h(t)$ calculées à une décimale près.

 © Groupe Modulo inc., 2013

t (en s)	$h(t)$ (en cm)
10	8,7
20	7,5
30	6,4
40	5,4
50	4,5
60	3,6

b) Les réponses à cette sous-question seront obtenues de façon expérimentale. Veuillez consulter l'article de Tom Farmer et Fred Gass, *Physical Demonstrations in the Calculus Classroom,* College Mathematics Journal 1992, pages 146 à 148 (en anglais).

3. $V(t) = \pi r^2 h(t) = 9\pi h(t) \Rightarrow \frac{dV}{dh} = 9\pi$ et $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\frac{dh}{dt} = 9\pi\frac{dh}{dt}$. Diamètre = 6 cm $\Rightarrow$ rayon = 3 cm = $\frac{3}{100}$ m. Ainsi,

$\frac{dV}{dt} = -a\sqrt{2gh} \Rightarrow 9\pi\frac{dh}{dt} = -\pi(\frac{3}{100})^2\sqrt{2\cdot 9{,}8h} = -\frac{9\pi}{10\,000}\sqrt{19{,}6h} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = -\frac{\sqrt{19{,}6}\sqrt{h}}{10\,000} \Rightarrow \int h^{-1/2}dh = \int -\frac{\sqrt{19{,}6}}{10\,000}dt \Rightarrow$

$2\sqrt{h} = -\frac{\sqrt{19{,}6}}{10\,000}t + C \Rightarrow \sqrt{h} = -\frac{\sqrt{19{,}6}}{20\,000}t + k \Rightarrow h(t) = (-\frac{\sqrt{19{,}6}}{20\,000}t + k)^2$. La pression de l'eau après t secondes est 9800$h(t)$ N; la condition selon laquelle la pression doit être d'au moins 103 kPa durant 10 minutes (600 secondes) est donc la condition $9800 \cdot h(600) \geq 103\,000$, c'est-à-dire $(k - \frac{600\sqrt{19{,}6}}{10\,000})^2 \geq \frac{103\,000}{9800} \Rightarrow |k - \frac{3\sqrt{19{,}6}}{50}| \geq \sqrt{10{,}5} \Rightarrow k \geq \frac{3\sqrt{19{,}6}}{50} + \sqrt{10{,}5}$. Or, $h(0) = k^2$; la hauteur du réservoir devrait donc être d'au moins $\left(\frac{3\sqrt{19{,}6}}{50} + \sqrt{10{,}5}\right)^2 \approx 12{,}29$ m.

4. a) Si le rayon de la section transversale à la hauteur h est r, alors, selon le théorème de Pythagore, nous obtenons $r^2 = 2^2 - (2 - h)^2$ puisque le rayon du réservoir est 2 m. Donc, $A(h) = \pi r^2 = \pi[4 - (2 - h)^2] = \pi(4h - h^2)$. Par conséquent,

$A(h)\frac{dh}{dt} = -a\sqrt{2gh} \Rightarrow \pi(4h - h^2)\frac{dh}{dt} = -\pi(0{,}01)^2\sqrt{2\cdot 10h} \Rightarrow (4h - h^2)\frac{dh}{dt} = -0{,}0001\sqrt{20h}$.

b) À l'aide de la sous-question a), nous obtenons $(4h^{1/2} - h^{3/2})dh = \left(-0{,}0001\sqrt{20}\right)dt \Rightarrow \frac{8}{3}h^{3/2} - \frac{2}{5}h^{5/2} = \left(-0{,}0001\sqrt{20}\right)t + C$.

$h(0) = 2 \Rightarrow \frac{8}{3}(2)^{3/2} - \frac{2}{5}(2)^{5/2} = C \Rightarrow C = (\frac{16}{3} - \frac{8}{5})\sqrt{2} = \frac{56}{15}\sqrt{2}$. Pour trouver combien de temps il faudra pour que toute l'eau s'écoule du réservoir, nous évaluons t lorsque $h = 0$: $0 = \left(-0{,}0001\sqrt{20}\right)t + C \Rightarrow$

$$t = \frac{C}{0{,}0001\sqrt{20}} = \frac{56\sqrt{2}/15}{0{,}0001\sqrt{20}} = \frac{11\,200\sqrt{10}}{3} \approx 11\,806 \text{ s} \approx 3 \text{ h } 17 \text{ min}$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

PROJET CONCRET

Qu'est-ce qui prend le moins de temps : la montée ou la descente ?

1. $mv' = -pv - mg \;\Rightarrow\; m\dfrac{dv}{dt} = -(pv+mg) \;\Rightarrow\; \displaystyle\int \frac{dv}{pv+mg} = \int -\frac{1}{m}dt \;\Rightarrow\; \frac{1}{p}\ln(pv+mg) = -\frac{1}{m}t + C$ [$pv + mg > 0$]. À $t = 0$, $v = v_0$,

donc $C = \dfrac{1}{p}\ln(pv_0 + mg)$. Par conséquent,

$$\frac{1}{p}\ln(pv+mg) = -\frac{1}{m}t + \frac{1}{p}\ln(pv_0+mg) \;\Rightarrow\; \ln(pv+mg) = -\frac{p}{m}t + \ln(pv_0+mg) \;\Rightarrow$$

$$pv + mg = e^{-pt/m}(pv_0+mg) \;\Rightarrow\; pv = (pv_0+mg)e^{-pt/m} - mg \;\Rightarrow\; v(t) = \left(v_0 + \frac{mg}{p}\right)e^{-pt/m} - \frac{mg}{p}.$$

2. $y(t) = \displaystyle\int v(t)dt = \int\left[\left(v_0 + \frac{mg}{p}\right)e^{-pt/m} - \frac{mg}{p}\right]dt = \left(v_0 + \frac{mg}{p}\right)e^{-pt/m}\left(-\frac{m}{p}\right) - \frac{mg}{p}t + C$.

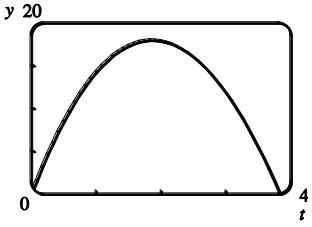
À $t = 0$, $y = 0$, donc $C = \left(v_0 + \dfrac{mg}{p}\right)\dfrac{m}{p}$. Par conséquent,

$$y(t) = \left(v_0 + \frac{mg}{p}\right)\frac{m}{p} - \left(v_0 + \frac{mg}{p}\right)\frac{m}{p}e^{-pt/m} - \frac{mgt}{p} = \left(v_0 + \frac{mg}{p}\right)\frac{m}{p}(1 - e^{-pt/m}) - \frac{mgt}{p}$$

3. $v(t) = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{mg}{p} = \left(v_0 + \dfrac{mg}{p}\right)e^{-pt/m} \;\Rightarrow\; e^{pt/m} = \dfrac{pv_0}{mg} + 1 \;\Rightarrow\; \dfrac{pt}{m} = \ln\left(\dfrac{pv_0}{mg} + 1\right) \;\Rightarrow\; t_1 = \dfrac{m}{p}\ln\left(\dfrac{mg + pv_0}{mg}\right)$.

Avec $m = 1$, $v_0 = 20$, $p = \frac{1}{10}$ et $g = 9{,}8$, nous obtenons $t_1 = 10\ln(\frac{11{,}8}{9{,}8}) \approx 1{,}86$ s.

4.



La figure montre la courbe $y = 1180(1 - e^{-0{,}1t}) - 98t$. Les zéros de la fonction sont situés en $t = 0$ et en $t_2 \approx 3{,}84$. Par conséquent, $t_1 - 0 \approx 1{,}86$ et $t_2 - t_1 \approx 1{,}98$. La descente prend donc environ 0,12 s de plus que la montée; par conséquent, la montée est plus rapide.

5.
$$\begin{aligned} y(2t_1) &= \left(v_0 + \frac{mg}{p}\right)\frac{m}{p}(1 - e^{-2pt_1/m}) - \frac{mg}{p}\cdot 2t_1 \\ &= \left(\frac{pv_0 + mg}{p}\right)\frac{m}{p}[1 - (e^{pt_1/m})^{-2}] - \frac{mg}{p}\cdot 2\frac{m}{p}\ln\left(\frac{pv_0+mg}{mg}\right) \end{aligned}$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

En effectuant le changement de variables $x = e^{pt_1/m} = \frac{pv_0}{mg} + 1 = \frac{pv_0 + mg}{mg}$ (selon le problème 3), nous obtenons

$y(2t_1) = \left(x \cdot \frac{mg}{p} \right) \frac{m}{p}(1 - x^{-2}) - \frac{m^2 g}{p^2} \cdot 2\ln x = \frac{m^2 g}{p^2}\left(x - \frac{1}{x} - 2\ln x \right)$. Or, $p > 0$, $m > 0$, $t_1 > 0 \quad \Rightarrow \quad x = e^{pt_1/m} > e^0 = 1$.

$f(x) = x - \frac{1}{x} - 2\ln x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2} = \frac{(x-1)^2}{x^2} > 0$ pour $x > 1 \quad \Rightarrow \quad f$ est croissante pour $x > 1$.

Puisque $f(1) = 0$, il s'ensuit que $f(x) > 0$ pour tout $x > 1$. Par conséquent, $y(2t_1) = \frac{m^2 g}{p^2} f(x)$ est positive, ce qui signifie que la balle n'a pas encore atteint le sol au temps $2t_1$. Ceci démontre que la durée de la montée est toujours moindre que celle de la descente. *La montée est donc plus rapide*.

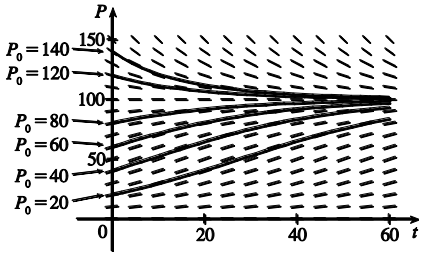
 © Groupe Modulo inc., 2013

5.4 Les modèles de la croissance d'une population

1. a) $dP/dt = 0{,}05P - 0{,}000\,5P^2 = 0{,}05P\,(1 - 0{,}01P) = 0{,}05P\,(1 - P/100)$. En comparant ce résultat à l'équation 4, $dP/dt = kP(1 - P/M)$, nous constatons que la capacité de charge est $M = 100$ et la valeur de k est 0,05.

b) Les pentes presque nulles se produisent lorsque P est près de 0 ou de 100. Les pentes maximales semblent être situées sur la droite $P = 50$. Les solutions sont croissantes pour $0 < P_0 < 100$ et décroissantes pour $P_0 > 100$.

c)

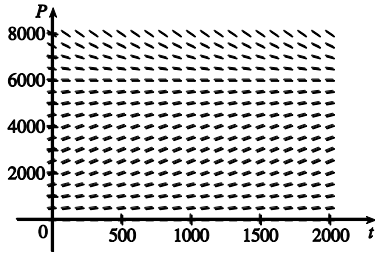


Toutes les courbes se rapprochent de $P = 100$ lorsque t augmente. Comme à la sous-question b), les courbes diffèrent puisqu'elles sont croissantes pour $0 < P_0 < 100$ et décroissantes pour $P_0 > 100$. De plus, certaines courbes ont un point d'inflexion et d'autres n'en ont pas. Il semble que les courbes où $P_0 = 20$ et $P_0 = 40$ ont des points d'inflexion en $P = 50$.

d) Les solutions stationnaires sont $P = 0$ (solution triviale) et $P = 100$. Les solutions croissantes s'éloignent de $P = 0$ et toutes les solutions non nulles se rapprochent de $P = 100$ lorsque $t \to \infty$.

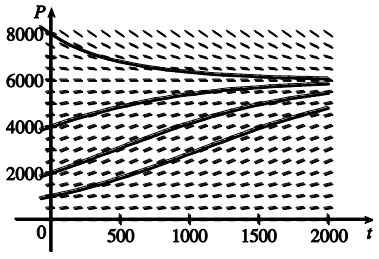
2. a) $M = 6000$ et $k = 0{,}0015 \quad \Rightarrow \quad dP/dt = 0{,}0015P(1 - P/6000)$.

b)



Toutes les courbes intégrales se rapprochent de 6 000 lorsque $t \to \infty$.

c)



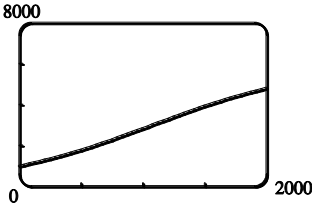
Les courbes où $P_0 = 1000$ et $P_0 = 2000$ semblent être concaves vers le haut tout d'abord et ensuite concaves vers le bas. La courbe où $P_0 = 4000$ semble être toujours concave vers le bas. La courbe où $P_0 = 8000$ semble être toujours concave vers le haut. On trouve des points d'inflexion là où la population croît le plus rapidement.

 © Groupe Modulo inc., 2013

d) La solution de l'exercice 5.2.25 donne un programme qui pourrait permettre de calculer $P(50)$. [Dans ce cas, nous utilisons X = 0, H = 1, N = 50, $Y_1 = 0{,}0015y(1 - y/6000)$ et Y = 1000.] Nous trouvons que $P(50) \approx 1064$.

e) À l'aide de l'équation différentielle 7 avec $M = 6000$, $k = 0{,}0015$ et $P_0 = 1000$, nous obtenons $P(t) = \dfrac{M}{1 + Ae^{-kt}} = \dfrac{6000}{1 + Ae^{-0{,}0015t}}$, où $A = \dfrac{M - P_0}{P_0} = \dfrac{6000 - 1000}{1000} = 5$. Par conséquent, $P(50) = \dfrac{6000}{1 + 5e^{-0{,}0015(50)}} \approx 1064{,}1$, ce qui est très près de l'approximation obtenue à la sous-question d).

f)



Les courbes sont très semblables.

3. a) $\dfrac{dy}{dt} = ky\left(1 - \dfrac{y}{M}\right) \Rightarrow y(t) = \dfrac{M}{1 + Ae^{-kt}}$ avec $A = \dfrac{M - y(0)}{y(0)}$. Avec $M = 8 \times 10^7$, $k = 0{,}71$ et $y(0) = 2 \times 10^7$, nous obtenons le modèle $y(t) = \dfrac{8 \times 10^7}{1 + 3e^{-0{,}71t}}$, donc $y(1) = \dfrac{8 \times 10^7}{1 + 3e^{-0{,}71}} \approx 3{,}23 \times 10^7$ kg.

b) $y(t) = 4 \times 10^7 \Rightarrow \dfrac{8 \times 10^7}{1 + 3e^{-0{,}71t}} = 4 \times 10^7 \Rightarrow 2 = 1 + 3e^{-0{,}71t} \Rightarrow e^{-0{,}71t} = \frac{1}{3} \Rightarrow -0{,}71t = \ln\frac{1}{3} \Rightarrow t = \dfrac{\ln 3}{0{,}71} \approx 1{,}55$ ans

4. a) $\dfrac{dP}{dt} = 0{,}4P - 0{,}001P^2 = 0{,}4P(1 - 0{,}0025P)\left[\frac{0{,}001}{0{,}4} = 0{,}0025\right] = 0{,}4P\left(1 - \dfrac{P}{400}\right)$ $[0{,}0025^{-1} = 400]$ Par conséquent, selon l'équation différentielle 1, $k = 0{,}4$ et la capacité de charge est 400.

b) En nous fondant sur le fait que $P(0) = 50$ et la formule pour dP/dt, nous obtenons

$$P'(0) = \left.\frac{dP}{dt}\right|_{t=0} = 0{,}4(50) - 0{,}001(50)^2 = 20 - 2{,}5 = 17{,}5.$$

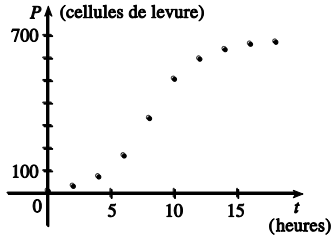
c) Selon l'équation différentielle 7, $A = \dfrac{M - P_0}{P_0} = \dfrac{400 - 50}{50} = 7$, donc $P = \dfrac{400}{1 + 7e^{-0{,}4t}}$. La population atteint 50 % de la capacité de charge, 200, lorsque $200 = \dfrac{400}{1 + 7e^{-0{,}4t}} \Rightarrow 1 + 7e^{-0{,}4t} = 2 \Rightarrow e^{-0{,}4t} = \frac{1}{7} \Rightarrow -0{,}4t = \ln\frac{1}{7} \Rightarrow t = (\ln\frac{1}{7})/(-0{,}4) \approx 4{,}86$ ans.

 © Groupe Modulo inc., 2013

5. Selon l'équation différentielle 7, $A = \dfrac{M - P_0}{P_0} = \dfrac{10\,000 - 1000}{1000} = 9$, donc $P(t) = \dfrac{10\,000}{1 + 9e^{-kt}}$.

$P(1) = 2500 \;\Rightarrow\; 2500 = \dfrac{10\,000}{1 + 9e^{-k(1)}} \;\Rightarrow\; 1 + 9e^{-k} = 4 \;\Rightarrow\; 9e^{-k} = 3 \;\Rightarrow\; e^{-k} = \frac{1}{3} \;\Rightarrow\; -k = \ln\frac{1}{3} \;\Rightarrow\; k = \ln 3$ Après un autre trois ans, $t = 4$ et $P(4) = \dfrac{10\,000}{1 + 9e^{-(\ln 3)4}} = \dfrac{10\,000}{1 + 9(e^{\ln 3})^{-4}} = \dfrac{10\,000}{1 + 9(3)^{-4}} = \dfrac{10\,000}{1 + \frac{1}{9}} = \dfrac{10\,000}{\frac{10}{9}} = 9000$.

6. a)



Nous estimons graphiquement à 680 la capacité de charge M pour la population de cellules de levure.

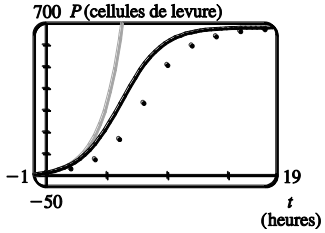
b) Une approximation du taux de croissance relatif initial est $\dfrac{1}{P_0}\dfrac{dP}{dt} = \dfrac{1}{18} \cdot \dfrac{39 - 18}{2 - 0} = \dfrac{7}{12} = 0{,}58\overline{3}$.

c) Un modèle exponentiel est $P(t) = 18e^{7t/12}$. Un modèle logistique est $P(t) = \dfrac{680}{1 + Ae^{-7t/12}}$, où $A = \frac{680 - 18}{18} = \frac{331}{9}$.

d)

Temps (heures)	Valeurs observées	Modèle exponentiel	Modèle logistique
0	18	18	18
2	39	58	55
4	80	186	149
6	171	596	322
8	336	1 914	505
10	509	6 147	614
12	597	19 739	658
14	640	63 389	673
16	664	203 558	678
18	672	653 679	679

 © Groupe Modulo inc., 2013



Le modèle exponentiel n'est pas très bien ajusté aux données, sauf pour les deux premières valeurs observées. Le modèle logistique présente de plus grands écarts pour les valeurs intermédiaires que pour les valeurs à chaque extrémité, mais est en général bien ajusté aux données, comme le montre la figure.

e) $P(7) = \dfrac{680}{1 + \frac{331}{9} e^{-7(7/12)}} \approx 420$ cellules de levure

7. a) Considérons que la différence entre le taux de natalité et le taux de mortalité est de 20 millions/année. Considérons que $t = 0$ correspond à l'année 1990 et utilisons le milliard comme unité dans tous les calculs. $k \approx \dfrac{1}{P}\dfrac{dP}{dt} = \dfrac{1}{5{,}3}(0{,}02) = \dfrac{1}{265}$, donc

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right) = \frac{1}{265}P\left(1 - \frac{P}{100}\right), \quad P \text{ en milliards}$$

b) $A = \dfrac{M - P_0}{P_0} = \dfrac{100 - 5{,}3}{5{,}3} = \dfrac{947}{53} \approx 17{,}8679$. $P(t) = \dfrac{M}{1 + Ae^{-kt}} = \dfrac{100}{1 + \frac{947}{53}e^{-(1/265)t}}$, donc $P(10) \approx 5{,}49$ milliards.

c) $P(110) \approx 7{,}81$ et $P(510) \approx 27{,}72$. Les prédictions sont de 7,81 milliards en 2100 et de 27,72 milliards en 2500.

d) Si $M = 50$, alors $P(t) = \dfrac{50}{1 + \frac{447}{53}e^{-(1/265)t}}$. Donc $P(10) \approx 5{,}48$, $P(110) \approx 7{,}61$ et $P(510) \approx 22{,}41$. Les prédictions deviennent 5,48 milliards en 2000, 7,61 milliards en 2100 et 22,41 milliards en 2500.

8. a) Si nous supposons que la capacité de charge pour la population mondiale est 100 milliards, une capacité de charge pour les États-Unis de 3 à 5 milliards, calculée à l'aide des populations actuelles et de simples proportions, semble raisonnable. Nous utiliserons $M = 4$ milliards ou 4000 millions. Avec $t = 0$ correspondant à 1980, nous obtenons $P(t) = \dfrac{4000}{1 + (\frac{4000 - 250}{250})e^{-kt}} = \dfrac{4000}{1 + 15e^{-kt}}$.

b) $P(10) = 275 \Rightarrow \dfrac{4000}{1 + 15e^{-10k}} = 275 \Rightarrow 1 + 15e^{-10k} = \dfrac{4000}{275} \Rightarrow e^{-10k} = \dfrac{\frac{160}{11} - 1}{15} \Rightarrow$

$-10k = \ln\frac{149}{165} \Rightarrow k = -\frac{1}{10}\ln\frac{149}{165} \approx 0{,}010\,199\,92$.

c) $2100 - 1990 = 110$ et $P(110) \approx 680$ millions.

$2200 - 1990 = 210$ et $P(210) \approx 1449$ millions ou environ 1,4 milliard.

 © Groupe Modulo inc., 2013

d) $P(t)=350 \;\Rightarrow\; \dfrac{4000}{1+15e^{-kt}}=350 \;\Rightarrow\; 1+15e^{-kt}=\frac{80}{7} \;\Rightarrow\; e^{-kt}=\frac{73}{7}\cdot\frac{1}{15} \;\Rightarrow\; -kt=\ln\frac{73}{105} \;\Rightarrow\; t=10\dfrac{\ln\frac{73}{105}}{\ln\frac{149}{165}}\approx 35{,}64\approx 36$. Nous prédisons donc que la population américaine excédera 350 millions d'habitants dans l'année 1990 + 36 = 2026.

9. a) Soit $\dfrac{dy}{dt}=ky(1-y)$, où y est la fraction de la population qui a entendu la rumeur.

b) À l'aide de l'équation logistique 4, $\dfrac{dP}{dt}=kP\left(1-\dfrac{P}{M}\right)$ et en posant le changement de variables $y=\dfrac{P}{M}$, $P = My$ et $\dfrac{dP}{dt}=M\dfrac{dy}{dt}$ et obtenons $M\dfrac{dy}{dt}=k(My)(1-y) \;\Leftrightarrow\; \dfrac{dy}{dt}=ky(1-y)$, soit l'équation donnée à la sous-question a).

Or, la solution de l'équation 4 est $P(t)=\dfrac{M}{1+Ae^{-kt}}$, où $A=\dfrac{M-P_0}{P_0}$.

Nous effectuons le même changement de variables et obtenons $My=\dfrac{M}{1+\dfrac{M-My_0}{My_0}e^{-kt}} \;\Rightarrow\; y=\dfrac{y_0}{y_0+(1-y_0)e^{-kt}}$. Un autre développement consisterait à utiliser les étapes données à la solution de l'équation 4.

c) Soit t le nombre d'heures écoulées depuis 8 heures. Alors, $y_0=y(0)=\frac{80}{1000}=0{,}08$ et $y(4)=\frac{1}{2}$, donc $\dfrac{1}{2}=y(4)=\dfrac{0{,}08}{0{,}08+0{,}92e^{-4k}}$.

Par conséquent, $0{,}08 + 0{,}92e^{-4k} = 0{,}16$, $e^{-4k}=\frac{0{,}08}{0{,}92}=\frac{2}{23}$ et $e^{-k}=(\frac{2}{23})^{1/4}$, donc $y=\dfrac{0{,}08}{0{,}08+0{,}92(2/23)^{t/4}}=\dfrac{2}{2+23(2/23)^{t/4}}$. Si nous calculons la valeur de t, nous obtenons

$2y+23y\left(\dfrac{2}{23}\right)^{t/4}=2 \;\Rightarrow\; \left(\dfrac{2}{23}\right)^{t/4}=\dfrac{2-2y}{23y} \;\Rightarrow\; \left(\dfrac{2}{23}\right)^{t/4}=\dfrac{2}{23}\cdot\dfrac{1-y}{y} \;\Rightarrow\; \left(\dfrac{2}{23}\right)^{t/4-1}=\dfrac{1-y}{y}$. Il s'ensuit

que $\dfrac{t}{4}-1=\dfrac{\ln[(1-y)/y]}{\ln\frac{2}{23}}$, donc $t=4\left[1+\dfrac{\ln((1-y)/y)}{\ln\frac{2}{23}}\right]$. Lorsque $y = 0{,}9$, $\dfrac{1-y}{y}=\frac{1}{9}$, donc $t=4\left(1-\dfrac{\ln 9}{\ln\frac{2}{23}}\right)\approx 7{,}6$ h ou 7 h 36 min .

Par conséquent, 90 % de la population aura entendu la rumeur à 15 heures 36 minutes.

10. a) $P(0) = P_0 = 400$, $P(1) = 1200$ et $M = 10\,000$. À partir de la solution de l'équation différentielle logistique $P(t)=\dfrac{P_0M}{P_0+(M-P_0)e^{-kt}}$, nous obtenons $P=\dfrac{400(10\,000)}{400+(9600)e^{-kt}}=\dfrac{10\,000}{1+24e^{-kt}}$.

$P(1)=1200 \;\Rightarrow\; 1+24e^{-k}=\frac{100}{12} \;\Rightarrow\; e^{k}=\frac{288}{88} \;\Rightarrow\; k=\ln\frac{36}{11}$. Donc, $P=\dfrac{10\,000}{1+24e^{-t\ln(36/11)}}=\dfrac{10\,000}{1+24\cdot(11/36)^t}$.

b) $5000=\dfrac{10\,000}{1+24(11/36)^t} \;\Rightarrow\; 24(\frac{11}{36})^t=1 \;\Rightarrow\; t\ln\frac{11}{36}=\ln\frac{1}{24} \;\Rightarrow\; t\approx 2{,}68$ années .

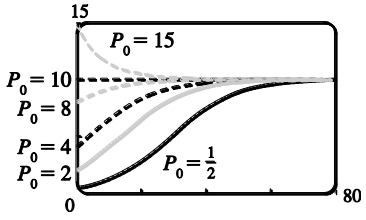
 © Groupe Modulo inc., 2013

11. a) $\dfrac{dP}{dt} = kP\left(1-\dfrac{P}{M}\right) \Rightarrow \dfrac{d^2P}{dt^2} = k\left[P\left(-\dfrac{1}{M}\dfrac{dP}{dt}\right)+\left(1-\dfrac{P}{M}\right)\dfrac{dP}{dt}\right] = k\dfrac{dP}{dt}\left(-\dfrac{P}{M}+1-\dfrac{P}{M}\right)$

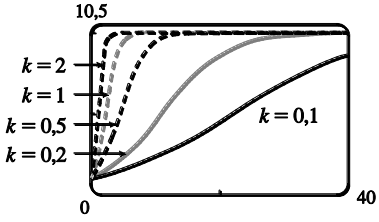
$= k\left[kP\left(1-\dfrac{P}{M}\right)\right]\left(1-\dfrac{2P}{M}\right) = k^2P\left(1-\dfrac{P}{M}\right)\left(1-\dfrac{2P}{M}\right)$

b) P croît le plus rapidement lorsque P' atteint un maximum, c'est-à-dire lorsque $P'' = 0$. Selon la sous-question a), $P''=0 \Leftrightarrow P=0$, $P = M$ ou $P = M/2$. Puisque $0 < P < M$, nous constatons que $P''=0 \Leftrightarrow P = M/2$.

12. Gardons tout d'abord k constant (à 0,1, par exemple) et changeons P_0 dans la fonction $P = \dfrac{10P_0}{P_0+(10-P_0)e^{-0,1t}}$. (On constate que P_0 est le point d'intersection de la courbe de P.) Si $P_0 = 0$, la fonction s'annule dans tous les cas. Pour $0 < P_0 < 5$, la courbe a un point d'inflexion qui se déplace vers la droite à mesure que P_0 diminue. Si $5 < P_0 < 10$, la courbe est concave vers le bas dans tous les cas. (Nous n'examinons que les cas où $t \geq 0$.) Si $P_0 = 10$, la fonction est la fonction constante $P = 10$ et si $P_0 > 10$, la fonction est décroissante. Pour tout $P_0 \neq 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} P = 10$.

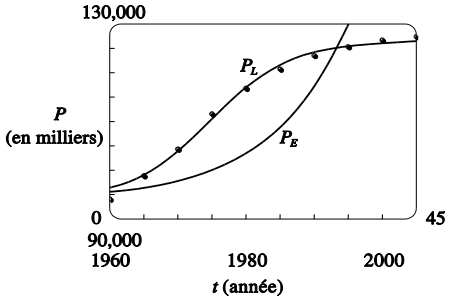


Gardons maintenant P_0 constant ($P_0 = 1$) et changeons k dans la fonction $P = \dfrac{10}{1+9e^{-kt}}$. Il semble qu'à mesure que k augmente, la courbe se rapproche de la droite $P = 10$ de plus en plus rapidement. (On constate que la seule différence dans la forme des courbes est l'échelle horizontale; si nous choisissons des échelles appropriées pour l'axe des x, toutes les courbes semblent identiques.)

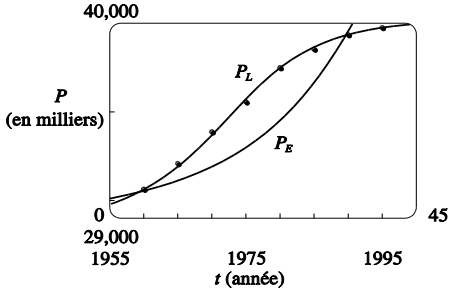


13. Suivant l'indice donné, considérons que $t = 0$ correspond à 1960 et soustrayons 94 000 de chaque valeur de la population. Utilisons ensuite une calculatrice pour obtenir les modèles et ajoutons 94 000, ce qui produira la fonction exponentielle $P_E(t) = 1578,3(1,0933)^t + 94\,000$ et la fonction logistique $P_L(t) = \dfrac{32\,658,5}{1+12,75e^{-0,1706t}} + 94\,000$. P_L est un modèle raisonnablement ajusté tandiss que P_E ne l'est pas puisqu'un modèle exponentiel n'est utilisé que pour les quelques premières données ponctuelles.

 © Groupe Modulo inc., 2013



14. Suivant l'indice donné, considérons que $t = 0$ correspond à 1955 et soustrayons 29 000 de chaque valeur de la population. Utilisons ensuite une calculatrice pour obtenir les modèles, puis ajoutons 29 000, ce qui produira la fonction exponentielle $P_E(t) = 1094(1{,}066\,8)^t + 29\,000$ et la fonction logistique $P_L(t) = \dfrac{11\,103{,}3}{1+12{,}34e^{-0{,}1471t}} + 29\,000$. P_L est un modèle raisonnablement ajusté tandis que P_E ne l'est pas puisqu'un modèle exponentiel n'est utilisé que pour les quelques premières données ponctuelles.



15. a) $\dfrac{dP}{dt} = kP - m = k\left(P - \dfrac{m}{k}\right)$. Soit $y = P - \dfrac{m}{k}$, donc $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dP}{dt}$ et l'équation différentielle devient $\dfrac{dy}{dt} = ky$. La solution est $y = y_0e^{kt} \quad \Rightarrow \quad P - \dfrac{m}{k} = \left(P_0 - \dfrac{m}{k}\right)e^{kt} \quad \Rightarrow \quad P(t) = \dfrac{m}{k} + \left(P_0 - \dfrac{m}{k}\right)e^{kt}$.

b) Puisque $k > 0$, il y aura une croissance exponentielle $\Leftrightarrow \quad P_0 - \dfrac{m}{k} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad m < kP_0$.

c) La population demeurera constante si $P_0 - \dfrac{m}{k} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = kP_0$. Elle diminuera si $P_0 - \dfrac{m}{k} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad m > kP_0$.

d) $P_0 = 8\,000\,000$, $k = \alpha - \beta = 0{,}016$, $m = 210\,000 \quad \Rightarrow \quad m > kP_0 (= 128\,000)$, donc, selon la sous-question c), la population était en décroissance.

16. a) $\dfrac{dy}{dt} = ky^{1+c} \quad \Rightarrow \quad y^{-1-c}dy = k\ dt \Rightarrow \dfrac{y^{-c}}{-c} = kt + C$. Puisque $y(0) = y_0$, nous obtenons $C = \dfrac{y_0^{-c}}{-c}$. Par conséquent, $\dfrac{y^{-c}}{-c} = kt + \dfrac{y_0^{-c}}{-c}$ ou $y^{-c} = y_0^{-c} - ckt$. Donc, $y^c = \dfrac{1}{y_0^{-c} - ckt} = \dfrac{y_0^c}{1 - cy_0^c kt}$ et $y(t) = \dfrac{y_0}{(1 - cy_0^c kt)^{1/c}}$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

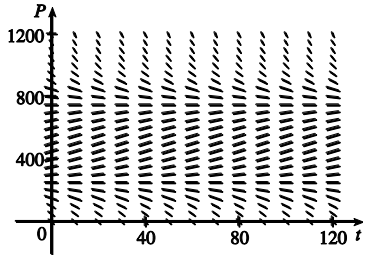
b) $y(t) \to \infty$ lorsque $1 - cy_0^c kt \to 0$, c'est-à-dire lorsque $t \to \dfrac{1}{cy_0^c k}$. Déterminons que $T = \dfrac{1}{cy_0^c k}$. Alors, $\lim\limits_{t \to T^-} y(t) = \infty$.

c) Selon les données de la sous-question, nous avons $c = 0{,}01$, $y(0) = 2$ et $y(3) = 16$, où le temps t est donné en mois. Par conséquent, $y_0 = 2$ et $16 = y(3) = \dfrac{y_0}{(1 - cy_0^c k \cdot 3)^{1/c}}$. Puisque $T = \dfrac{1}{cy_0^c k}$, nous calculerons la valeur de $cy_0^c k$.

$16 = \dfrac{2}{(1 - 3cy_0^c k)^{100}} \Rightarrow 1 - 3cy_0^c k = (\frac{1}{8})^{0{,}01} = 8^{-0{,}01} \Rightarrow cy_0^c k = \frac{1}{3}(1 - 8^{-0{,}01})$. Par conséquent, la fin du monde aura lieu lorsque $t = T = \dfrac{1}{cy_0^c k} = \dfrac{3}{1 - 8^{-0{,}01}} \approx 145{,}77$ mois ou 12,15 années.

17. a) Le terme −15 représente un prélèvement de poissons à un taux constant, dans ce cas 15 poissons par semaine. C'est le taux de capture des poissons.

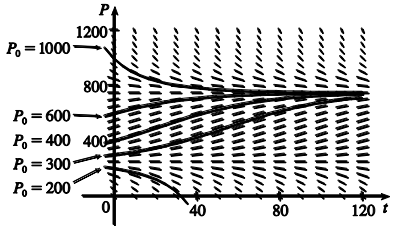
b)



c) Selon le graphique à la sous-question b), il semble que $P(t) = 250$ et $P(t) = 750$ sont les solutions stationnaires. Nous confirmons ce fait de façon analytique en trouvant la solution de l'équation $dP/dt = 0$: $0{,}08P(1 - P/1\,000) - 15 = 0 \Rightarrow$

$0{,}08P - 0{,}000\,08P^2 - 15 = 0 \Rightarrow -0{,}000\,08(P^2 - 1000P + 187\,500) = 0 \Rightarrow (P - 250)(P - 750) = 0 \Rightarrow P = 250$ ou 750 .

d)



Pour $0 < P_0 < 250$, $P(t)$ diminue jusqu'à ce qu'il atteigne 0. Pour $P_0 = 250$, $P(t)$ demeure constant. Pour $250 < P_0 < 750$, $P(t)$ augmente et se rapproche de 750. Pour $P_0 = 750$, $P(t)$ demeure constant. Pour $P_0 > 750$, $P(t)$ diminue et se rapproche de 750.

e) $\dfrac{dP}{dt} = 0{,}08P\left(1 - \dfrac{P}{1000}\right) - 15 \Leftrightarrow -\dfrac{100\,000}{8} \cdot \dfrac{dP}{dt} = (0{,}08P - 0{,}000\,08P^2 - 15) \cdot \left(-\dfrac{100\,000}{8}\right) \Leftrightarrow$

$-12\,500\dfrac{dP}{dt} = P^2 - 1000P + 187\,500 \Leftrightarrow \dfrac{dP}{(P - 250)(P - 750)} = -\dfrac{1}{12\,500}dt \Leftrightarrow$

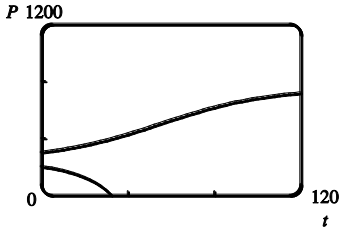
$\int\left(\dfrac{-1/500}{P - 250} + \dfrac{1/500}{P - 750}\right)dP = -\dfrac{1}{12\,500}dt \Leftrightarrow \int\left(\dfrac{1}{P - 250} - \dfrac{1}{P - 750}\right)dP = \frac{1}{25}dt \Leftrightarrow$

 © Groupe Modulo inc., 2013

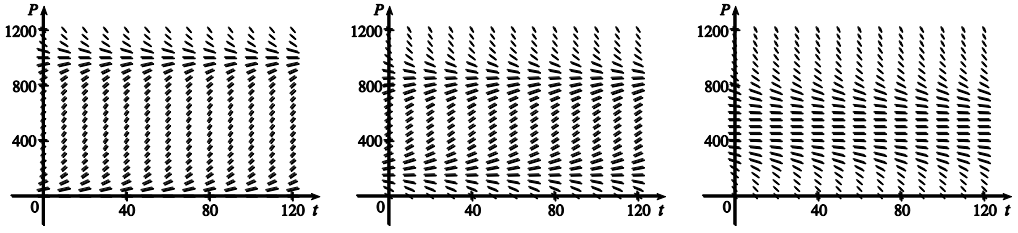
$\ln|P-250|-\ln|P-750| = \frac{1}{25}t + C \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left|\frac{P-250}{P-750}\right| = \frac{1}{25}t + C \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{P-250}{P-750}\right| = e^{t/25+C} = ke^{t/25} \quad \Leftrightarrow$

$\frac{P-250}{P-750} = ke^{t/25} \quad \Leftrightarrow \quad P-250 = Pke^{t/25} - 750ke^{t/25} \quad \Leftrightarrow \quad P - Pke^{t/25} = 250 - 750ke^{t/25} \quad \Leftrightarrow \quad P(t) = \frac{250-750ke^{t/25}}{1-ke^{t/25}}$. Si $t = 0$ et $P = 200$, alors $200 = \frac{250-750k}{1-k} \quad \Leftrightarrow \quad 200 - 200k = 250 - 750k \quad \Leftrightarrow \quad 550k = 50 \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{1}{11}$. D'une façon similaire, si $t = 0$ et $P = 300$, alors $k = -\frac{1}{9}$. En simplifiant P à l'aide de ces deux valeurs de k, nous obtenons

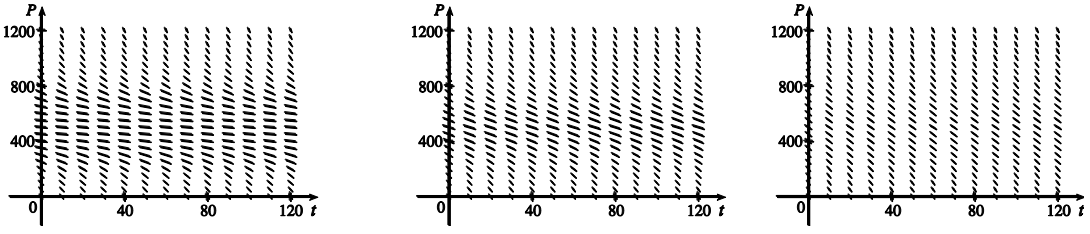
$P(t) = \frac{250(3e^{t/25}-11)}{e^{t/25}-11}$ et $P(t) = \frac{750(e^{t/25}+3)}{e^{t/25}+9}$.



18. a)



c=0 c=10 c=20



c=21 c=25 c=30

b) Pour $0 \le c \le 20$, il existe au moins une solution stationnaire. Pour $c > 20$, la population est toujours vouée à l'extinction.

c) $\frac{dP}{dt} = 0{,}08P - 0{,}000\,08P^2 - c$. $\frac{dP}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P = \frac{-0{,}08 \pm \sqrt{(0{,}08)^2 - 4(-0{,}000\,08)(-c)}}{2(-0{,}000\,08)}$, qui a au moins une solution lorsque le discriminant n'est pas négatif $\Rightarrow \quad 0{,}0064 - 0{,}000\,32c \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad c \le 20$. Pour $0 \le c \le 20$, il existe au moins une valeur de P telle que $dP/dt = 0$ et, par conséquent, au moins une solution stationnaire. Pour $c > 20$, $dP/dt < 0$ et la population est toujours vouée à l'extinction.

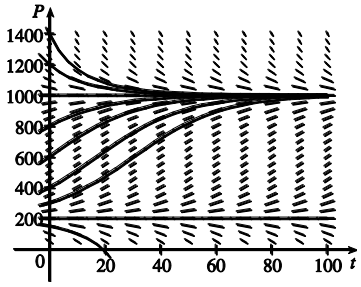
d) La capture hebdomadaire devrait être de moins de 20 poissons.

 © Groupe Modulo inc., 2013

19. a) $\dfrac{dP}{dt} = (kP)\left(1-\dfrac{P}{M}\right)\left(1-\dfrac{m}{P}\right)$. Si $m < P < M$, alors $dP/dt = (+)(+)(+) = +$ $\Rightarrow$ P est croissante. Si $0 < P < m$,

alors $dP/dt = (+)(+)(-) = -$ $\Rightarrow$ P est décroissante.

b)



$k = 0{,}08$, $M = 1000$ et $m = 200$ $\Rightarrow$

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}08P\left(1-\frac{P}{1000}\right)\left(1-\frac{200}{P}\right)$$

Pour $0 < P_0 < 200$, la population est vouée à l'extinction. Pour $P_0 = 200$, la population demeure stable. Pour $200 < P_0 < 1000$, la population augmente et s'approche de 1000. Pour $P_0 > 1000$, la population diminue et s'approche de 1000. Les solutions stationnaires sont $P(t) = 200$ et $P(t) = 1000$.

c) $\dfrac{dP}{dt} = kP\left(1-\dfrac{P}{M}\right)\left(1-\dfrac{m}{P}\right) = kP\left(\dfrac{M-P}{M}\right)\left(\dfrac{P-m}{P}\right) = \dfrac{k}{M}(M-P)(P-m)$ $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\int \frac{dP}{(M-P)(P-m)} = \int \frac{k}{M}\,dt$. Décomposons en

fractions partielles, $\dfrac{1}{(M-P)(P-m)} = \dfrac{A}{M-P} + \dfrac{B}{P-m}$, donc $A(P-m) + B(M-P) = 1$.

Si $P = m$, $B = \dfrac{1}{M-m}$; si $P = M$, $A = \dfrac{1}{M-m}$ donc $\dfrac{1}{M-m}\displaystyle\int\left(\frac{1}{M-P} + \frac{1}{P-m}\right)dP = \int \frac{k}{M}\,dt$ $\Rightarrow$

$\dfrac{1}{M-m}(-\ln|M-P| + \ln|P-m|) = \dfrac{k}{M}t + C$ $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{M-m}\ln\left|\dfrac{P-m}{M-P}\right| = \dfrac{k}{M}t + C$ $\Rightarrow$

$\ln\left|\dfrac{P-m}{M-P}\right| = (M-m)\dfrac{k}{M}t + C_1$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{P-m}{M-P} = De^{(M-m)(k/M)t}$ $[D = \pm e^{C_1}]$.

Soit $t = 0$: $\dfrac{P_0-m}{M-P_0} = D$. Donc, $\dfrac{P-m}{M-P} = \dfrac{P_0-m}{M-P_0}e^{(M-m)(k/M)t}$.

En calculant la valeur de P, nous obtenons $P(t) = \dfrac{m(M-P_0) + M(P_0-m)e^{(M-m)(k/M)t}}{M-P_0+(P_0-m)e^{(M-m)(k/M)t}}$.

d) Si $P_0 < m$, alors $P_0 - m < 0$. Soit $N(t)$ le numérateur de l'expression pour $P(t)$ à la sous-question c). Alors, $N(0) = P_0(M-m) > 0$

et $P_0 - m < 0$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{t\to\infty} M(P_0-m)e^{(M-m)(k/M)t} = -\infty$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{t\to\infty} N(t) = -\infty$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

Comme la fonction N est continue, il existe un nombre t tel que $N(t) = 0$ et, par conséquent, $P(t) = 0$. L'espèce est donc vouée à l'extinction.

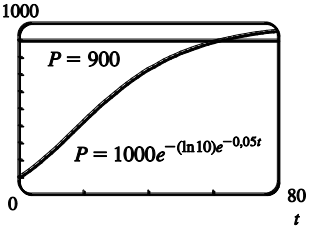
20. a) $\dfrac{dP}{dt} = c\ln\left(\dfrac{M}{P}\right)P \;\Rightarrow\; \displaystyle\int \frac{dP}{P\ln(M/P)} = \int c\,dt$. Soit $u = \ln\left(\dfrac{M}{P}\right) = \ln M - \ln P \;\Rightarrow\; du = -\dfrac{dP}{P} \;\Rightarrow$

$\displaystyle\int -\frac{du}{u} = ct + D \;\Rightarrow\; \ln|u| = -ct - D \;\Rightarrow\; |u| = e^{-(ct+D)} \;\Rightarrow\; |\ln(M/P)| = e^{-(ct+D)} \;\Rightarrow\; \ln(M/P) = \pm e^{-(ct+D)}$. En posant $t = 0$, nous obtenons $\ln(M/P_0) = \pm e^{-D}$, donc $\ln(M/P) = \pm e^{-ct-D} = \pm e^{-ct}e^{-D} = \ln(M/P_0)e^{-ct} \;\Rightarrow\; M/P = e^{\ln(M/P_0)e^{-ct}} \;\Rightarrow$

$P(t) = Me^{-\ln(M/P_0)e^{-ct}}$, $c \neq 0$.

b) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty} Me^{-\ln(M/P_0)e^{-ct}} = Me^{-\ln(M/P_0)\cdot 0} = Me^0 = M$

c)



Les courbes semblent très semblables. Pour la fonction de Gompertz, $P(40) \approx 732$, ce qui est presque la même chose que pour la fonction logistique. La fonction de Gompertz atteint $P = 900$ en $t \approx 61{,}7$ et sa valeur en $t = 80$ est d'environ 959; elle n'augmente donc pas tout à fait aussi rapidement que la courbe de la fonction logistique.

d) $\dfrac{dP}{dt} = c\ln\left(\dfrac{M}{P}\right)P = cP(\ln M - \ln P) \;\Rightarrow$

$$\frac{d^2P}{dt^2} = c\left[P\left(-\frac{1}{P}\frac{dP}{dt}\right) + (\ln M - \ln P)\frac{dP}{dt}\right] = c\frac{dP}{dt}\left[-1 + \ln\left(\frac{M}{P}\right)\right]$$
$$= c[c\ln(M/P)P][\ln(M/P) - 1] = c^2P\ln(M/P)[\ln(M/P) - 1]$$

Puisque $0 < P < M$, $P'' = 0 \;\Leftrightarrow\; \ln(M/P) = 1 \;\Leftrightarrow\; M/P = e \;\Leftrightarrow\; P = M/e$. $P'' > 0$ pour $0 < P < M/e$ et $P'' < 0$ pour $M/e < P < M$, donc P' est un maximum (et P augmente le plus rapidement) lorsque $P = M/e$.

Remarque : Si $P > M$, alors $\ln(M/P) < 0$, donc $P''(t) > 0$.

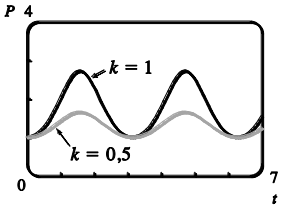
21. a) $dP/dt = kP\cos(rt - \phi) \;\Rightarrow\; (dP)/P = k\cos(rt - \phi)dt \;\Rightarrow\; \displaystyle\int (dP)/P = k\int \cos(rt - \phi)dt \;\Rightarrow \ln P = (k/r)\sin(rt - \phi) + C.$

(Comme il s'agit d'un modèle de croissance, $P > 0$ et nous pouvons écrire $\ln P$ plutôt que $\ln|P|$.) Puisque $P(0) = P_0$, nous obtenons $\ln P_0 = (k/r)\sin(-\phi) + C = -(k/r)\sin\phi + C \;\Rightarrow\; C = \ln P_0 + (k/r)\sin\phi$. Par conséquent, $\ln P = (k/r)\sin(rt - \phi) + \ln P_0 + (k/r)\sin\phi$, qu'on peut également présenter comme

$\ln(P/P_0) = (k/r)[\sin(rt - \phi) + \sin\phi]$ ou, après exponentiation, $P(t) = P_0e^{(k/r)[\sin(rt-\phi)+\sin\phi]}$.

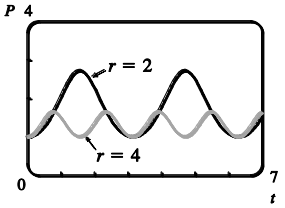
 © Groupe Modulo inc., 2013

b) À mesure que k augmente, l'amplitude augmente, mais la valeur minimum demeure la même.



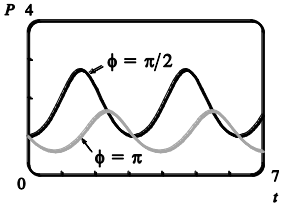
Valeurs comparées de k avec $P_0 = 1$, $r = 2$, et $\phi = \pi/2$

À mesure que r augmente, l'amplitude et la période diminuent.



Valeurs comparées de k avec $P_0 = 1$, $k = 1$, et $\phi = \pi/2$

Une variation de ϕ résulte en de légers ajustements dans le déplacement de phase et l'amplitude.



Valeurs comparées de ϕ avec $P_0 = 1$, $k = 1$, et $r = 2$

$P(t)$ oscille entre $P_0e^{(k/r)(1+\sin\phi)}$ et $P_0e^{(k/r)(-1+\sin\phi)}$ (les valeurs extrêmes sont atteintes lorsque $rt - \phi$ est un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$), donc $\lim_{t\to\infty} P(t)$ n'existe pas.

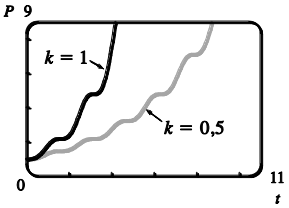
22. a) $dP/dt = kP\cos^2(rt-\phi) \Rightarrow (dP)/P = k\cos^2(rt-\phi)dt \Rightarrow \int(dP)/P = k\int\cos^2(rt-\phi)dt \Rightarrow$

$\ln P = k\int\frac{1+\cos(2(rt-\phi))}{2}dt = \frac{k}{2}t + \frac{k}{4r}\sin(2(rt-\phi)) + C$. À partir de $P(0) = P_0$, nous obtenons $\ln P_0 = \frac{k}{4r}\sin(-2\phi) + C = C - \frac{k}{4r}\sin 2\phi$, donc $C = \ln P_0 + \frac{k}{4r}\sin 2\phi$ et $\ln P = \frac{k}{2}t + \frac{k}{4r}\sin(2(rt-\phi)) + \ln P_0 + \frac{k}{4r}\sin 2\phi$.

En simplifiant, nous obtenons $\ln\frac{P}{P_0} = \frac{k}{2}t + \frac{k}{4r}[\sin(2(rt-\phi)) + \sin 2\phi] = f(t)$ ou $P(t) = P_0e^{f(t)}$.

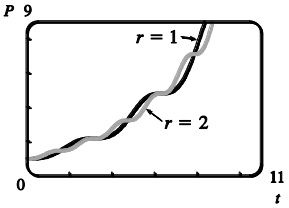
b) Une augmentation de k étire la courbe de P verticalement tout en conservant la relation $P(0) = P_0$.

 © Groupe Modulo inc., 2013



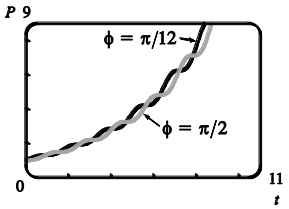
Valeurs comparées de k avec $P_0 = 1$, $r = 2$, et $\phi = \pi/2$

Une augmentation de r comprime la courbe de P horizontalement, un peu comme le changement de période à l'exercice 19.



Valeurs comparées de r avec $P_0 = 1$,$k = 0{,}5$, et $\phi = \pi/2$

Comme à l'exercice 19, une variation de ϕ ne résulte qu'en de légers ajustements dans la croissance de P, comme le montre la figure.



Valeurs comparées de ϕ avec $P_0 = 1$, $k = 0{,}5$, et $r = 2$

$f'(t) = k/2 + [k/(4r)][2r\cos(2(rt - \phi))] = (k/2)[1 + \cos(2(rt - \phi))] \geq 0$. Puisque $P(t) = P_0 e^{f(t)}$, nous obtenons $P'(t) = P_0 f'(t) e^{f(t)} \geq 0$, et l'égalité ne se produit que si $\cos(2(rt - \phi)) = -1$, c'est-à-dire lorsque $rt - \phi$ est un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$. Par conséquent, $P(t)$ est une fonction croissante sur l'intervalle $]0, \infty[$. On peut également présenter P comme $P(t) = P_0 e^{kt/2} e^{(k/4r)[\sin(2(rt-\phi))+\sin 2\phi]}$. La deuxième fonction exponentielle oscille entre $e^{(k/4r)(1+\sin 2\phi)}$ et $e^{(k/4r)(-1+\sin 2\phi)}$ alors que la première, $e^{kt/2}$, s'accroît sans limite. Donc, $\lim_{t\to\infty} P(t) = \infty$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

5. Révision

Compréhension des concepts

1. a) Une équation différentielle est une équation comportant une fonction inconnue et une ou plusieurs de ses dérivées.

b) L'ordre d'une équation différentielle est celui de la dérivée de plus grand ordre présente dans l'équation.

c) Une condition initiale est une condition de la forme $y(t_0) = y_0$.

2. $y' = x^2 + y^2 \geq 0$ pour tout x et y. $y' = 0$ seulement à l'origine; il y a donc une tangente horizontale au point (0, 0), mais nulle part ailleurs. La courbe de la solution est toujours croissante.

3. Voir le paragraphe qui précède l'exemple 1 à la section 5.2.

4. Voir le paragraphe qui suit la figure 14 à la section 5.2.

5. Une équation différentielle à variables séparables est une équation différentielle du premier ordre dans laquelle l'expression de dy/dx peut s'écrire sous la forme de deux facteurs, à savoir une fonction de x multipliée par une fonction de y, c'est-à-dire $dy/dx = g(x)f(y)$. Pour résoudre l'équation, on effectue intègre chaque membre de l'équation $dy/f(y) = g(x)dx$ et on exprime généralement y en fonction de x.

6. a) $\dfrac{dy}{dt} = ky$; le taux de croissance relatif, $\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dt}$, est constant.

b) L'équation différentielle formulée à la sous-question a) est un modèle approprié de la croissance d'une population, en supposant qu'il y ait assez d'espace et de nutriments pour soutenir la croissance.

c) Si $y(0) = y_0$, alors la solution est $y(t) = y_0 e^{kt}$.

7. a) $dP/dt = kP\,(1 - P/M)$, où M est la capacité de charge.

b) L'équation différentielle formulée à la sous-question a) est un modèle approprié de la croissance d'une population, si on suppose que la population croît à un taux proportionnel à sa taille initiale, mais qu'elle plafonne éventuellement et se rapproche de sa capacité de charge à cause des ressources limitées.

Vrai ou faux

1. Vrai. Puisque $y^4 \geq 0, y' = -1 - y^4 < 0$ montre que toutes les solutions sont des fonctions décroissantes.

2. Vrai. $y = \dfrac{\ln x}{x} \Rightarrow y' = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

$$\text{Membre de gauche} = x^2y' + xy = x^2 \cdot \frac{1-\ln x}{x^2} + x \cdot \frac{\ln x}{x} = (1-\ln x) + \ln x = 1 = \text{Membre de droite},$$

donc $y = \dfrac{\ln x}{x}$ est une solution de l'équation différentielle $x^2y' + xy = 1$.

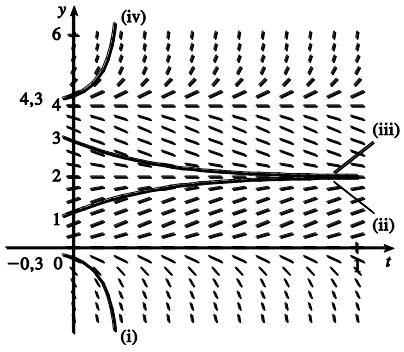
3. Faux. $x + y$ ne peut s'écrire sous la forme $g(x)f(y)$.

4. Vrai. $y' = 3y - 2x + 6xy - 1 = 6xy - 2x + 3y - 1 = 2x(3y - 1) + 1(3y - 1) = (2x+1)(3y - 1)$; y' peut donc s'écrire sous la forme $g(x)f(y)$ et, par conséquent, est une équation à variables séparables.

5. Vrai. En comparant $\dfrac{dy}{dt} = 2y\left(1 - \dfrac{y}{5}\right)$ à l'équation différentielle logistique (5.4.4), nous constatons que la capacité de charge est 5, c'est-à-dire $\lim\limits_{t\to\infty} y = 5$.

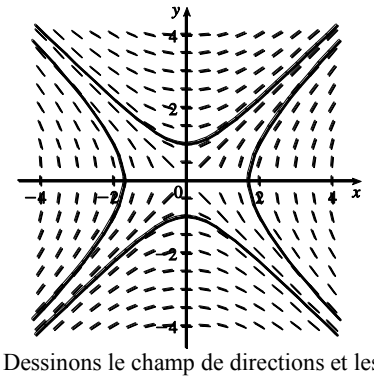
Exercices récapitulatifs

1. a)



b) $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)$ semble existée pour $0 \le c \le 4$. En fait, $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 4$ pour $c = 4$, $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 2$ pour $0 < c < 4$ et $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$ pour $c = 0$. Les solutions stationnaires sont $y(t) = 0$, $y(t) = 2$ et $y(t) = 4$.

2. a)

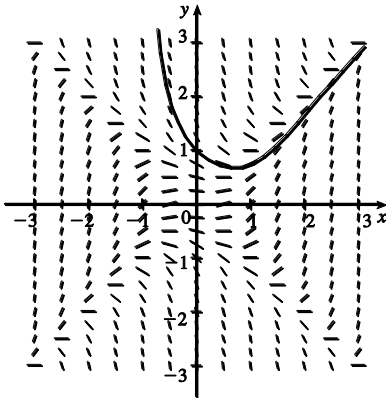


Dessinons le champ de directions et les quatre courbes intégrales. Nous constatons que la pente $y' = x/y$ n'est pas définie sur la droite $y = 0$.

b) $y' = x/y \iff ydy = xdx \iff y^2 = x^2 + C$. Pour $C = 0$, ceci est la paire de droites $y = \pm x$. Pour $C \neq 0$, ce sont des hyperboles $x^2 - y^2 = -C$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

3. a)



Nous estimons graphiquement que lorsque $x = 0{,}3$, $y = 0{,}8$, donc $y(0{,}3) \approx 0{,}8$.

(b) $h = 0{,}1$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$et $F(x, y) = x^2 - y^2$. Donc, $y_n = y_{n-1} + 0{,}1(x_{n-1}^2 - y_n^2 - 1)$

Par conséquent, $y_1 = 1 + 0{,}1(0^2 - 1^2) = 0{,}9$, $y^2 = 0{,}9 + 0{,}1(0{,}1^2 - 0{,}9^2) = 0{,}82$, $y_3 = 0{,}82 + 0{,}1(0{,}2^2 - 0{,}82^2) = 0{,}756\ 76$.

Ce résultat se rapproche de l'estimation de $y(0{,}3) \approx 0{,}8$ obtenue graphiquement.

c) Les milieux des segments horizontaux du champ de directions sont situés sur les droites $y = x$ et $y = -x$. Lorsqu'une courbe intégrale coupe une de ces droites, elle atteint un maximum ou un minimum local.

4. a) $h = 0{,}2$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ et $F(x, y) = 2xy^2$. Nous cherchons y_2 :

$y_1 = 1 + 0{,}2(2 \cdot 0 \cdot 1^2) = 1$, $y^2 = 1 + 0{,}2(2 \cdot 0{,}2 \cdot 1^2) = 1{,}08 \approx y(0{,}4)$.

b) Maintenant, $h = 0{,}1$, donc $y_1 = 1 + 0{,}1(2 \cdot 0 \cdot 1^2) = 1$, $y_2 = 1 + 0{,}1(2 \cdot 0{,}1 \cdot 1^2) = 1{,}02$,

$y_3 = 1{,}02 + 0{,}1(2 \cdot 0{,}2 \cdot 1{,}02^2) \approx 1{,}061\ 62$, $y_4 = 1{,}061\ 62 + 0{,}1(2 \cdot 0{,}3 \cdot 1{,}061\ 622) \approx 1{,}129\ 2 \approx y(0{,}4)$.

c) Il s'agit d'une équation différentielle à variables séparables qui peut s'écrire sous la forme

$\frac{dy}{y^2} = 2x\,dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y^2} = \int 2x\,dx \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{y} = x^2 + C$; cependant, $y(0) = 1$, donc $C = -1$ et

$y(x) = \frac{1}{1 - x^2} \quad \Leftrightarrow \quad y(0{,}4) = \frac{1}{1 - 0{,}16} \approx 1{,}1905$. Ceci démontre que, bien que l'augmentation du nombre de pas a grandement amélioré l'approximation, mais les approximations sont encore loin de la valeur exacte.

5. $\frac{dx}{dt} = 1 - t + x - tx = 1(1 - t) + x(1 - t) = (1 + x)(1 - t) \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{1 + x} = (1 - t)dt \quad \Rightarrow$

$\int \frac{dx}{1 + x} = \int (1 - t)dt \quad \Rightarrow \quad \ln|1 + x| = t - \frac{1}{2}t^2 + C \quad \Rightarrow \quad |1 + x| = e^{t - t^2/2 + C} \quad \Rightarrow$

$1 + x = \pm e^{t - t^2/2} \cdot e^C \quad \Rightarrow \quad x = -1 + Ke^{t - t^2/2}$, où K est toute constante non égale à zéro.

 © Groupe Modulo inc., 2013

6. $2ye^{y^2}y' = 2x + 3\sqrt{x} \;\Rightarrow\; 2ye^{y^2}\dfrac{dy}{dx} = 2x + 3\sqrt{x} \;\Rightarrow\; 2ye^{y^2}dy = \left(2x + 3\sqrt{x}\right)dx \;\Rightarrow$

$\int 2ye^{y^2}dy = \int\left(2x + 3\sqrt{x}\right)dx \;\Rightarrow\; e^{y^2} = x^2 + 2x^{3/2} + C \;\Rightarrow\; y^2 = \ln(x^2 + 2x^{3/2} + C) \;\Rightarrow$

$y = \pm\sqrt{\ln(x^2 + 2x^{3/2} + C)}$

7. $\dfrac{dr}{dt} + 2tr = r \;\Rightarrow\; \dfrac{dr}{dt} = r - 2tr = r(1-2t) \;\Rightarrow \int\dfrac{dr}{r} = \int(1-2t)dt \;\Rightarrow\; \ln|r| = t - t^2 + C \;\Rightarrow\; |r| = e^{t-t^2+C} = ke^{t-t^2}$. Puisque $r(0) = 5$, $5 = ke^0 = k$. Par conséquent, $r(t) = 5e^{t-t^2}$

8. $(1+\cos x)y' = (1+e^{-y})\sin x \;\Rightarrow\; \dfrac{dy}{1+e^{-y}} = \dfrac{\sin x dx}{1+\cos x} \;\Rightarrow \int\dfrac{dy}{1+1/e^y} = \int\dfrac{\sin x dx}{1+\cos x} \;\Rightarrow$

$\int\dfrac{e^y dy}{1+e^y} = \int\dfrac{\sin x dx}{1+\cos x} \;\Rightarrow\; \ln|1+e^y| = -\ln|1+\cos x| + C \;\Rightarrow\; \ln(1+e^y) = -\ln(1+\cos x) + C \;\Rightarrow$

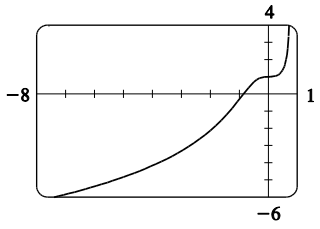
$1 + e^y = e^{-\ln(1+\cos x)} \cdot e^C \;\Rightarrow\; e^y = ke^{-\ln(1+\cos x)} - 1 \;\Rightarrow\; y = \ln[ke^{-\ln(1+\cos x)} - 1]$. Puisque $y(0) = 0$,

$0 = \ln[ke^{-\ln 2} - 1] \;\Rightarrow\; e^0 = k(\tfrac{1}{2}) - 1 \;\Rightarrow\; k = 4$. Par conséquent, $y(x) = \ln[4e^{-\ln(1+\cos x)} - 1]$. Une forme simplifiée est $y(x) = \ln\dfrac{3-\cos x}{1+\cos x}$.

9. $y' = 3x^2e^y \;\Rightarrow\; \dfrac{dy}{dx} = 3x^2e^y \;\Rightarrow\; e^{-y}dy = 3x^2dx \;\Rightarrow$

$\int e^{-y}dy = \int 3x^2dx \;\Rightarrow\; -e^{-y} = x^3 + C$. Or, $y(0) = 1 \;\Rightarrow\; -e^{-1} = C$, donc

$-e^{-y} = x^3 - e^{-1} \;\Rightarrow\; e^{-y} = -x^3 + e^{-1} \;\Rightarrow\; -y = \ln(-x^3 + e^{-1}) \;\Rightarrow\; y = -\ln(-x^3 + e^{-1})$. Pour trouver le domaine, il faut résoudre $-x^3 + e^{-1} > 0 \;\Rightarrow\; x^3 < e^{-1} \;\Rightarrow\; x < e^{-1/3}$; le domaine est donc $]-\infty, e^{-1/3}[$ et $x = e^{-1/3}$ [≈0,72] est une asymptote verticale.



10. $\dfrac{d}{dx}(y) = \dfrac{d}{dx}(ke^x) \;\Rightarrow\; y' = ke^x = y$; les trajectoires orthogonales doivent donc avoir

$y' = -\dfrac{1}{y} \;\Rightarrow\; \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{y} \;\Rightarrow\; ydy = -dx \;\Rightarrow \int ydy = -\int dx \;\Rightarrow\; \tfrac{1}{2}y^2 = -x + C \;\Rightarrow\; x = C - \tfrac{1}{2}y^2$. Ces trajectoires sont des paraboles horizontales.

 © Groupe Modulo inc., 2013

11. $\frac{d}{dx}(y)=\frac{d}{dx}(e^{kx}) \Rightarrow y'=ke^{kx}=ky=\frac{\ln y}{x}\cdot y$; les trajectoires orthogonales doivent donc avoir

$y'=-\frac{x}{y\ln y} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y\ln y} \Rightarrow y\ln y\,dy=-x\,dx \Rightarrow \int y\ln y\,dy=-\int x\,dx \Rightarrow$

$\frac{1}{2}y^2\ln y-\frac{1}{4}y^2$[intégration par parties avec $u=\ln y$ et $dv=y\,dy$] $=-\frac{1}{2}x^2+C_1 \Rightarrow 2y^2\ln y-y^2=C-2x^2$.

12. a) À l'aide des équations différentielles 4 et 7 de la section 5.4, nous constatons que pour $\frac{dP}{dt}=0{,}1P\left(1-\frac{P}{2000}\right)$ avec $P(0) = 100$,

nous obtenons $k = 0{,}1$, $M = 2000$, $P_0 = 100$ et $A=\frac{2000-100}{100}=19$. La solution du problème de Cauchy est

donc $P(t)=\frac{2000}{1+19e^{-0{,}1t}}$ et $P(20)=\frac{2000}{1+19e^{-2}}\approx 560$.

b) $P=1200 \Leftrightarrow 1200=\frac{2000}{1+19e^{-0{,}1t}} \Leftrightarrow 1+19e^{-0{,}1t}=\frac{2000}{1200} \Leftrightarrow 19e^{-0{,}1t}=\frac{5}{3}-1 \Leftrightarrow$

$e^{-0{,}1t}=\left(\frac{2}{3}\right)/19 \Leftrightarrow -0{,}1t=\ln\frac{2}{57} \Leftrightarrow t=-10\ln\frac{2}{57}\approx 33{,}5.$

13. a) Considérons que $t = 0$ correspond à 1990 de sorte que $P(t) = 5{,}28e^{kt}$ est un point de départ pour le modèle. Lorsque $t = 10$,

$P = 6{,}07$. Donc, $6{,}07=5{,}28e^{10k} \Rightarrow 10k=\ln\frac{6{,}07}{5{,}28} \Rightarrow k=\frac{1}{10}\ln\frac{6{,}07}{5{,}28}\approx 0{,}013\,94$. Pour l'année 2020, $t = 30$ et

$P(30) = 5{,}28e^{30k} \approx 8{,}02$ milliards.

b) $P=10 \Rightarrow 5{,}28e^{kt}=10 \Rightarrow \frac{10}{5{,}28}=e^{kt} \Rightarrow kt=\ln\frac{10}{5{,}28} \Rightarrow t=10\frac{\ln\frac{10}{5{,}28}}{\ln\frac{6{,}07}{5{,}28}}\approx 45{,}8$ années, c'est-à-dire

en 1990 + 45 = 2035.

c) $P(t)=\frac{K}{1+Ae^{-kt}}=\frac{100}{1+Ae^{-kt}}$, où $A=\frac{100-5{,}28}{5{,}28}\approx 17{,}94$. Puisque $k=\frac{1}{10}\ln\frac{6{,}07}{5{,}28}$ (obtenu à la sous-question a)), un modèle

est $P(t)\approx\frac{100}{1+17{,}94e^{-0{,}013\,94t}}$ et $P(30) \approx 7{,}81$ milliards, un nombre légèrement inférieur à l'approximation de 8,02 milliards à la

sous-question a).

d) $P=10 \Rightarrow 1+Ae^{-kt}=\frac{100}{10} \Rightarrow Ae^{-kt}=9 \Rightarrow e^{-kt}=9/A \Rightarrow -kt=\ln(9/A) \Rightarrow t=-\frac{1}{k}\ln\frac{9}{A}\approx 49{,}47$ années (c'est-à-

dire en 2039), ce qui est plus tard que la prédiction de 2035 à la sous-question b).

14. a) $\frac{dL}{dt}\propto L_\infty-L \Rightarrow \frac{dL}{dt}=k(L_\infty-L) \Rightarrow \int\frac{dL}{L_\infty-L}=\int k\,dt \Rightarrow -\ln|L_\infty-L|=kt+C \Rightarrow$

$\ln|L_\infty-L|=-kt-C \Rightarrow |L_\infty-L|=e^{-kt-C} \Rightarrow L_\infty-L=Ae^{-kt} \Rightarrow L=L_\infty-Ae^{-kt}$. À $t = 0$,

$L=L(0)=L_\infty-A \Rightarrow A=L_\infty-L(0) \Rightarrow L(t)=L_\infty-[L_\infty-L(0)]e^{-kt}$

 © Groupe Modulo inc., 2013

b) $L_\infty = 53$ cm, $L(0) = 10$ cm et $k = 0{,}2 \quad \Rightarrow \quad L(t) = 53 - (53-10)e^{-0{,}2t} = 53 - 43e^{-0{,}2t}$.

15. Représentons la quantité de sel dans le réservoir (en kg) par y. $y(0) = 0$ puisque, initialement, il n'y a que de l'eau dans le réservoir. Le taux auquel y augmente est égal au taux auquel le sel entre dans le réservoir moins le taux auquel il en sort. Ce taux est

$$\frac{dy}{dt} = 0{,}1\frac{\text{kg}}{\text{L}} \times 10\frac{L}{\text{min}} - \frac{y}{100}\frac{\text{kg}}{\text{L}} \times 10\frac{L}{\text{min}} = 1 - \frac{y}{10}\frac{kg}{\text{min}} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{10-y} = \int \frac{1}{10}\,dt \quad \Rightarrow$$

$-\ln|10-y| = \frac{1}{10}t + C \quad \Rightarrow \quad 10 - y = Ae^{-t/10} \cdot y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 10 = A \quad \Rightarrow \quad y = 10(1 - e^{-t/10})$. À $t = 6$ minutes,

$y = 10(1 - e^{-6/10}) \approx 4{,}512$ kg

16. Considérons que P représente la population et I le nombre de personnes infectées. Le taux de propagation dI/dt est proportionnel à la fois à I et à $P - I$; donc, pour une certaine constante k, $\frac{dI}{dt} = kI(P-I) \quad \Rightarrow \quad I(t) = \frac{I_0 P}{I_0 + (P - I_0)e^{-kPt}}$ [selon l'analyse du modèle logistique de croissance de la section 5.4].

Maintenant, en mesurant t en jours, effectuons les changements de variables $t = 7$, $P = 5000$, $I_0 = 160$ et $I(7) = 1200$ afin de calculer k:

$$1200 = \frac{160 \cdot 5000}{160 + (5000-160)e^{-5\,000 \cdot 7 \cdot k}} \quad \Leftrightarrow \quad 3 = \frac{2000}{160 + 4840e^{-35\,000k}} \quad \Leftrightarrow \quad 480 + 14\,520e^{-35\,000k} = 2000 \quad \Leftrightarrow$$

$e^{-35\,000k} = \frac{2000 - 480}{14\,520} \quad \Leftrightarrow \quad -35\,000k = \ln\frac{38}{363} \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{-1}{35\,000}\ln\frac{38}{363} \approx 0{,}000\,064\,48$. Ensuite, posons que

$I = 5000 \times 80\,\% = 4000$ et calculons la valeur de t : $4000 = \frac{160 \cdot 5000}{160 + (5000-160)e^{-k \cdot 5\,000 \cdot t}} \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \frac{200}{160 + 4840e^{-5000kt}} \quad \Leftrightarrow$

$160 + 4840e^{-5000kt} = 200 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-5000kt} = \frac{200 - 160}{4840} \quad \Leftrightarrow \quad -5000kt = \ln\frac{1}{121} \quad \Leftrightarrow$

$t = \frac{-1}{5000k}\ln\frac{1}{121} = \frac{1}{\frac{1}{7}\ln\frac{38}{363}} \cdot \ln\frac{1}{121} = 7 \cdot \frac{\ln 121}{\ln\frac{363}{38}} \approx 14{,}875$. Il faut donc environ 15 jours pour que 80 % de la population soit infectée.

17. $\frac{1}{R}\frac{dR}{dt} = \frac{k}{S}\frac{dS}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(\ln R) = \frac{d}{dt}(k \ln S) \quad \Rightarrow \quad \ln R = k \ln S + C \quad \Rightarrow$

$R = e^{k \ln S + C} = e^C (e^{\ln S})^k \quad \Rightarrow \quad R = AS^k$, où $A = e^C$ est une constante positive.

18. $\frac{dh}{dt} = -\frac{T}{V}\left(\frac{h}{k+h}\right) \quad \Rightarrow \quad \int \frac{k+h}{h}dh = \int\left(-\frac{T}{V}\right)dt \quad \Rightarrow \quad \int\left(1 + \frac{k}{h}\right)dh = -\frac{T}{V}\int 1\,dt \quad \Rightarrow \quad h + k\ln h = -\frac{T}{V}t + C$**.** Cette équation différentielle donne une relation entre h et t, mais il est impossible d'isoler h et de l'exprimer en fonction de t.

19. Nous devons trouver la masse m en kg de Barbara en fonction de t. La consommation nette de calories par jour de Barbara au temps t (mesuré en jours) est $c(t) = 1\,600 - 850 - 15m(t) = 750 - 15m(t)$, où $m(t)$ est sa masse au temps t. Le problème spécifie que

 © Groupe Modulo inc., 2013

$m(0) = 60$ kg et que $\frac{dm}{dt} = \frac{c(t)}{10\,000}$, donc $\frac{dm}{dt} = \frac{750 - 15m}{10\,000} = \frac{150 - 3m}{2000} = \frac{-3(m-50)}{2000}$ avec $m(0) = 60$. À partir de $\int \frac{dm}{m-50} = \int \frac{-3dt}{2000}$, nous obtenons $\ln|m-50| = -\frac{3}{2000}\ t + C$. Puisque $m(0) = 60$, $C = \ln 10$. Or, $\ln\frac{|m-50|}{10} = -\frac{3t}{2000}$, donc $|m - 50| = 10e^{-3t/2000}$. La quantité $m - 50$ est continue, initialement positive et le côté droit de l'équation n'est jamais zéro. Par conséquent, $m - 50$ est positif pour tout t et $m(t) = 50 + 10e^{-3t/2000}$ kg. Lorsque $t \to \infty$, $m(t) \to 50$ kg. Par conséquent, la masse de Barbara se stabilise graduellement à 50 kg.

20. a) $\frac{d^2y}{dx^2} = k\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$. En posant $z = \frac{dy}{dx}$, nous obtenons $\frac{dz}{dx} = k\sqrt{1+z^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = kdx$. À l'aide de la formule 25, nous obtenons

$$\ln(z + \sqrt{1+z^2}) = kx + c \quad \Rightarrow \quad z + \sqrt{1+z^2} = Ce^{kx} \quad [\text{où } C = e^c] \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1+z^2} = Ce^{kx} - z \quad \Rightarrow$$
$$1 + z^2 = C^2e^{2kx} - 2Ce^{kx}z + z^2 \quad \Rightarrow \quad 2Ce^{kx}z = C^2e^{2kx} - 1 \quad \Rightarrow z = \frac{C}{2}e^{kx} - \frac{1}{2C}\ e^{-kx}.$$

Or, $\frac{dy}{dx} = \frac{C}{2}e^{kx} - \frac{1}{2C}e^{-kx} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{C}{2k}e^{kx} + \frac{1}{2Ck}e^{-kx} + C'$. Nous observons au graphique dans le manuel que $y(0) = a$ et que $y(\pm b) = h$. $a = y(0) = \frac{C}{2k} + \frac{1}{2Ck} + C' \quad \Rightarrow \quad C' = a - \frac{C}{2k} - \frac{1}{2Ck} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{C}{2k}(e^{kx} - 1) + \frac{1}{2Ck}(e^{-kx} - 1) + a$. À partir de $h = y(\pm b)$, nous obtenons $h = \frac{C}{2k}(e^{kb} - 1) + \frac{1}{2Ck}(e^{-kb} - 1) + a$ et $h = \frac{C}{2k}(e^{-kb} - 1) + \frac{1}{2Ck}(e^{kb} - 1) + a$. En soustrayant la seconde équation de la première, nous obtenons $0 = \frac{C}{k}\frac{e^{kb} - e^{-kb}}{2} - \frac{1}{Ck}\frac{e^{kb} - e^{-kb}}{2} = \frac{1}{k}\left(\frac{e^{kb} - e^{-kb}}{2}\right)\left(C - \frac{1}{C}\right)$.

Or, $k > 0$ et $b > 0$, donc $\frac{e^{kb} - e^{-kb}}{2} > 0$ et $C = \pm 1$. Si $C = 1$, alors

$y = \frac{1}{2k}(e^{kx} - 1) + \frac{1}{2k}(e^{-kx} - 1) + a = \frac{1}{k}\frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2} - \frac{1}{k} + a = a + \frac{1}{k}\left(\frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2} - 1\right)$. Si $C = -1$, alors

$y = -\frac{1}{2k}(e^{kx} - 1) - \frac{1}{2k}(e^{-kx} - 1) + a = \frac{-1e^{kx} + e^{-kx}}{2} + \frac{1}{k} + a = a - \frac{1}{k}\left(\frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2} - 1\right)$. Puisque $k > 0$, $\frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2} \geq 1$ et $y \geq a$, nous concluons que $C = 1$et $y = a + \frac{1}{k}(\frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2} - 1)$, où $h = y(b) = a + \frac{1}{k}(\frac{e^{kb} + e^{-kb}}{2} - 1)$. Puisque $\frac{e^{kb} + e^{-kb}}{2} = \frac{e^{-kb} + e^{kb}}{2}$, nous ne pouvons extraire aucune information additionnelle de la condition $y(b) = y(-b)$. Nous pourrions cependant remplacer a par l'expression $h - \frac{1}{k}\ (\frac{e^{kb} + e^{-kb}}{2} - 1)$ et obtenir $y = h + \frac{1}{k}\ (\frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2} - \frac{e^{kb} + e^{-kb}}{2})$. Il serait encore mieux de laisser a dans l'expression pour y et d'utiliser l'expression pour h pour trouver la valeur de k en fonction de a, b et h. Cela nous permettrait d'exprimer y en fonction de x et des paramètres donnés a, b et h. Il est malheureusement impossible de trouver une solution analytiquement simple pour k. Des méthodes numériques devraient être utilisées lorsque les valeurs spécifiques des paramètres sont données.

 © Groupe Modulo inc., 2013

b) La longueur du câble est

$$L=\int_{-b}^{b}\sqrt{1+(dy/dx)^2}\,dx=\int_{-b}^{b}\sqrt{1+\left(\frac{e^{kx}-e^{-kx}}{2}\right)^2}\,dx=\int_{-b}^{b}\frac{e^{kx}+e^{-kx}}{2}\,dx=2\int_{0}^{b}\frac{e^{kx}+e^{-kx}}{2}\,dx$$
$$=\left[\frac{e^{kx}-e^{-kx}}{k}\right]_0^b=\frac{e^{bx}-e^{-bx}}{k}$$

Problèmes supplémentaires

1. À l'aide du théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, dérivons chaque membre de l'équation donnée :

$[f(x)]^2=100+\int_0^x\{[f(t)]^2+[f'(t)]^2\}dt \;\Rightarrow\; 2f(x)f'(x)=[f(x)]^2+[f'(x)]^2 \;\Rightarrow$
$[f(x)]^2+[f'(x)]^2-2f(x)f'(x)=0 \;\Rightarrow\; [f(x)-f'(x)]^2=0 \;\Leftrightarrow\; f(x)=f'(x)$. Nous pouvons résoudre cette équation en la considérant comme une équation différentielle à variables séparables ou bien utiliser le théorème présenté en 5.4.2 avec $k = 1$; ce théorème établie que les solutions sont $f(x) = Ce^x$. Or, $[f(0)]^2 = 100$, donc $f(0) = C = \pm 10$ et, par conséquent, $f(x) = \pm 10e^x$ sont les seules fonctions qui satisfont à l'équation donnée.

2. $(fg)' = f'g'$ où $f(x)=e^{x^2} \;\Rightarrow\; \left(e^{x^2}g\right)'=2xe^{x^2}g'$. Comme l'erreur de l'étudiant n'a pas eu d'incidence sur la réponse, $\left(e^{x^2}g\right)'=e^{x^2}g'+2xe^{x^2}g=\ 2xe^{x^2}g'$. Donc, $(2x - 1)g' = 2xg$ ou

$$\frac{g'}{g}=\frac{2x}{2x-1}=1+\frac{1}{2x-1} \;\Rightarrow\; \ln|g(x)|=x+\tfrac{1}{2}\ln(2x-1)+C \;\Rightarrow\; g(x)=Ae^x\sqrt{2x-1}.$$

3.
$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(x)\,[f(h)-1]}{h} \quad [\text{puisque } f(x+h)=f(x)f(h)]$$
$$=f(x)\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}=f(x)\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}=f(x)f'(0)=f(x)$$

Par conséquent, $f'(x) = f(x)$ pour tout x et, selon le théorème énoncé en 5.4.2, nous obtenons $f(x) = Ae^x$.

Or, $f(0)=1 \;\Rightarrow\; A=1 \;\Rightarrow\; f(x)=e^x$.

4. $\left(\int f(x)dx\right)\left(\int\frac{dx}{f(x)}\right)=-1 \;\Rightarrow\; \int\frac{dx}{f(x)}=\frac{-1}{\int f(x)dx} \;\Rightarrow\; \frac{1}{f(x)}=\frac{f(x)}{\left[\int f(x)dx\right]^2}$ [après avoir dérivé] $\Rightarrow$

$\int f(x)dx=\pm f(x)$ [après avoir extrait la racine carrée] $\Rightarrow$
$f(x)=\pm f'(x)$ [après avoir dérivé une seconde fois] $\Rightarrow\; y=Ae^x$

ou $y = Ae^{-x}$ selon le théorème 5.4.2. Par conséquent, $f(x) = Ae^x$ ou $f(x) = Ae^{-x}$, pour toute constante A non nulle, sont des fonctions qui vérifient l'équation à résoudre.

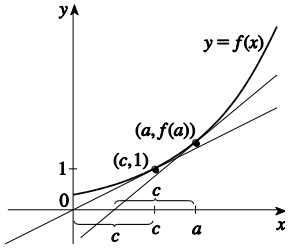
 © Groupe Modulo inc., 2013

5. « L'aire sous la courbe de f entre 0 et x est proportionnelle à la $(n + 1)$-ième puissance de $f(x)$ » se traduit par $\int_0^x f(t)dt = k[f(x)]^{n+1}$ pour une certaine constante k. Selon le TFC1, $\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt = \frac{d}{dx}\{k[f(x)]^{n+1}\} \Rightarrow$

$f(x) = k(n+1)[f(x)]^n f'(x) \Rightarrow 1 = k(n+1)[f(x)]^{n-1} f'(x) \Rightarrow 1 = k(n+1)y^{n-1}\frac{dy}{dx} \Rightarrow$

$k(n+1)y^{n-1}dy = dx \Rightarrow \int k(n+1)y^{n-1}dy = \int dx \Rightarrow k(n+1)\frac{1}{n}y^n = x + C$. Or, $f(0) = 0 \Rightarrow 0 = 0 + C \Rightarrow C = 0$ et alors $f(1) = 1 \Rightarrow k(n+1)\frac{1}{n} = 1 \Rightarrow k = \frac{n}{n+1}$, donc $y^n = x$ et $y = f(x) = x^{1/n}$.

6. Soit $y = f(x)$ est une courbe passant par le point $(c, 1)$ et dont les sous-tangentes sont de longueur c. Une équation de la tangente en $x = a$ est $y - f(a) = f'(a)(x - a)$. En supposant que $f(a) \neq 0$ et $f'(a) \neq 0$, la courbe a un point d'intersection avec l'axe des x [posons $y = 0$ et trouvons la valeur de x]. Par conséquent, la longueur de la sous-tangente est c, et donc $\left|a - \left(a - \frac{f(a)}{f'(a)}\right)\right| = \left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right| = c \Rightarrow \frac{f'(a)}{f(a)} = \pm\frac{1}{c}$.



Or, $\frac{f'(x)}{f(x)} = \pm\frac{1}{c} \Rightarrow f'(x) = \pm\frac{1}{c}f(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm\frac{1}{c}y \Rightarrow \frac{dy}{y} = \pm\frac{1}{c}dx \Rightarrow \int\frac{1}{y}dy = \pm\frac{1}{c}\int dx \Rightarrow \ln|y| = \pm\frac{1}{c}x + K$.

Puisque $f(c) = 1$, $\ln 1 = \pm 1 + K \Rightarrow K = \mp 1$. Par conséquent, $y = e^{\pm x/c \mp 1}$ ou $y = e^{\pm(x/c - 1)}$. L'une des courbes est une fonction exponentielle croissante (comme le montre le graphique) et courbe est sa réflexion par rapport à la droite $x = c$.

7. Soit $y(t)$ représentant la température de la tarte aux pêches t minutes après 5 h de l'après-midi et soit A la température ambiante. Selon la loi de refroidissement de Newton, $dy/dt = k(y - A)$. En isolant y, nous obtenons $\frac{dy}{y - A} = kdt \Rightarrow \ln|y - A| = kt + C \Rightarrow |y - A| = e^{kt+C} \Rightarrow y - A = \pm e^{kt} \cdot e^C \Rightarrow y = Me^{kt} + A$, où M est une constante non nulle. L'exercice donne la température à trois heures différentes.

$$y(0) = 100 \Rightarrow 100 = M + A \Rightarrow A = 100 - M$$

$$y(10) = 80 \Rightarrow 80 = Me^{10k} + A \qquad \textbf{(1)}$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

$$y(20) = 65 \quad \Rightarrow \quad 65 = Me^{20k} + A \qquad \textbf{(2)}$$

En remplaçant A par $100 - M$ dans **(1)** et **(2)**, nous obtenons

$$-20 = Me^{10k} - M \textbf{ (3)} \text{ et } -35 = Me^{20k} - M \textbf{ (4)}$$

En divisant **(3)** par **(4)**, nous obtenons $\frac{-20}{-35} = \frac{M(e^{10k}-1)}{M(e^{20k}-1)} \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{7} = \frac{e^{10k}-1}{e^{20k}-1} \quad \Rightarrow \quad 4e^{20k} - 4 = 7e^{10k} - 7 \quad \Rightarrow \quad 4e^{20k} - 7e^{10k} + 3 = 0$.

Ceci est une équation quadratique en e^{10k}. $(4e^{10k} - 3)(e^{10k} - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{10k} = \frac{3}{4}$ ou $1 \Rightarrow 10k = \ln\frac{3}{4}$ ou $\ln 1 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{10}\ln\frac{3}{4}$ puisque k est une constante de proportionalité non nulle. En remplaçant e^{10k} par $\frac{3}{4}$ dans **(3)**, nous obtenons

$-20 = M \cdot \frac{3}{4} - M \quad \Rightarrow \quad -20 = -\frac{1}{4} M \quad \Rightarrow \quad M = 80$. Or, $A = 100 - M$, donc A = 20 ^{0}C.

8. Soit b, le nombre d'heures avant midi durant lesquelles il a neigé, t, le temps mesuré en heures depuis midi et $x = x(t)$, la distance parcourue par le chasse-neige au temps t. Alors, dx/dt = la vitesse du chasse-neige. Comme il neige de façon constante, la hauteur au temps t est $h(t) = k(t + b)$, où k est une constante. Le problème spécifie que le taux de déblaiement de la neige est constant, disons R (en m^3/h). Si la largeur du passage déblayé est l, alors R = hauteur × largeur × vitesse $= h(t) \times l \times \frac{dx}{dt} = k(t+b)l\frac{dx}{dt}$. Par conséquent, $\frac{dx}{dt} = \frac{C}{t+b}$, où $C = \frac{R}{kl}$ est une constante. C'est une équation différentielle à variables séparables.

$\int dx = C\int \frac{dt}{t+b} \quad \Rightarrow \quad x(t) = C\ln(t+b) + K$.

En posant $t = 0$: $0 = C\ln b + K \quad \Rightarrow \quad K = -C\ln b$, donc $x(t) = C\ln(t + b) - C\ln b = C\ln(1 + t/b)$.

En posant $t = 1$: $6000 = C\ln(1 + 1/b)$ [x = 6 km].

En posant $t = 2$: $9000 = C\ln(1 + 2/b)$ [x = (6 + 3) km].

Trouvons la valeur de

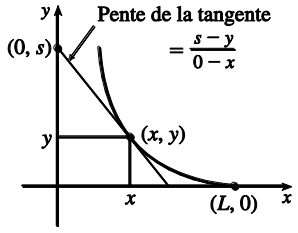
$$b : \frac{\ln(1+1/b)}{6000} = \frac{\ln(1+2/b)}{9000} \quad \Rightarrow \quad 3\ln\left(1+\frac{1}{b}\right) = 2\ln\left(1+\frac{2}{b}\right) \quad \Rightarrow \quad \left(1+\frac{1}{b}\right)^3 = \left(1+\frac{2}{b}\right)^2 \quad \Rightarrow$$

$1 + \frac{3}{b} + \frac{3}{b^2} + \frac{1}{b^3} = 1 + \frac{4}{b} + \frac{4}{b^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{b} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{b^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad b^2 + b - 1 = 0 \quad \Rightarrow b = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Cependant, $b > 0$, donc $b = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}618$ h ≈ 37 min. Il a commencé à neiger $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ heures avant midi, c'est-à-dire vers 11 h 23 min.

9. a) Lorsqu'il court du point $(L, 0)$ au point (x, y), le chien parcourt la distance $s = \int_x^L \sqrt{1 + (dy/dx)^2}\,dx = -\int_L^x \sqrt{1 + (dy/dx)^2}\,dx$, donc $\frac{ds}{dx} = -\sqrt{1 + (dy/dx)^2}$. Le chien et le lièvre courent à la même vitesse, et la position du lièvre lorsque le chien a parcouru la distance s est donc $(0, s)$. Comme le chien se dirige toujours tout droit vers le lièvre, $\frac{dy}{dx} = \frac{s-y}{0-x}$ (voir la figure).

 © Groupe Modulo inc., 2013

Par conséquent, $s = y - x\dfrac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{ds}{dx} = \dfrac{dy}{dx} - \left(x\dfrac{d^2y}{dx^2} + 1\dfrac{dy}{dx} \right) = -x\dfrac{d^2y}{dx^2}$. En traduisant les deux expressions pour $\dfrac{ds}{dx}$ en équation, nous obtenons $x\dfrac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$, tel qu'il est donné dans le problème.



b) En posant $z = \dfrac{dy}{dx}$, nous obtenons l'équation différentielle $x\dfrac{dz}{dx} = \sqrt{1 + z^2}$ ou $\dfrac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \dfrac{dx}{x}$. En intégran, nous obtenons

$\ln x = \int \dfrac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} \overset{25}{=} \ln\left(z + \sqrt{1 + z^2} \right) + C$. Lorsque $x = L$, $z = dy/dx = 0$, donc $\ln L = \ln 1 + C$. Par conséquent, $C = \ln L$, donc

$$\ln x = \ln(\sqrt{1 + z^2} + z) + \ln L = \ln[L\sqrt{1 + z^2} + z] \quad \Rightarrow \quad x = L(\sqrt{1 + z^2} + z) \quad \Rightarrow$$

$$\sqrt{1 + z^2} = \frac{x}{L} - z \quad \Rightarrow \quad 1 + z^2 = \left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{2xz}{L} + z^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2z\left(\frac{x}{L}\right) - 1 = 0 \quad \Rightarrow z = \frac{(x/L)^2 - 1}{2(x/L)} = \frac{x^2 - L^2}{2Lx} = \frac{x}{2L} - \frac{L}{x}\frac{1}{x} \text{ [pour } x > 0\text{]}.$$

Puisque $z = \dfrac{dy}{dx}$, $y = \dfrac{x^2}{4L} - \dfrac{L}{2} \ln x + C_1$. Puisque $y = 0$ lorsque $x = L$, $0 = \dfrac{L}{4} - \dfrac{L}{2}\ln L + C1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \dfrac{L}{2}\ln L - \dfrac{L}{4}$. Par conséquent,

$$y = \frac{x^2}{4L} - \frac{L}{2}\ln x + \frac{L}{2}\ln L - \frac{L}{4} = \frac{x^2 - L^2}{4L} - \frac{L}{2}\ln\left(\frac{x}{L}\right).$$

c) Lorsque $x \to 0^+$, $y \to \infty$, et le chien n'attrape donc jamais le lièvre.

10. a) Si le chien court deux fois plus vite que le lièvre, alors la position du lièvre lorsque le chien a parcouru une distance s est $(0, s/2)$.

Comme le chien se dirige toujours tout droit vers le lièvre, la pente de la droite tangente à la trajectoire du chien est $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{s/2 - y}{0 - x}$.

Par conséquent, $s = 2y - 2x\dfrac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{ds}{dx} = 2\dfrac{dy}{dx} - \left(2x\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} \right) = -2x\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Selon le problème 9 a), $\dfrac{ds}{dx} = -\sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$, donc $2x\dfrac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$.

En posant que $z = \dfrac{dy}{dx}$, nous obtenons l'équation différentielle $2x\dfrac{dz}{dx} = \sqrt{1 + z^2}$ ou $\dfrac{2dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \dfrac{dx}{x}$. En intégrant, nous obtenons

$\ln x = \int \dfrac{2dz}{\sqrt{1 + z^2}} = 2\ln\left(\sqrt{1 + z^2} + z \right) + C$. [Voir le problème 9 b).] Lorsque $x = L$, $z = dy/dx = 0$, donc $\ln L = 2\ln 1 + C = C$. Par conséquent,

 © Groupe Modulo inc., 2013

$\ln x = 2\ln\left(\sqrt{1+z^2}+z\right)+\ln L = \ln\left(L\left(\sqrt{1+z^2}+z\right)^2\right) \Rightarrow x = L\left(\sqrt{1+z^2}+z\right)^2 \Rightarrow$

$\sqrt{1+z^2} = \sqrt{\frac{x}{L}} - z \Rightarrow 1+z^2 = \frac{x}{L} - 2\sqrt{\frac{x}{L}}z + z^2 \Rightarrow 2\sqrt{\frac{x}{L}}z = \frac{x}{L} - 1 \Rightarrow$

$\frac{dy}{dx} = z = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{L}} - \frac{1}{2\sqrt{x/L}} = \frac{1}{2\sqrt{L}}x^{1/2} - \frac{\sqrt{L}}{2}x^{-1/2} \Rightarrow y = \frac{1}{3\sqrt{L}}x^{3/2} - \sqrt{L}x^{1/2} + C_1$. Lorsque $x = L$, $y = 0$,

donc $0 = \frac{1}{3\sqrt{L}}L^{3/2} - \sqrt{L}L^{1/2} + C_1 = \frac{L}{3} - L + C_1 = C_1 - \frac{2}{3}L$. Par conséquent, $C_1 = \frac{2}{3}L$ et $y = \frac{x^{3/2}}{3\sqrt{L}} - \sqrt{L}x^{1/2} + \frac{2}{3}L$.

Lorsque $x \to 0$, $y \to \frac{2}{3}L$, et le chien attrape donc le lièvre lorsque ce dernier est au point $(0, \frac{2}{3}L)$. (À ce point, le chien a parcouru une distance de $\frac{4}{3}L$, soit deux fois la distance que le lièvre a parcourue.)

b) Comme aux solutions à la sous-question a) et au problème 9, nous obtenons $z = \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2L^2} - \frac{L^2}{2x^2}$ et, par conséquent, $y = \frac{x^3}{6L^2} + \frac{L^2}{2x} - \frac{2}{3}L$. Nous voulons réduire au minimum la distance D entre le chien au point (x, y) et le lièvre au point $(0, 2s)$. Or, $s = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x\frac{dy}{dx} \Rightarrow 2s = y - xz \Rightarrow y - 2s = xz = x\left(\frac{x^2}{2L^2} - \frac{L^2}{2x^2}\right) = \frac{x^3}{2L^2} - \frac{L^2}{2x}$, donc

$$D = \sqrt{(x-0)^2 + (y-2s)^2} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{x^3}{2L^2} - \frac{L^2}{2x}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^6}{4L^4} + \frac{x^2}{2} + \frac{L^4}{4x^2}} = \sqrt{\left(\frac{x^3}{2L^2} + \frac{L^2}{2x}\right)^2}$$

$$= \frac{x^3}{2L^2} + \frac{L^2}{2x}$$

$D' = 0 \Leftrightarrow \frac{3x^2}{2L^2} - \frac{L^2}{2x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{3x^2}{2L^2} = \frac{L^2}{2x^2} \Leftrightarrow x^4 = \frac{L^4}{3} \Leftrightarrow x = \frac{L}{\sqrt[4]{3}}$, $x > 0$, $L > 0$.

Puisque $D''(x) = \frac{3x}{L^2} + \frac{L^2}{x^3} > 0$ pour tout $x > 0$, nous savons que $D\left(\frac{L}{\sqrt[4]{3}}\right) = \frac{(L\cdot 3^{-1/4})^3}{2L^2} + \frac{L^2}{2L\cdot 3^{-1/4})} = \frac{2L}{3^{3/4}}$ est la valeur minimale de D, c'est-à-dire la distance minimale du lièvre à laquelle le chien réussit à s'approcher. Les positions à cette distance sont

$$\text{Chien} : (x, y) = \left(\frac{L}{\sqrt[4]{3}}, \left(\frac{5}{3^{7/4}} - \frac{2}{3}\right)L\right) = \left(\frac{L}{\sqrt[4]{3}}, \frac{5\sqrt[4]{3} - 6}{9}L\right)$$

$$\text{Lièvre} : (0, 2s) = \left(0, \frac{8\sqrt[4]{3}\text{L}}{9} - \frac{2L}{3}\right) = \left(0, \frac{8\sqrt[4]{3} - 6}{9}L\right)$$

11. a) Le problème spécifie que $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, $dV/dt = 1800\pi$ m^3/h et $r = 1{,}5h = \frac{3}{2}h$. Donc,

$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{3}{2}h\right)^2 h = \frac{3}{4}\pi h^3 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{3}{4}\pi\cdot 3h^2\frac{dh}{dt} = \frac{9}{4}\pi h^2\frac{dh}{dt}$. Par conséquent, $\frac{dh}{dt} = \frac{4(dV/dt)}{9\pi h^2} = \frac{7200\pi}{9\pi h^2} = \frac{800}{h^2}$ (*) $\Rightarrow$

$\int h^2 dh = \int 800\, dt \Rightarrow \frac{h^3}{3} = 800t + C$. Lorsque $t = 0$, $h = 20$. Ainsi, $C = \frac{20^3}{3} = \frac{8000}{3}$, donc

 © Groupe Modulo inc., 2013

$\frac{h^3}{3} = 800t + \frac{8000}{3} \Rightarrow h^3 = 2400t + 8000$. Soit $h = 30$. Alors, $30^3 = 27\,000 = 2400t + 8000 \Rightarrow 2400t = 19\,000 \Rightarrow t = 7{,}9$ et le temps requis est donc de 7,9 heures.

b) L'aire du plancher du silo est $F = \pi \cdot 60^2 = 3600\pi$ m^2 et l'aire de la base du tas est $A = \pi r^2 = \pi\left(\frac{3}{2}h^2\right) = \frac{9\pi}{4}h^2$. L'aire du plancher du silo qui est encore libre lorsque $h = 20$ est donc

$F - A = 3600\pi - 900\pi = 2700\pi$ m^2. Or, $A = \frac{9\pi}{4}h^2 \Rightarrow dA/dt = \frac{9\pi}{4} \cdot 2h(dh/dt)$ et, selon (*) à la sous-question a), nous savons que lorsque $h = 20$, $dh/dt = \frac{800}{(20)^2} = 2$ m/h. Par conséquent, $dA/dt = \frac{9\pi}{4}(2)(20)(2) = 180\pi$ m^2/h.

c) À $h = 25$ m, $dV/dt = 1800\pi - 600\pi = 1200\pi$ m^3/h. Selon (*) à la sous-question a),

$\frac{dh}{dt} = \frac{4(dV/dt)}{9\pi h^2} = \frac{4(1200\pi)}{9\pi h^2} = \frac{1600}{3h^2} \Rightarrow \int 3h^2 dh = \int 1600\, dt \Rightarrow h^3 = 1600t + C$. Lorsque $t = 0$, $h = 25$; par conséquent, $C = 25^3 = 15\,625$. Donc, $h^3 = 1600t + 15\,625$. Au sommet, $h = 30 \Rightarrow (30)^3 = 1600t + 15\,625 \Rightarrow t = \frac{11\,375}{1600} \approx 7{,}1$. Le sommet du tas atteint le sommet du silo après environ 7,1 heures.

12. Soit $P(a, b)$ un point quelconque du premier quadrant situé sur la courbe $y = f(x)$. Une équation de la tangente au point P est $y - b = f'(a)(x - a)$ ou, de façon équivalente, $y = mx + b - ma$, où $m = f'(a)$. Si $Q(0, c)$ est le point d'intersection sur l'axe des y, alors $c = b - am$. Si $R(k, 0)$ est le point d'intersection sur l'axe des x, alors $k = \frac{am - b}{m} = a - \frac{b}{m}$. Comme la droite tangente est coupée en deux parties égales en P, nous savons que $|PQ| = |PR|$, c'est-à-dire que $\sqrt{(a-0)^2 + \left[b - (b - am)\right]^2} = \sqrt{\left[a - (a - b/m)^2 + (b-0)^2\right.}$. En élevant au carré et en simplifiant, nous obtenons

$a^2 + a^2m^2 = b^2/m^2 + b^2 \Rightarrow a^2m^2 + a^2m^4 = b^2 + b^2m^2 \Rightarrow a^2m^4 + (a^2 - b^2)m^2 - b^2 = 0 \Rightarrow (a^2m^2 - b^2)(m^2 + 1) = 0 \Rightarrow m^2 = b^2/a^2$.

Puisque m est la pente de la droite passant par un point d'intersection dans la partie positive de l'axe des y et par un point d'intersection dans la partie positive de l'axe des x, m doit être négatif. Puisque a et b sont positifs, nous obtenons $m = -b/a$, et nous devons donc résoudre l'équation

différentielle : $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y = -\ln x + C\left[x, y > 0\right] \Rightarrow$

$y = e^{-\ln x + C} = e^{\ln x^{-1}} \cdot e^C = x^{-1} \cdot A \Rightarrow y = A/x$. Puisque le point (3, 2) est situé sur la courbe, $3 = A/2 \Rightarrow A = 6$ et la courbe est $y = 6/x$ avec $x > 0$.

13. Soit $P(a, b)$ un point quelconque de la courbe. Si m est la pente de la droite tangente en P, alors $m = y'(a)$ et ainsi une équation de la normale en P est $y - b = -\frac{1}{m}(x - a)$ ou, de façon équivalente, $y = -\frac{1}{m}x + b + \frac{a}{m}$. Le point d'intersection sur l'axe des y est toujours 6,

 © Groupe Modulo inc., 2013

donc $b+\frac{a}{m}=6 \Rightarrow \frac{a}{m}=6-b \Rightarrow m=\frac{a}{6-b}$. Nous devons résoudre l'équation différentielle :

$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{6-y} \Rightarrow (6-y)dy=xdx \Rightarrow \int(6-y)dy=\int xdx \Rightarrow 6y-\frac{1}{2}y^2=\frac{1}{2}x^2+C \Rightarrow 12y-y^2=x^2+K$. Puisque le point (3, 2) est situé sur la courbe, $12(2)-2^2=3^2+K \Rightarrow K=11$. L'équation de la courbe est donc

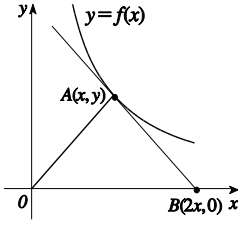
$12y-y^2=x^2+11 \Rightarrow x^2+y^2-12y+36=-11+36 \Rightarrow x^2+(y-6)^2=25$, soit un cercle de centre (0, 6) et de rayon 5.

14. Soit P (x_0, y_0) un point quelconque de la courbe. Puisque l'abscisse du point milieu du segment de droite qui va du point $(x_0; y_0)$ jusqu'à son intersection avec l'axe des x est 0, l'abscisse du point d'intersection avec l'axe des x doit être $-x_0$.

Par conséquent, la pente de la normale est $\frac{y_0-0}{x_0-(-x_0)}=\frac{y_0}{2x_0}$. La pente de la droite tangente est donc $-\frac{2x_0}{y_0}$. Ceci résulte en l'équation différentielle $y'=-\frac{2x}{y} \Rightarrow ydy=-2xdx \Rightarrow \int ydy=\int(-2x)dx \Rightarrow \frac{1}{2}y^2=-x^2+C \Rightarrow x^2+\frac{1}{2}y^2=C$ $[C>0]$. Ceci représente une famille d'ellipses.

15. La figure montre que la pente $OA=\frac{y}{x}$. Si le triangle OAB est isocèle, alors la pente AB doit être $-\frac{y}{x}$, c'est-à-dire l'opposé de la pente OA. Cette pente est aussi égale à $f'(x)$, et nous obtenons donc $\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x} \Rightarrow \int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x} \Rightarrow$

$\ln|y|=-\ln|x|+C \Rightarrow |y|=e^{-\ln|x|+C} \Rightarrow .|y|=(e^{\ln|x|})^{-1}e^C \Rightarrow |y|=\frac{1}{|x|}e^C \Rightarrow y=\frac{K}{x}, K\neq 0.$



 © Groupe Modulo inc., 2013

6. LES SUITES ET LES SÉRIES

6.1 Les suites

1. a) Une suite est une liste de nombres écrits dans un ordre défini. On peut également définir une suite comme une fonction ayant pour domaine l'ensemble des entiers positifs.

b) Les termes a_n s'approchent de 8 à mesure que la valeur de n devient de plus en plus grande. En fait, nous pouvons faire en sorte que a_n soit aussi près de 8 que nous le désirons en choisissant une valeur de n suffisamment grande.

c) Les termes a_n deviennent de plus en plus grands à mesure que la valeur de n devient de plus en plus grande. En fait, nous pouvons faire en sorte que a_n soit aussi grand que nous le désirons en choisissant une valeur de n suffisamment grande.

2. a) Selon la définition 1, une suite convergente est une suite pour laquelle $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe. Exemples : $\{1/n\}$, $\{1/2^n\}$, $\left\{\frac{2n+1}{3n}\right\}$.

b) Une suite divergente est une suite pour laquelle $\lim_{n\to\infty} a_n$ *n'existe pas*. Examples : $\{n\}$, $\{\sin n\}$,$\{(-1)^n\}$

3. $a_n = \frac{2n}{n^2+1}$ et la suite est donc $\left\{\frac{2}{1+1},\frac{4}{4+1},\frac{6}{9+1},\frac{8}{16+1},\frac{10}{25+1},\cdots\right\} = \left\{1,\frac{4}{5},\frac{3}{5},\frac{8}{17},\frac{5}{13},\cdots\right\}$.

4. $a_n = \frac{3^n}{1+2^n}$ et la suite est donc $\left\{\frac{3}{1+2},\frac{9}{1+4},\frac{27}{1+8},\frac{81}{1+16},\frac{243}{1+32},\cdots\right\} = \left\{1,\frac{9}{5},3,\frac{81}{17},\frac{81}{11},\cdots\right\}$.

5. $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{5^n}$ et la suite est donc $\left\{\frac{1}{5^1},\frac{-1}{5^2},\frac{1}{5^3},\frac{-1}{5^4},\frac{1}{5^5},\cdots\right\} = \left\{\frac{1}{5},\frac{1}{25},\frac{1}{125},\frac{1}{625},\frac{1}{3125},\cdots\right\}$.

6. $a_n = \cos\frac{n\pi}{2}$ et la suite est donc $\left\{\cos\frac{\pi}{2},\cos\pi,\cos\frac{3\pi}{2},\cos 2\pi,\frac{5\pi}{2},\cdots\right\} = \{0,-1,0,1,0,\ldots\}$.

7. $a_n = \frac{1}{(n+1)!}$ et la suite est donc $\left\{\frac{1}{2!},\frac{1}{3!},\frac{1}{4!},\frac{1}{5!},\frac{1}{6!}\cdots\right\} = \left\{\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{24},\frac{1}{120},\frac{1}{720},\cdots\right\}$.

8. $a_n = \frac{(-1)^n n}{n!+1}$, donc $a_1 = \frac{(-1)^1 1}{1!+1} = \frac{-1}{2}$ et la suite est $\left\{\frac{-1}{2},\frac{2}{2+1},\frac{-3}{6+1},\frac{4}{24+1},\frac{-5}{120+1}\cdots\right\} = \left\{-\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{7},\frac{4}{25},\frac{5}{121},\cdots\right\}$.

9. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 5a_n - 3$. Chaque terme est défini par récurrence à l'aide du terme précédent.

$a_2 = 5a_1 - 3 = 5(1) - 3 = 2$. $a_3 = 5a_2 - 3 = 5(2) - 3 = 7$. $a_4 = 5a_3 - 3 = 5(7) - 3 = 32$. $a_5 = 5a_4 - 3 = 5(32) - 3 = 157$.

La suite est {1, 2, 7, 32, 157,…}.

10. $a_1 = 6$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{n}$. $a_2 = \frac{a_1}{1} = \frac{6}{1} = 6$. $a_3 = \frac{a_2}{2} = \frac{6}{2} = 3$. $a_4 = \frac{a_3}{3} = \frac{3}{3} = 1$. $a_5 = \frac{a_4}{4} = \frac{1}{4}$. La suite est $\{6,6,3,1,\frac{1}{4},\cdots\}$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

11. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+a_n}$. $a_2 = \dfrac{a_1}{1+a_1} = \dfrac{2}{1+2} = \dfrac{2}{3}$. $a_3 = \dfrac{a_2}{1+a_2} = \dfrac{2/3}{1+2/3} = \dfrac{2}{5}$. $a_4 = \dfrac{a_3}{1+a_3} = \dfrac{2/5}{1+2/5} = \dfrac{2}{7}$. $a_5 = \dfrac{a_4}{1+a_4} = \dfrac{2/7}{1+2/7} = \dfrac{2}{9}$. La suite est $\{2, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{2}{9}, \ldots\}$.

12. $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$. Chaque terme est défini par récurrence à l'aide des deux termes précédents. $a_3 = a_2 - a_1 = 1-2 = -1$. $a_4 = a_3 - a_2 = -1 - 1 = -2$. $a_5 = a_4 - a_3 = -2 - (-1) = -1$. $a_6 = a_5 - a_4 = -1 - (-2) = 1$. La suite est $\{2, 1, -1, -2, -1, 1, \ldots\}$.

13. $\left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \ldots\right\}$. Le dénominateur du $n^{\text{ième}}$ terme est le $n^{\text{ième}}$ nombre entier positif impair, donc $a_n = \dfrac{1}{2n-1}$.

14. $\left\{1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \cdots\right\}$ **.** Chaque terme est $-\frac{1}{3}$ fois le terme précédent, donc $a_n = (-\frac{1}{3})^{n-1}$.

15. $\{-3, 2, -\frac{4}{3}, \frac{8}{9}, -\frac{16}{27}, \ldots\}$ **.** Le premier terme est -3 et chaque terme est $-\frac{2}{3}$ fois le terme précédent, donc $a_n = -3(-\frac{2}{3})^{n-1}$.

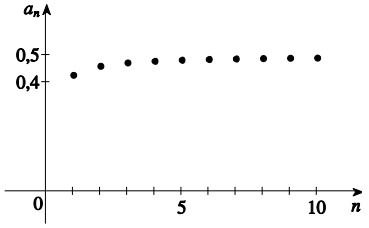
16. $\{5, 8, 11, 14, 17, \ldots\}$. Chaque terme excède de 3 le terme précédent, donc $a_n = a_1 + d(n-1) = 5 + 3(n-1) = 3n + 2$.

17. $\{\frac{1}{2}, -\frac{4}{3}, \frac{9}{4}, -\frac{16}{5}, \frac{25}{6}, \ldots\}$. Le numérateur du $n^{\text{ième}}$ terme est n^2 et son dénominateur est $n+1$. En tenant compte du fait que le signe des termes alterne, nous obtenons $a_n = (-1)^{n+1}\dfrac{n^2}{n+1}$.

18. $\{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \ldots\}$. Deux possibilités sont $a_n = \sin\dfrac{n\pi}{2}$ et $a_n = \cos\dfrac{(n-1)\pi}{2}$.

19.

n	$a_n = \dfrac{3n}{1+6n}$
1	0,4286
2	0,4615
3	0,4737
4	0,4800
5	0,4839
6	0,4865
7	0,4884
8	0,4898
9	0,4909
10	0,4918



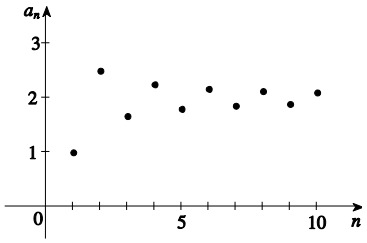
Il semble que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0,5$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{1+6n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(3n)/n}{(1+6n)/n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{1/n+6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

20.

n	$a_n = 2 + \dfrac{(-1)^n}{n}$
1	1,0000
2	2,5000
3	1,6667
4	2,2500
5	1,8000
6	2,1667
7	1,8571
8	2,1250
9	1,8889
10	2,1000



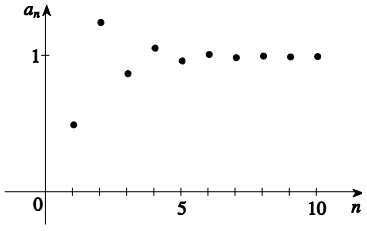
Il semble que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(2 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} 2 + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 2 + 0 = 2$, puisque $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et,

selon le théorème 6, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$.

21.

n	$a_n = 1 + (-\frac{1}{2})^n$
1	0,5000
2	1,2500
3	0,8750
4	1,0625
5	0,9688
6	1,0156
7	0,9922
8	1,0039
9	0,9980
10	1,0010

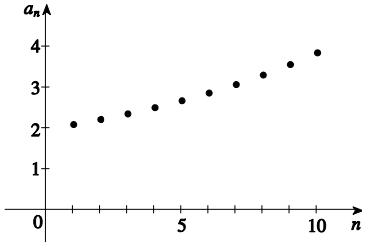


Il semble que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

$\lim\limits_{n\to\infty}(1 + (-\frac{1}{2})^n) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty}(-\frac{1}{2})^n = 1 + 0 = 1$, puisque $\lim\limits_{n\to\infty}(-\frac{1}{2})^n = 0$ selon le théorème 9.

22.

n	$a_n = 1 + \dfrac{10^n}{9^n}$
1	2,1111
2	2,2346
3	2,3717
4	2,5242
5	2,6935
6	2,8817
7	3,0908
8	3,3231
9	3,5812
10	3,8680



Il semble que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ n'existe pas.

$\left\{\dfrac{10^n}{9^n}\right\} = \left\{\left(\dfrac{10}{9}\right)^n\right\}$ diverge selon le théorème 9, puisque $\frac{10}{9} > 1$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

23. $a_n = 1 - (0{,}2)^n$, donc $\lim_{n\to\infty} a_n = 1 - 0 = 1$ selon le théorème 9. Converge.

24. $a_n = \dfrac{n^3}{n^3+1} = \dfrac{n^3/n^3}{(n^3+1)/n^3} = \dfrac{1}{1+1/n^3}$, donc $a_n \to \dfrac{1}{1+0} = 1$ lorsque $n \to \infty$. Converge.

25. $a_n = \dfrac{3+5n^2}{n+n^2} = \dfrac{(3+5n^2)/n^2}{(n+n^2)/n^2} = \dfrac{5+3/n^2}{1+1/n}$, donc $a_n \to \dfrac{5+0}{1+0} = 5$ lorsque $n \to \infty$. Converge.

26. $a_n = \dfrac{n^3}{n+1} = \dfrac{n^3/n}{(n+1)/n} = \dfrac{n^2}{1+1/n^2}$, donc $a_n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$, puisque $\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$ et $\lim_{n\to\infty}(1+1/n^2) = 1$. Diverge.

27. Puisque la fonction exponentielle naturelle est continue en 0, le théorème 7 nous permet d'écrire $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} e^{1/n} = e^{\lim_{n\to\infty}(1/n)} = e^0 = 1$.

Converge.

28. $a_n = \dfrac{3^{n+2}}{5^n} = \dfrac{3^2 3^n}{5^n} = 9(\frac{3}{5})^n$, donc $\lim_{n\to\infty} a_n = 9\lim_{n\to\infty}(\frac{3}{5})^n = 9 \cdot 0 = 0$ selon le théorème 9, où $r = \frac{3}{5}$. Converge.

29. Si $b_n = \dfrac{2n\pi}{1+8n}$, alors $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{(2n\pi)/n}{(1+8n)/n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{2\pi}{1/n+8} = \dfrac{2\pi}{8} = \dfrac{\pi}{4}$. Puisque tan est continue en $\frac{\pi}{4}$, selon le théorème 7,

$\lim_{n\to\infty} \tan\left(\dfrac{2n\pi}{1+8n}\right) = \tan\left(\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n\pi}{1+8n}\right) = \tan\dfrac{\pi}{4} = 1$. Converge.

30. En utilisant la dernière loi des limites pour les suites et le fait que la fonction racine carrée est continue,

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n+1}{9n+1}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{9n+1}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \dfrac{1+1/n}{9+1/n}} = \sqrt{\dfrac{1}{9}} = \dfrac{1}{3}$. Converge.

31. $a_n = \dfrac{n^2}{\sqrt{n^3+4n}} = \dfrac{n^2/\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^3+4n}/\sqrt{n^3}} = \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{1+4/n^2}}$, donc $a_n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$, puisque $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$ et $\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+4/n^2} = 1$. Diverge.

32. Si $b_n = \dfrac{2n}{n+2}$, alors $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{(2n)/n}{(n+2)/n} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{2}{1+2/n} = \dfrac{2}{1} = 2$. Puisque la fonction exponentielle naturelle est continue en 2, selon le théorème 7, $\lim_{n\to\infty} e^{2n/(n+2)} = e^{\lim_{n\to\infty} b_n} = e^2$. Converge.

33. $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}\right| = \dfrac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^{1/2}} = \dfrac{1}{2}(0) = 0$, donc $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ selon le théorème 6. Converge.

 © Groupe Modulo inc., 2013

34. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n/n}{(n+\sqrt{n})/n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+1\sqrt{n}}=\dfrac{1}{1+0}=1$. Ainsi, $\{a_n\}=\left\{\dfrac{(-1)^{n+1}n}{n+\sqrt{n}}\right\}$ dont les termes de rang impair se rapprochent de 1 et dont les termes de rang pair se rapprochent de −1 lorsque $n\to\infty$. Diverge.

35. $a_n=\cos(n/2)$. Cette suite diverge puisque ses termes ne se rapprochent d'aucun nombre réel spécifique lorsque $n\to\infty$. Les valeurs des termes osceillent constament entre −1 et 1.

36. $a_n=\cos(2/n)$. Lorsque $n\to\infty$, $2/n\to 0$, donc $\cos(2/n)\to\cos 0=1$ puisque que la fonction cos est continue. Converge.

37. $a_n=\dfrac{(2n-1)!}{(2n+1)!}=\dfrac{(2n-1)!}{(2n+1)(2n)(2n-1)!}=\dfrac{1}{(2n+1)(2n)}\to 0$ lorsque $n\to\infty$. Converge.

38. $a_n=\dfrac{\ln n}{\ln 2n}=\dfrac{\ln n}{\ln 2+\ln n}=\dfrac{1}{\frac{\ln 2}{\ln n}+1}\to\dfrac{1}{0+1}=1$ lorsque $n\to\infty$. Converge.

39. $a_n=\dfrac{e^n+e^{-n}}{e^{2n}-1}\cdot\dfrac{e^{-n}}{e^{-n}}=\dfrac{1+e^{-2n}}{e^n-e^{-n}}\to 0$ lorsque $n\to\infty$ car $1+e^{-2n}\to 1$ et $e^n-e^{-n}\to\infty$. Converge.

40. $a_n=\dfrac{\arctan n}{n}$. $\lim_{n\to\infty}\arctan n=\lim_{x\to\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$, selon le théorème 3, donc $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. Converge.

41. $a_n=n^2e^{-n}=\dfrac{n^2}{e^n}$. Puisque $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{e^x}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x}{e^x}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to\infty}\dfrac{2}{e^x}=0$, il s'ensuit du théorème 3 que $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. Converge.

42. $a_n=\ln(n+1)-\ln n=\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)=\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\to\ln(1)=0$ lorsque $n\to\infty$ car la fonction ln est continue. Converge.

43. $0\le\dfrac{\cos^2 n}{2^n}\le\dfrac{1}{2^n}$ [puisque $0\le\cos^2 n\le 1$], donc puisque $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$, $\left\{\dfrac{\cos^2 n}{2^n}\right\}$ converge vers 0 selon le théorème du sandwich.

44. $a_n=\sqrt[n]{2^{1+3n}}=(2^{1+3n})^{1/n}=(2^1 2^{3n})^{1/n}=2^{1/n}2^3=8\cdot 2^{1/n}$, donc $\lim_{n\to\infty}a_n=8\lim_{n\to\infty}2^{1/n}=8\cdot 2^{\lim_{n\to\infty}(1/n)}=8\cdot 2^0=8$ selon le théorème 7, car la fonction $f(x)=2^x$ est continue en 0. Converge.

45. $a_n=n\sin(1/n)=\dfrac{\sin(1/n)}{(1/n)}$. Puisque $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\sin(1/x)}{(1/x)}=\lim_{t\to 0+}\dfrac{\sin t}{t}$ [où $t=1/x$] $=1$, il s'ensuit du théorème 3 que $\{a_n\}$ converge vers 1.

46. $a_n=2^{-n}\cos n\pi$. $0\le\left|\dfrac{\cos n\pi}{2^n}\right|\le\dfrac{1}{2^n}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, donc $\lim_{n\to\infty}|a_n|=0$ selon le théorème 9 et $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ selon le théorème 6. Converge.

 © Groupe Modulo inc., 2013

47. $y=\left(1+\frac{2}{x}\right)^x \Rightarrow \ln y = x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$, donc

$\lim_{x\to\infty}\ln y = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+2/x)}{1/x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{1+2/x}\right)\left(-\frac{2}{x^2}\right)}{-1/x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{1+2/x} = 2 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}e^{\ln y} = e^2$, donc selon le théorème 3,

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = e^2$. Converge.

48. $a_n = \frac{\sin 2n}{1+\sqrt{n}}$. $|a_n| \le \frac{1}{1+\sqrt{n}}$ et $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt{n}} = 0$, donc $\frac{-1}{1+\sqrt{n}} \le a_n \le \frac{1}{1+\sqrt{n}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$ selon le théorème du sandwich. Converge.

49. $a_n = \ln(2n^2+1) - \ln(n^2+1) = \ln\left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right) = \ln\left(\frac{2+1/n^2}{1+1/n^2}\right) \to \ln 2$ lorsque $n \to \infty$. Converge.

50. $\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^2}{x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{2(\ln x)(1/x)}{1} = 2\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} \overset{\text{H}}{=} 2\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1} = 0$, donc selon le théorème 3, $\lim_{n\to\infty}\frac{(\ln n)^2}{n} = 0$. Converge.

51. a_n = arctan(ln n). Soit $f(x)$ = arctan(ln x). Alors, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$ puisque ln $x \to \infty$ lorsque $x \to \infty$ et la fonction arctan est continue. Par conséquent, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} f(n) = \frac{\pi}{2}$. Converge.

52. $a_n = n - \sqrt{n+1}\sqrt{n+3} = n - \sqrt{n^2+4n+3} = \frac{n-\sqrt{n^2+4n+3}}{1}\cdot\frac{n+\sqrt{n^2+4n+3}}{n+\sqrt{n^2+4n+3}}$

$= \frac{n^2-(n^2+4n+3)}{n+\sqrt{n^2+4n+3}} = \frac{-4n-3}{n+\sqrt{n^2+4n+3}} = \frac{(-4n-3)/n}{(n+\sqrt{n^2+4n+3})/n} = \frac{-4-3/n}{1+\sqrt{1+4/n+3/n^2}}$,

donc $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{-4-0}{1+\sqrt{1+0+0}} = \frac{-4}{2} = -2$. Converge.

53. {0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1,…} diverge puisque la suite n'est constituée que des deux valeurs 0 et 1 et ne demeure jamais arbitrairement près d'une ou de l'autre valeur (ou de toute autre valeur) quelque soit la valeur grande de n.

54. $\left\{\frac{1}{1},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\cdots\right\}$. $a_{2n-1} = \frac{1}{n}$ et $a_{2n} = \frac{1}{n+2}$ pour tous les nombres entiers positifs n. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, puisque

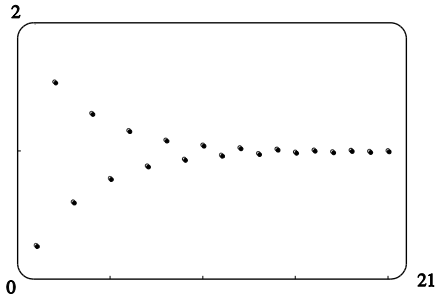
$\lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2} = 0$. Quelque soit la grande valeur de n, nous pouvons toujours faire en sorte que a_n soit aussi proche de 0 que nous le désirons. Converge.

55. $a_n = \frac{n!}{2^n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{(n-1)}{2}\cdot\frac{n}{2} \ge \frac{1}{2}\cdot\frac{n}{2}$ [pour $n > 1$] $= \frac{n}{4} \to \infty$ lorsque $n \to \infty$, donc $\{a_n\}$ diverge.

 © Groupe Modulo inc., 2013

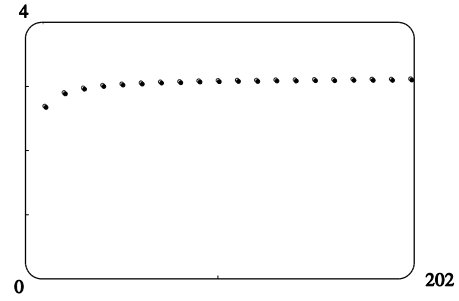
56. $0 < |a_n| = \dfrac{3^n}{n!} = \dfrac{3}{1} \cdot \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{3}{3} \cdot \cdots \cdot \dfrac{3}{(n-1)} \cdot \dfrac{3}{n} \le \dfrac{3}{1} \cdot \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{3}{n}$ [pour $n > 2$] $= \dfrac{27}{2n} \to 0$ lorsque $n \to \infty$, donc selon le théorème du sandwich et le théorème 6, $\{(-3)^n/n!\}$ converge vers 0.

57.



Le graphique semble montrer que la suite converge vers 1. $\{(-2/e)^n\}$ converge vers 0 selon le théorème 7 et, par conséquent, $\{1 + (-2/e)^n\}$ converge vers $1 + 0 = 1$.

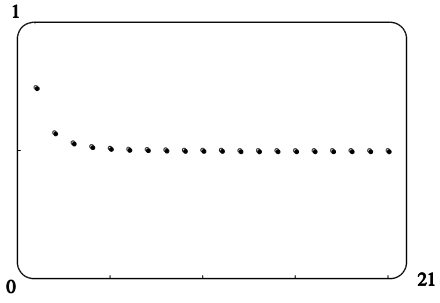
58.



Le graphique semble montrer que la suite converge vers un certain nombre légèrement supérieur à 3.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\pi/\sqrt{n})}{\pi/\sqrt{n}} \cdot \pi$$
$$= \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} \cdot \pi \quad [x = \pi\sqrt{n}] = 1 \cdot \pi = \pi$$

59.

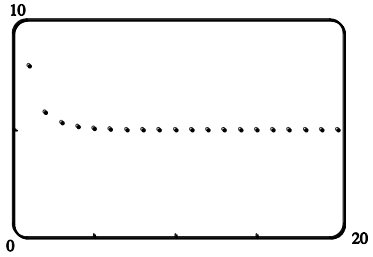


 © Groupe Modulo inc., 2013

Le graphique semble montrer que la suite converge vers $\frac{1}{2}$. Lorsque $n \to \infty$, $a_n = \sqrt{\frac{3+2n^2}{8n^2+n}} = \sqrt{\frac{3/n^2+2}{8+1/n}} \Rightarrow \sqrt{\frac{0+2}{8+0}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$,

donc $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

60.



Le graphique semble montrer que la suite converge vers 5.

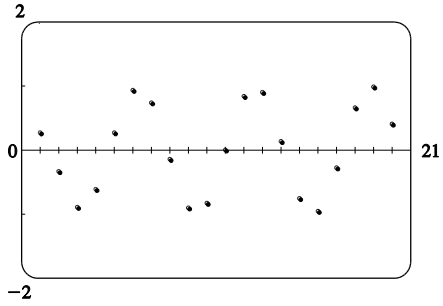
$$5 = \sqrt[n]{5n} \le \sqrt[n]{3^n + 5^n} \le \sqrt[n]{5^n + 5^n} = \sqrt[n]{2}\sqrt[n]{5^n}$$
$$= \sqrt[n]{2}\cdot 5 \to 5 \text{ lorsque } n \to \infty \left[\lim_{n\to\infty} 2^{1/n} = 2^0 = 1\right]$$

Par conséquent, $a_n \to 5$ selon le théorème du sandwich.

Autre solution : Soit $y = (3^x + 5^x)^{1/x}$. Alors, $\lim_{x\to\infty} \ln y = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(3^x + 5^x)}{x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{3^x \ln 3 + 5^x \ln 5}{3^x + 5^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\frac{3}{5})^x \ln 3 + \ln 5}{(\frac{3}{5})^x + 1} = \ln 5$,

donc $\lim_{x\to\infty} y = e^{\ln 5} = 5$ et donc, $\left\{\sqrt[n]{3^n + 5^n}\right\}$ converge vers 5.

61.



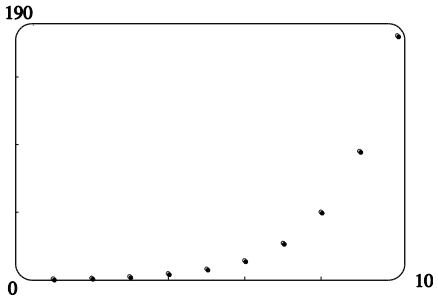
Le graphique semble montrer que la suite $\{a_n\} = \left\{\frac{n^2 \cos n}{1+n^2}\right\}$ est divergente, puisqu'elle oscille constamment entre 1 et −1

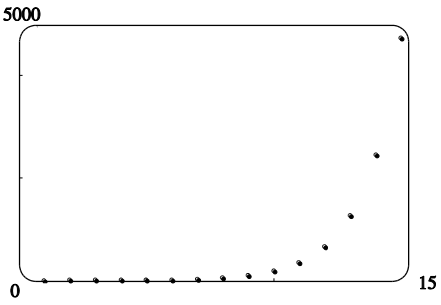
(approximativement). Afin de démontrer ce fait, supposons que $\{a_n\}$ converge vers L. Si $b_n = \frac{n^2}{1+n^2}$, alors $\{b_n\}$ converge vers 1

et $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L}{1} = L$. Cependant, $\frac{a_n}{b_n} = \cos\ n$, donc $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ n'existe pas. Cette contradiction démontre que $\{a_n\}$ diverge.

 © Groupe Modulo inc., 2013

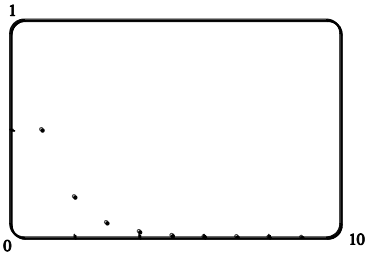
62.





Les graphiques semblent montrer que la suite diverge. $a_n = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{n!}$. Démontrons tout d'abord par induction $a_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ quelque soit n. Ceci est de toute évidence vrai pour $n = 1$. Désignons donc représentons par P_n la proposition $a_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ et supposons qu'elle soir vraie pour tout n. Nous devons alors démontrer que la proposition est vraie pour $n + 1$. $a_{n+1} = a_n \cdot \dfrac{2n+1}{n+1} \geq \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1} \cdot \dfrac{2n+1}{n+1}$ (hypothèse d'induction). Cependant, $\dfrac{2n+1}{n+1} \geq \dfrac{3}{2}$ [puisque $2(2n+1) \geq 3(n+1) \iff 4n+2 \geq 3n+3 \iff n \geq 1$] et nous obtenons donc $a_{n+1} \geq (\frac{3}{2})^{n-1} \cdot \frac{3}{2} = (\frac{3}{2})^n$, ce qui démontre que P_{n+1} est vraie. Par conséquent, nous avons démontré notre proposition initiale; donc, puisque $\left\{(\frac{3}{2})^{n-1}\right\}$ est divergente [selon le théorème 9], la suite donnée $\{a_n\}$ l'est également par comparaison.

63.



Le graphique semble montrer que la suite converge vers 0.

$0 < a_n = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{(2n)^n} = \dfrac{1}{2n}\cdot\dfrac{3}{2n}\cdot\dfrac{5}{2n}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2n-1}{2n} \leq \dfrac{1}{2n}\cdot(1)\cdot(1)\cdot\cdots\cdot(1) = \dfrac{1}{2n} \to 0$ lorsque n→∞. Donc, selon le théorème du sandwich, $\left\{\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{(2n)^n}\right\}$ converge vers 0.

64. a) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 4 - a_n$ pour $n \geq 1$. $a_1 = 1$, $a_2 = 4 - a_1 = 4 - 1 = 3$, $a_3 = 4 - a_2 = 4 - 3 = 1$, $a_4 = 4 - a_3 = 4 - 1 = 3$, $a_5 = 4 - a_4 = 4 - 3 = 1$. Puisque les termes de la suite alternent entre 1 et 3, la suite est divergente.

b) $a_1 = 2$, $a_2 = 4 - a_1 = 4 - 2 = 2$, $a_3 = 4 - a_2 = 4 - 2 = 2$. Puisque tous les termes sont 2, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$ et, par conséquent, la suite est convergente.

 © Groupe Modulo inc., 2013

65. a) $a_n = 1000(1{,}06)^n \Rightarrow a_1 = 1060$, $a_2 = 1123{,}60$, $a_3 = 1191{,}02$, $a_4 = 1262{,}48$ et $a_5 = 1338{,}23$.

b) $\lim_{n\to\infty} a_n = 1000 \lim_{n\to\infty} (1{,}06)^n$ et la suite est donc divergente selon le théorème 9, avec $r = 1{,}06 > 1$.

66. a) En remplaçant n par les nombres 1 à 6 dans $I_n = 100\left(\dfrac{1{,}0025^n - 1}{0{,}0025} - n\right)$, nous obtenons

$I_1 = 0$ \$, $I_2 = 0{,}25$ \$, $I_3 = 0{,}75$ \$, $I_4 = 1{,}50$ \$, $I_5 = 2{,}51$ \$ et $I_6 = 3{,}76$ \$.

b) Pour la période de deux ans, en remplaçant n par le nombre $2 \cdot 12 = 24$, nous obtenons 70,28 \$.

67. a) Le problème spécifie que la population initiale est de 5000, donc $P_0 = 5000$. Le nombre de poissons-chats augmente de 8 % par mois, et une récolte de 300 poissons est effectuée chaque mois; donc,

$P_1 = P_0 + 8\,\%P_0 - 300 = 1{,}08P_0 - 300$, $P_2 = 1{,}08P_1 - 300$ et ainsi de suite.

Par conséquent, $P_n = 1{,}08P_{n-1} - 300$.

b) En utilisant la formule de récurrence avec $P_0 = 5000$, nous obtenons $P_1 = 5100$, $P_2 = 5208$, $P_3 = 5325$ (en arrondissant toute fraction d'un poisson-chat), $P_4 = 5451$, $P_5 = 5587$ et $P_6 = 5734$, qui est le nombre de poissons-chats dans l'étang après six mois.

68. $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & \text{si } a_n \text{ est un nombre pair} \\ 3a_n + 1 & \text{si } a_n \text{ est un nombre impair} \end{cases}$ Lorsque $a_1 = 11$, les 40 premiers termes sont 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4. Lorsque $a_1 = 25$, les 40 premiers termes sont 25, 76, 38, 19, 58, 29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4. La fameuse conjecture de Collatz stipule que cette suite atteint toujours 1, quel que soit l'entier de départ a_1.

69. Si $|r| \geq 1$, alors $\{r^n\}$ diverge selon le théorème 9; donc, $\{nr^n\}$ diverge également, puisque $|nr^n| = n\,|r^n| \geq |r^n|$. Si $|r| < 1$,

alors $\lim_{x\to\infty} xr^x = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{r^{-x}} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{(-\ln r)r^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{r^x}{-\ln r} = 0$ et, par conséquent, $\{nr^n\}$ converge lorsque $|r| < 1$.

70. a) Soit $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. Selon la définition 2, cela signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre entier N tel que $|a_n - L| < \varepsilon$ lorsque $n > N$. Par conséquent, $|a_{n+1} - L| < \varepsilon$ lorsque $n + 1 > N \Leftrightarrow n > N - 1$. Il s'ensuit que $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = L$ et donc $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$.

b) Si $L = \lim_{n\to\infty} a_n$, alors $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = L$ également, donc L doit satisfaire à $L = 1/(1+L) \Rightarrow L^2 + L - 1 = 0 \Rightarrow L = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (puisque L, s'il existe, ne peut pas être négatif).

71. Puisque $\{a_n\}$ est une suite décroissante, $a_n > a_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$. Parce que les valeurs de tous ses termes se situent entre 5 et 8, $\{a_n\}$ est une suite bornée. Selon le théorème des suites monotones, $\{a_n\}$ est convergente, c'est-à-dire que $\{a_n\}$ a une limite L. L doit être inférieure à 8 puisque $\{a_n\}$ est décroissante, donc $5 \leq L < 8$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

72. Le signe des termes de $a_n = (-2)^{n+1}$ alterne et la suite est donc non monotone. Les cinq premiers termes sont 4, −8, 16, −32 et 64.

Puisque $\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty} 2^{n+1} = \infty$, la suite n'est pas bornée.

73. $a_n = \dfrac{1}{2n+3}$ est décroissante puisque $a_{n+1} = \dfrac{1}{2(n+1)+3} = \dfrac{1}{2n+5} < \dfrac{1}{2n+3} = a_n$ pour tout $n \geq 1$. La suite est bornée

puisque $0 < a_n \leq \frac{1}{5}$ pour tout $n \geq 1$. On constate que $a_1 = \dfrac{1}{5}$.

74. $a_n = \dfrac{2n-3}{3n+4}$ définit une suite croissante puisque pour $f(x) = \dfrac{2x-3}{3x+4}$, $f'(x) = \dfrac{(3x+4)(2)-(2x-3)(3)}{(3x+4)^2} = \dfrac{17}{(3x+4)^2} > 0$. La suite est

bornée puisque $a_n \geq a_1 = -\frac{1}{7}$ pour $n \geq 1$ et $a_n < \dfrac{2n-3}{3n} < \dfrac{2n}{3n} = \dfrac{2}{3}$ $n \geq 1$.

75. Le signe des termes de $a_n = n(-1)^n$ alterne et la suite est donc non monotone. Les cinq premiers termes sont −1, 2, −3, 4 et −5.

Puisque $\lim_{n\to\infty}|a_n| = \lim_{n\to\infty} n = \infty$, la suite n'est pas bornée.

76. $a_n = ne^{-n}$ définit une suite décroissante positive puisque la fonction $f(x) = xe^{-x}$ est décroissante pour $x > 1$.

[$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x) < 0$ pour $x > 1$.] La suite est bornée supérieurement par $a_1 = \frac{1}{e}$ et inférieurement par 0.

77. $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$ définit une suite décroissante puisque pour $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, $f'(x) = \dfrac{(x^2+1)(1)-x(2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \leq 0$ pour $x \geq 1$. La suite

est bornée puisque $0 < a_n \leq \frac{1}{2}$ pour tout $n \geq 1$.

78. $a_n = n + \dfrac{1}{n}$ définit une suite croissante puisque la fonction $g(x) = x + \dfrac{1}{x}$ est croissante pour $x > 1$. [$g'(x) = 1 - 1/x^2 > 0$ pour $x > 1$.]

La suite n'est pas bornée puisque $a_n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$. (Elle est toutefois bornée inférieurement par $a_1 = 2$.)

79. Pour $\left\{\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \cdots\right\}$, $a_1 = 2^{1/2}$, $a_2 = 2^{3/4}$, $a^3 = 2^{7/8}$,…, donc $a_n = {}^{2(2^n-1)/2^n} = 2^{1-(1/2^n)}$. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 2^{1-(1/2^n)} = 2^1 = 2$.

Autre solution : Soit $L = \lim_{n\to\infty} a_n$. (Nous pourrions montrer que la limite existe en démontrant que $\{a_n\}$ est bornée et croissante.) Alors,

L doit satisfaire à $L = \sqrt{2 \cdot L} \quad \Rightarrow \quad L^2 = 2L \quad \Rightarrow \quad L(L-2) = 0$. $L \neq 0$ puisque la suite augmente, donc $L = 2$.

80. a) Désignons par P_n la proposition que $a_{n+1} \geq a_n$ et $a_n \leq 3$. P_1 est de toute évidence vraie. Supposons que P_n est vraie et démontrons ensuite qu'il en découle que P_{n+1} est également vraie.

$a_{n+2} \geq a_{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2+a_{n+1}} \geq \sqrt{2+a_n} \quad \Leftrightarrow \quad 2 + a_{n+1} \geq 2 + a_n \quad \Leftrightarrow \quad a_{n+1} \geq a_n$, qui est l'hypothèse d'induction.

$a_{n+1} \le 3 \iff \sqrt{2+a_n} \le 3 \iff 2+a_n \le 9 \iff a_n \le 7$, qui est certainement vraie puisque nous supposons que $a_n \le 3$. P_n est donc vraie pour tout n et donc, $a_1 \le a_n \le 3$ (ce qui démontre que la suite est bornée). Par conséquent, selon le théorème des suites monotones, $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe.

b) Si $L = \lim_{n\to\infty} a_n$, alors $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = L$ également et donc,

$L = \sqrt{2+L} \Rightarrow L^2 = 2+L \iff L^2 - L - 2 = 0 \iff (L+1)(L-2) = 0 \iff L = 2$ [puisque L ne peut pas être négatif].

81. $a_1 = 1, a_{n+1} = 3 - \dfrac{1}{a_n}$. Montrons par induction que $\{a_n\}$ est croissante et bornée supérieurement par 3. Désignons par P_n la proposition que $a_{n+1} > a_n$ et $0 < a_n < 3$. P_1 est de toute évidence vraie. Supposons que P_n est vraie. Alors,

$a_{n+1} > a_n \Rightarrow \dfrac{1}{a_{n+1}} < \dfrac{1}{a_n} \Rightarrow -\dfrac{1}{a_{n+1}} > -\dfrac{1}{a_n}$. Or, $a_{n+2} = 3 - \dfrac{1}{a_{n+1}} > 3 - \dfrac{1}{a_n} = a_{n+1} \iff P_{n+1}$. Ceci démontre que $\{a_n\}$ est croissante et bornée supérieurement par 3. Donc, $1 = a_1 < a_n < 3$, c'est-à-dire que $\{a_n\}$ est bornée et, par conséquent, converge, selon le théorème des suites monotones. Si $L = \lim_{n\to\infty} a_n$, alors $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = L$ également et L doit donc satisfaire

à $L = 3 - 1/L \Rightarrow L^2 - 3L + 1 = 0 \Rightarrow L = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. Cependant, $L > 1$, donc $L = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

82. $a_1 = 2, a_{n+1} = \dfrac{1}{3 - a_n}$. Utilisons l'induction. Désignons par P_n la proposition que $0 < a_{n+1} \le a_n \le 2$. P_1 est de toute évidence vraie, puisque $a_2 = 1/(3-2) = 1$. Supposons maintenant que P_n est vraie. Alors,

$a_{n+1} \le a_n \Rightarrow -a_{n+1} \ge -a_n \Rightarrow 3 - a_{n+1} \ge 3 - a_n \Rightarrow a_{n+2} = \dfrac{1}{3-a_{n+1}} \le \dfrac{1}{3-a_n} = a_{n+1}$. De plus, $a_{n+2} > 0$ [puisque $3 - a_{n+1}$ est positif] et $a_{n+1} \le 2$ selon l'hypothèse d'induction. P_{n+1} est donc vraie. Pour trouver la limite, utilisons le fait que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} \Rightarrow L = \frac{1}{3-L} \Rightarrow L^2 - 3L + 1 = 0 \Rightarrow L = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. Cependant, $L \le 2$, donc $L = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

83. a) Soit a_n le nombre de paires de lapin au $n^{\text{ième}}$ mois. De toute évidence, $a_1 = 1 = a_2$. Au $n^{\text{ième}}$ mois, chaque paire âgée d'au moins 2 mois (c'est-à-dire a_{n-2} paires) produira une nouvelle paire qui s'ajoutera aux a_{n-1} paires déjà existantes. Par conséquent, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, de sorte que $\{a_n\} = \{f_n\}$, la suite de Fibonacci.

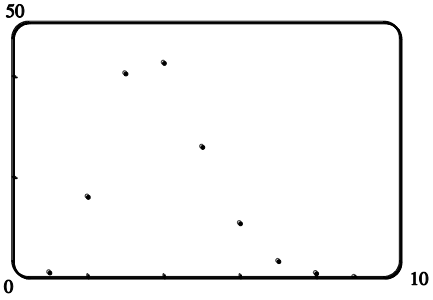
b) $a_n = \dfrac{f_{n+1}}{f_n} \Rightarrow a_{n-1} = \dfrac{f_n}{f_{n-1}} = \dfrac{f_{n-1}+f_{n-2}}{f_{n-1}} = 1 + \dfrac{f_{n-2}}{f_{n-1}} = 1 + \dfrac{1}{f_{n-1}/f_{n-2}} = 1 + \dfrac{1}{a_{n-2}}$. Si $L = \lim_{n\to\infty} a_n$, alors $L = \lim_{n\to\infty} a_{n-1}$ et $L = \lim_{n\to\infty} a_{n-2}$, donc L doit satisfaire à $L = 1 + \dfrac{1}{L} \Rightarrow L^2 - L - 1 = 0 \Rightarrow L = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ [puisque L doit être positif].

84. a) Si la fonction f est continue, alors $f(L) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = L$, selon l'exercice 70

 © Groupe Modulo inc., 2013

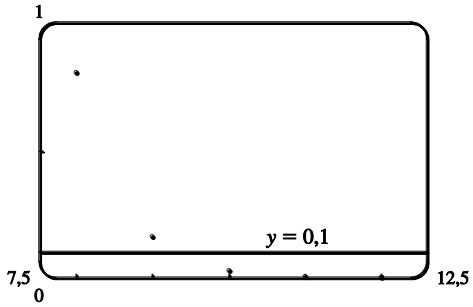
b) En appuyant sur le bouton cosinus de façon répétée sur la calculatrice (c'est-à-dire en prenant le cosinus de la réponse précédente) jusqu'à ce que la valeur affichée se stabilise, nous obtenons $L \approx 0{,}739\ 09$.

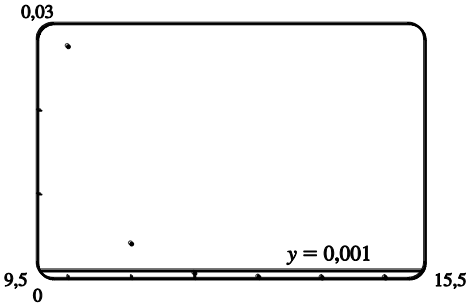
85. a)



Le graphique semble montrer que la suite $\left\{\frac{n^5}{n!}\right\}$ converge vers 0, c'est-à-dire que $\lim_{n\to\infty}\frac{n^5}{n!}=0$.

b)





Le premier graphique semble montrer que la plus petite valeur possible de N correspondant à $\varepsilon = 0{,}1$ est 9, puisque $n^5/n! < 0{,}1$ lorsque $n \geq 10$; toutefois, $9^5/9! > 0{,}1$. Le deuxième graphique semble montrer que pour $\varepsilon = 0{,}001$, la plus petite valeur possible de N est 11 puisque $n^5/n! < 0{,}001$ lorsque $n \geq 12$.

86. Soit $\varepsilon > 0$ et soit N tout nombre entier positif supérieur à $\ln(\varepsilon)/\ln|r|$. Si $n > N$, alors $n > \ln(\varepsilon)/\ln|r| \Rightarrow n\ln|r| < \ln\varepsilon$ [puisque $|r|<1 \Rightarrow \ln|r|<0] \Rightarrow \ln(|r|^n) < \ln\varepsilon \Rightarrow |r|^n < \varepsilon \Rightarrow |r^n - 0| < \varepsilon$ et donc, selon la définition 2, $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$.

87. **Théorème 6 :** Si $\lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$, alors $\lim_{n\to\infty} -|a_n| = 0$ et, puisque $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$, nous obtenons $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ selon le théorème du sandwich.

88. **Théorème 7 :** Si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ et la fonction f est continue à L, alors $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(L)$. **Démonstration :** Nous devons démontrer que, pour un nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre entier N tel que $|f(a_n) - f(L)| < \varepsilon$ lorsque $n > N$. Supposons que $\varepsilon > 0$. Comme la fonction f est continue à L, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que $|f(x) - f(L)| < \varepsilon$ si $|x - L| < \delta$. Puisque $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, il existe un nombre entier N tel que $|a_n - L| < \delta$ si $n > N$. Supposons que $n > N$. Alors, $0 < |a_n - L| < \delta$, donc $|f(a_n) - f(L)| < \varepsilon$.

89. **À démontrer :** Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ et $\{b_n\}$ est bornée, alors $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = 0$. **Démonstration :** Puisque $\{b_n\}$ est bornée, il existe un nombre positif M tel que $|b_n| \leq M$ et, par conséquent, $|a_n|\,|b_n| \leq |a_n|\,M$ pour tout $n \geq 1$. Supposons que $\varepsilon > 0$ est donné. Puisque $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, il

 © Groupe Modulo inc., 2013

existe un nombre entier N tel que $|a_n - 0| < \frac{\varepsilon}{M}$ si $n > N$. Alors, $|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| = |a_n||b_n| \leq |a_n|M = |a_n - 0|M < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$ pour tout $n > N$. Puisque ε était arbitraire, $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = 0$.

90. a) $$\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a} = b^n + b^{n-1}a + b^{n-2}a^2 + b^{n-3}a^3 + \cdots + ba^{n-1} + a^n$$
$$< b^n + b^{n-1}b + b^{n-2}b^2 + b^{n-3}b^3 + \cdots + bb^{n-1} + b^n = (n+1)b^n$$

b) Puisque $b - a > 0$, nous obtenons $b^{n+1} - a^{n+1} < (n+1)b^n(b-a) \Rightarrow b^{n+1} - (n+1)b^n(b-a) < a^{n+1} \Rightarrow b^n[(n+1)a - nb] < a^{n+1}$.

c) Avec ce changement de variable, $(n+1)a - nb = 1$ et donc, $b^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < a^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$.

d) Avec ce changement de variable, nous obtenons $\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right) < 1 \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n < 2 \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} < 4$.

e) $a_n < a_{2n}$ puisque $\{a_n\}$ est croissante, donc $a_n < a_{2n} < 4$.

f) Puisque $\{a_n\}$ est croissante et bornée supérieurement par 4, $a_1 \leq a_n \leq 4$ et donc, $\{a_n\}$ est bornée et monotone et, par conséquent, selon le théorème des suites monotones, a une limite.

91. a) Démontrons tout d'abord que $a > a_1 > b_1 > b$. $a_1 - b_1 = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(a - 2\sqrt{ab} + b) = \frac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 > 0$

[puisque $a > b$] $\Rightarrow$ $a_1 > b_1$. De plus, $a - a_1 = a - \frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{2}(a-b) > 0$ et $b - b_1 = b - \sqrt{ab} = \sqrt{b}\left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right) < 0$,

donc $a > a_1 > b_1 > b$. Nous pouvons démontrer de la même façon que $a_1 > a_2 > b_2 > b_1$ et la proposition donnée est donc vraie pour $n = 1$. Supposons qu'elle est vraie pour $n = k$, c'est-à-dire que $a_k > a_{k+1} > b_{k+1} > b_k$. Alors,

$a_{k+2} - b_{k+2} = \frac{1}{2}(a_{k+1} + b_{k+1}) - \sqrt{a_{k+1}b_{k+1}} = \frac{1}{2}\left(a_{k+1} - 2\sqrt{a_{k+1}b_{k+1}} + b_{k+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{b_{k+1}}\right)^2 > 0$,

$a_{k+1} - a_{k+2} = a_{k+1} - \frac{1}{2}(a_{k+1} + b_{k+1}) = \frac{1}{2}(a_{k+1} - b_{k+1}) > 0$ et

$b_{k+1} - b_{k+2} = b_{k+1} - \sqrt{a_{k+1}b_{k+1}} = \sqrt{b_{k+1}}\left(\sqrt{b_{k+1}} - \sqrt{a_{k+1}}\right) < 0 \Rightarrow a_{k+1} > a_{k+2} > b_{k+2} > b_{k+1}$; la proposition est donc vraie pour $n = k + 1$. Par conséquent, par induction mathématique, elle est vraie pour tout n.

b) À l'aide de la sous-question a), nous obtenons $a > a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n > b$, qui démontre que les deux suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ sont monotones et bornées. Elles sont donc toutes deux convergentes selon le théorème des suites monotones.

c) Soit $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ et $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$. Alors, $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + b_n}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\alpha + \beta}{2} \Rightarrow 2\alpha = \alpha + \beta \Rightarrow \alpha = \beta$.

92. a) Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = L$, il existe une valeur N_1 telle que $|a_{2n} - L| < \varepsilon$ pour $n > N_1$. Puisque $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = L$, il existe une valeur N_2 telle que $|a_{2n+1} - L| < \varepsilon$ pour $n > N_2$. Posons que $N = \max\{2N_1, 2N_2 + 1\}$ et que $n > N$. Si n est pair, alors $n = 2m$

 © Groupe Modulo inc., 2013

lorsque $m > N_1$, donc $|a_n - L| = |a_{2m} - L| < \varepsilon$. Si n est impair, alors $n = 2m + 1$, lorsque $m > N_2$, donc $|a_n - L| = |a_{2m+1} - L| < \varepsilon$.

Par conséquent, $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

b) $a_1 = 1$, $a_2 = 1 + \frac{1}{1+1} = \frac{3}{2} = 1{,}5$, $a_3 = 1 + \frac{1}{5/2} = \frac{7}{5} = 1{,}4$, $a_4 = 1 + \frac{1}{12/5} = \frac{17}{12} = 1{,}41\overline{6}$, $a_5 = 1 + \frac{1}{29/12} = \frac{41}{29} \approx 1{,}413\,793$,

$a_6 = 1 + \frac{1}{70/29} = \frac{99}{70} \approx 1{,}414\,286$, $a_7 = 1 + \frac{1}{169/70} = \frac{239}{169} \approx 1{,}414\,201$, $a_8 = 1 + \frac{1}{408/169} = \frac{577}{408} \approx 1{,}414\,216$. On constate que $a_1 < a_3 < a_5 < a_7$ et $a_2 > a_4 > a_6 > a_8$. Il semble que les termes impairs sont croissants et que les termes pairs sont décroissants. Démontrons par induction mathématique que $a_{2n-2} > a_{2n}$ et $a_{2n-1} < a_{2n+1}$. Supposons que $a_{2k-2} > a_{2k}$. Alors,

$$1 + a_{2k-2} > 1 + a_{2k} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1+a_{2k-2}} < \frac{1}{1+a_{2k}} \quad \Rightarrow 1 + \frac{1}{1+a_{2k-2}} < 1 + \frac{1}{1+a_{2k}} \quad \Rightarrow a_{2k-1} < a_{2k+1} \Rightarrow$$

$$1 + a_{2k-1} < 1 + a_{2k+1} \quad \Rightarrow \frac{1}{1+a_{2k-1}} > \frac{1}{1+a_{2k+1}} \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{1}{1+a_{2k-1}} > 1 + \frac{1}{1+a_{2k+1}} \quad \Rightarrow \quad a_{2k} > a_{2k+2}.$$

Nous avons ainsi démontré par induction que les termes impairs sont croissants et que les termes pairs sont décroissants. De plus, les valeurs de tous les termes se situent entre 1 et 2, donc $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ sont toutes deux des suites monotones bornées et sont, par conséquent, convergentes, selon le théorème des suites monotones. $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = L$. Alors, $\lim_{n\to\infty} a_{2n+2} = L$ également. Nous obtenons

$a_{n+2} = 1 + \dfrac{1}{1+1+1/(1+a_n)} = 1 + \dfrac{1}{(3+2a_n)/(1+a_n)} = \dfrac{4+3a_n}{3+2a_n}$, donc $a_{2n+2} = \dfrac{4+3a_{2n}}{3+2a_{2n}}$. Si nous prenons la limite des deux côtés de l'équation, nous obtenons $L = \dfrac{4+3L}{3+2L} \quad \Rightarrow \quad 3L + 2L^2 = 4 + 3L \quad \Rightarrow \quad L^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad L = \sqrt{2}$ [puisque $L > 0$]. Par conséquent, $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \sqrt{2}$. De façon similaire, nous trouvons que $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \sqrt{2}$. Donc, selon la sous-question a), $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$.

93. a) Supposons que $\{p_n\}$ converge vers p. Alors,

$$p_{n+1} = \frac{bp_n}{a+p_n} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} p_{n+1} = \frac{b\lim_{n\to\infty} p_n}{a + \lim_{n\to\infty} p_n} \Rightarrow p = \frac{bp}{a+p} \quad \Rightarrow \quad p^2 + ap = bp \Rightarrow p(p+a-b) = 0 \Rightarrow p = 0 \text{ ou } p = b - a.$$

b) $p_{n+1} = \dfrac{bp_n}{a+p_n} = \dfrac{\left(\frac{b}{a}\right)p_n}{1+\frac{p_n}{a}} < \left(\frac{b}{a}\right)p_n$, puisque $1 + \dfrac{p_n}{a} > 1$.

c) Selon la sous-question b), $p_1 < \left(\frac{b}{a}\right)p_0$, $p_2 < \left(\frac{b}{a}\right)p_1 < \left(\frac{b}{a}\right)^2 p_0$, $p_3 < \left(\frac{b}{a}\right)p_2 < \left(\frac{b}{a}\right)^3 p_0$ et ainsi de suite. En général, $p_n < \left(\frac{b}{a}\right)^n p_0$, donc $\lim_{n\to\infty} p_n \le \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^n \cdot p_0 = 0$, puisque $b < a$. $\left[\text{selon l'équation 7), } \lim_{n\to\infty} r^n = 0 \text{ si } -1 < r < 1\right.$. Dans ce cas-ci, $r = \dfrac{b}{a} \in]0,1[.\ \Big]$

 © Groupe Modulo inc., 2013

d) Soit $a < b$. Démontrons tout d'abord par induction que si $p_0 < b - a$, alors $p_n < b - a$ et $p_{n+1} > p_n$. Pour $n = 0$, nous obtenons $p_1 - p_0 = \frac{bp_0}{a + p_0} - p_0 = \frac{p_0(b - a - p_0)}{a + p_0} > 0$ puisque $p_0 < b - a$. Donc, $p_1 > p_0$. Supposons maintenant que la proposition est vraie pour $n = k$, c'est-à-dire $p_k < b - a$ et $p_{k+1} > p_k$. Alors,

$b - a - p_{k+1} = b - a - \frac{bp_k}{a + p_k} = \frac{a(b - a) + bp_k - ap_k - bp_k}{a + p_k} = \frac{a(b - a - p_k)}{a + pk} > 0$ parce que $p_k < b - a$. Donc, $p_{k+1} < b - a$. De plus, $p_{k+2} - p_{k+1} = \frac{bp_{k+1}}{a + p_{k+1}} - p_{k+1} = \frac{p_{k+1}(b - a - p_{k+1})}{a + p_{k+1}} > 0$ puisque $p_{k+1} < b - a$. Par conséquent, $p_{k+2} > p_{k+1}$. La proposition est donc vraie pour $n = k + 1$. Par induction mathématique, elle est par conséquent vraie pour tout n. Une démonstration similaire par induction démontre que si $p_0 > b - a$, alors $p_n > b - a$ et $\{p_n\}$ est décroissante.

Dans les deux cas, la suite $\{p_n\}$ est bornée et monotone et elle est donc convergente selon le théorème des suites monotones. Il s'ensuit donc, selon la sous-question a), que $\lim_{n \to \infty} p_n = b - a$.

PROJET DE LABORATOIRE

Les suites logistiques

1. Pour concevoir un tel programme à l'aide de Maple, il est préférable de tout d'abord calculer tous les points et ensuite de les représenter graphiquement. Une suite possible de commandes [en utilisant $p_0 = \frac{1}{2}$ et $k = 1{,}5$ dans l'équation aux différences] est :

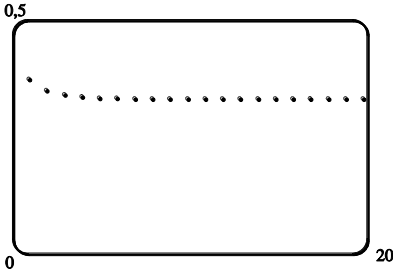
```
t:= 't';p(0):=1/2;k:=1.5;
for j from 1 to 20 do p(j):=k*p(j-1)*(1-p(j-1)) od;
plot([seq([t,p(t)] t=0..20)],t=0..20,p=0..0.5,style=point);
```

Si nous employons Mathematica, nous pouvons utiliser le programme suivant :

```
p[0]=1/2
k=1.5
p[j_]:=k*p[j-1]*(1-p[j-1])
P=Table[p[t],{t,20}]
ListPlot[P]
```

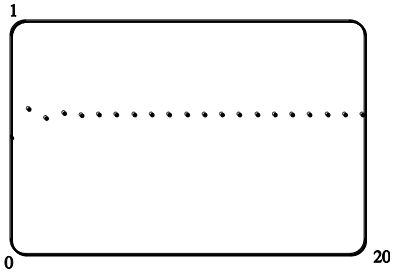
Avec $p_0 = \frac{1}{2}$ et $k = 1{,}5$:

n	p_n	n	p_n	n	p_n
0	0,5	7	0,333 846 507 6	14	0,333 337 330 3
1	0,375	8	0,333 589 525 5	15	0,333 335 331 8
2	0,351 562 5	9	0,333 461 330 9	16	0,333 334 332 6
3	0,341 949 462 9	10	0,333 397 307 6	17	0,333 333 832 9
4	0,337 530 041 6	11	0,333 365 314 3	18	0,333 333 583 1
5	0,335 405 268 9	12	0,333 349 322 3	19	0,333 333 458 2
6	0,334 362 861 7	13	0,333 341 327 4	20	0,333 333 395 8



Avec $p_0 = \frac{1}{2}$ et $k = 2{,}5$:

n	p_n	n	p_n	n	p_n
0	0,5	7	0,600 416 479 0	14	0,599 996 741 7
1	0,625	8	0,599 791 326 9	15	0,600 001 629 1
2	0,585 937 5	9	0,600 104 227 7	16	0,599 999 185 4
3	0,606 536 865 1	10	0,599 947 859 0	17	0,600 000 407 3
4	0,596 624 740 9	11	0,600 026 063 7	18	0,599 999 796 4
5	0,601 659 148 6	12	0,599 986 966 4	19	0,600 000 101 8
6	0,599 163 543 7	13	0,600 006 516 4	20	0,599 999 949 1

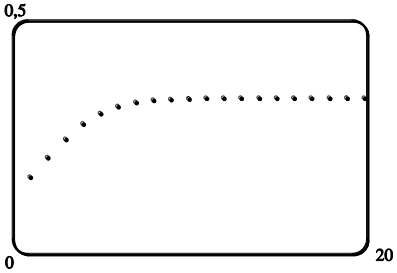


Ces suites semblent toutes deux converger (la première vers environ $\frac{1}{3}$, la deuxième vers environ 0,60).

 © Groupe Modulo inc., 2013

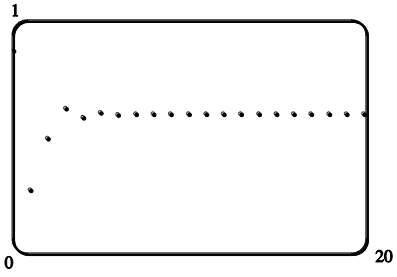
Avec $p_0 = \frac{7}{8}$ et $k = 1{,}5$:

n	p_n	n	p_n	n	p_n
0	0,875	7	0,323 916 655 4	14	0,333 255 482 9
1	0,164 062 5	8	0,328 491 983 7	15	0,333 294 399 0
2	0,205 718 994 1	9	0,330 877 500 5	16	0,333 313 863 9
3	0,245 098 034 4	10	0,332 096 370 2	17	0,333 323 598 0
4	0,277 537 481 9	11	0,332 712 556 7	18	0,333 328 465 5
5	0,300 765 642 1	12	0,333 022 367 0	19	0,333 330 899 4
6	0,315 458 505 9	13	0,333 177 705 1	20	0,333 332 116 4



Avec $p_0 = \frac{7}{8}$ et $k = 2{,}5$:

n	p_n	n	p_n	n	p_n
0	0,875	7	0,601 657 236 8	14	0,599 986 981 5
1	0,273 437 5	8	0,599 164 515 5	15	0,600 006 508 8
2	0,496 673 584 0	9	0,600 415 997 2	16	0,599 996 745 5
3	0,624 972 337 4	10	0,599 791 568 8	17	0,600 001 627 2
4	0,585 954 787 2	11	0,600 104 107 0	18	0,599 999 186 4
5	0,606 529 436 4	12	0,599 947 919 4	19	0,600 000 406 8
6	0,596 628 698 0	13	0,600 026 033 5	20	0,599 999 796 6

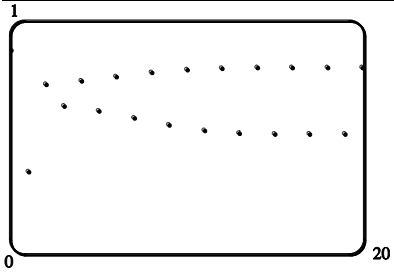


La limite de la suite semble dépendre de k, mais non de p_0.

 © Groupe Modulo inc., 2013

2. Avec $p_0 = \frac{7}{8}$ et $k = 3{,}2$:

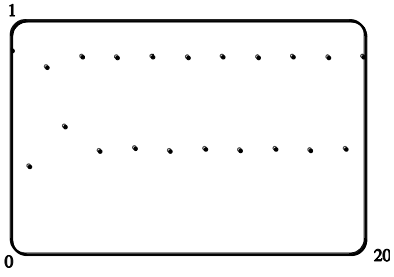
n	p_n	n	p_n	n	p_n
0	0,875	7	0,583 072 849 5	14	0,799 063 382 7
1	0,35	8	0,777 916 485 4	15	0,513 795 497 9
2	0,728	9	0,552 839 766 9	16	0,799 390 989 6
3	0,633 651 2	10	0,791 065 468 9	17	0,513 168 113 2
4	0,742 839 541 6	11	0,528 898 857 0	18	0,799 445 122 5
5	0,611 292 662 6	12	0,797 327 539 4	19	0,513 064 379 5
6	0,760 364 618 4	13	0,517 108 269 8	20	0,799 453 830 4



Il semble qu'éventuellement les termes fluctuent entre deux valeurs (environ 0,5 et 0,8 dans ce cas).

3. Avec $p_0 = \frac{7}{8}$ et $k = 3{,}42$:

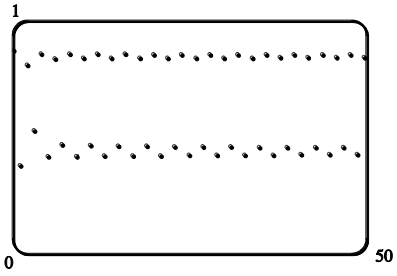
n	p_n	n	p_n	n	p_n
0	0,875	7	0,452 302 859 6	14	0,844 207 495 1
1	0,374 062 5	8	0,847 219 441 2	15	0,449 802 504 8
2	0,800 757 931 6	9	0,442 680 216 1	16	0,846 382 323 2
3	0,545 642 759 6	10	0,843 763 392 9	17	0,444 665 958 6
4	0,847 875 245 7	11	0,450 847 415 6	18	0,844 528 452 0
5	0,441 121 222 0	12	0,846 737 360 2	19	0,449 046 498 5
6	0,843 143 850 1	13	0,443 824 354 5	20	0,846 120 793 1



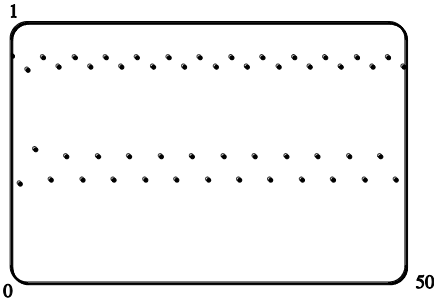
 © Groupe Modulo inc., 2013

Avec $p_0 = \frac{7}{8}$ et $k = 3{,}45$:

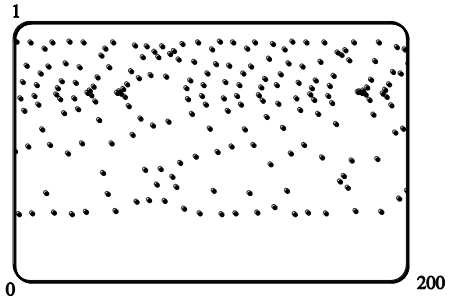
n	p_n	n	p_n	n	p_n
0	0,875	7	0,467 025 917 0	14	0,840 337 612 2
1	0,377 343 75	8	0,858 748 849 0	15	0,462 887 568 5
2	0,810 596 283 0	9	0,418 482 458 6	16	0,857 748 202 6
3	0,529 678 324 1	10	0,839 574 37 20	17	0,420 955 971 6
4	0,859 461 229 9	11	0,464 677 898 3	18	0,840 944 543 2
5	0,416 717 303 4	12	0,858 195 604 5	19	0,461 461 023 7
6	0,838 570 774 0	13	0,419 850 885 8	20	0,857 375 878 2

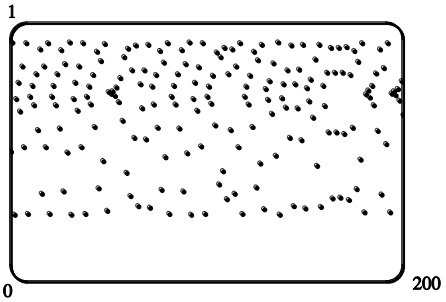


Les graphiques qui précèdent semblent montrer que lorsque k se situe entre 3,4 et 3,5, les termes fluctuent éventuellement entre quatre valeurs. Dans le graphique ci-après, les termes suivent le modèle 0,395, 0,832, 0,487, 0,869, 0,395,…. On constate que même lorsque $k = 3{,}42$ (comme dans le premier graphique), on observe quatre « branches » distinctes; même après 1000 termes, le premier et le troisième termes du modèle diffèrent d'environ 2×10^{-9}, alors que le premier et le cinquième termes ne diffèrent que de 2×10^{-10}. Avec $p_0 = \frac{7}{8}$ et $k = 3{,}48$:



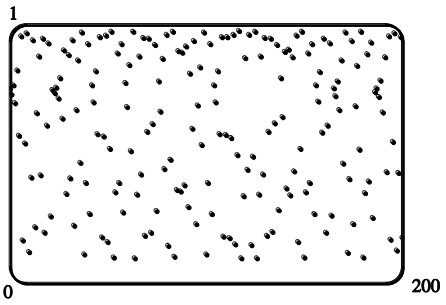
4.



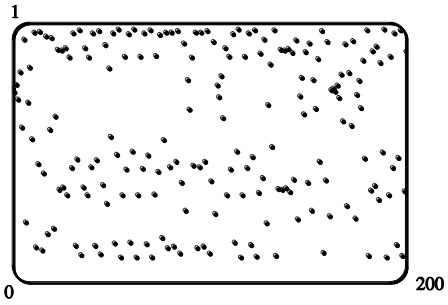


 © Groupe Modulo inc., 2013

p_0=0,5, k=3,7

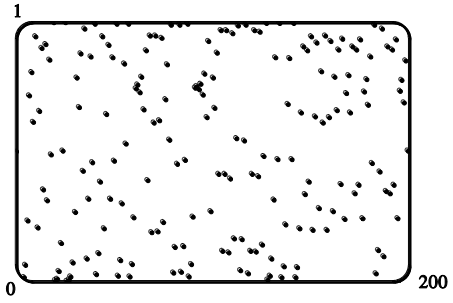


p_0=0,501, k=3,7



p_0=0,75, k=3,9

p_0=0,749, k=3,9



p_0=0,5, k=3,999

Les graphiques semblent montrer que si on change la valeur de p_0 de 0,001, l'ensemble du graphique change complètement. (Ceci pourrait toutefois être dû à l'erreur d'arrondissement accumulée par le logiciel de calcul symbolique. Ces graphiques ont été générés par le logiciel Maple en utilisant une précision de 100 décimales et différents degrés de précision produisent des graphiques différents.) Ces graphiques semblent montrer des traces de modèles ici et là, mais dans l'ensemble ils sont certainement très chaotiques. À mesure que k augmente, le graphique s'étend verticalement, avec plus de valeurs extrêmes près de 0 ou de 1.

 © Groupe Modulo inc., 2013

6.2 Les séries

1. a) Une suite est une liste de nombres écrits dans un ordre défini alors qu'une série est la *somme* d'une liste de nombres.

b) Une série est convergente si la suite de sommes partielles est convergente. Une série est divergente si elle n'est pas convergente.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5$ signifie que l'addition d'un nombre suffisant de termes de la série permet d'approcher le nombre 5 d'aussi près qu'on le désire. En d'autres mots, cela signifie que $\lim_{n\to\infty} s_n = 5$, où s_n est la $n^{\text{ième}}$ somme partielle, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^{n} a_i$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}[2-3(0{,}8)^n] = \lim_{n\to\infty} 2 - 3\lim_{n\to\infty}(0{,}8)^n = 2-3(0) = 2$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{4n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2-1)/n^2}{(4n^2+1)/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-1/n^2}{4+1/n^2} = \frac{1-0}{4+0} = \frac{1}{4}$

5. Pour $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, $a_n = \frac{1}{n^3}$. $s_1 = a_1 = \frac{1}{1^3} = 1$, $s_2 = s_1 + a_2 = 1 + \frac{1}{2^3} = 1{,}125$, $s_3 = s_2 + a_3 \approx 1{,}162\,0$, $s_4 = s_3 + a_4 \approx 1{,}1777$, $s_5 = s_4 + a_5 \approx 1{,}1857$, $s_6 = s_5 + a_6 \approx 1{,}1903$, $s_7 = s_6 + a_7 \approx 1{,}1932$ et $s_8 = s_7 + a_8 \approx 1{,}1952$. Il semble que la série est convergente.

6. Pour $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$, $a_n = \frac{1}{\ln(n+1)}$. $s_1 = a_1 = \frac{1}{\ln(1+1)} \approx 1{,}4427$, $s_2 = s_1 + a_2 = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} \approx 2{,}3529$, $s_3 = s_2 + a_3 \approx 3{,}0743$, $s_4 = s_3 + a_4 \approx 3{,}6956$, $s_5 = s_4 + a_5 \approx 4{,}2537$, $s_6 = s_5 + a_6 \approx 4{,}7676$, $s_7 = s_6 + a_7 \approx 5{,}2485$ et $s_8 = s_7 + a_8 \approx 5{,}7036$. Il semble que la série est divergente.

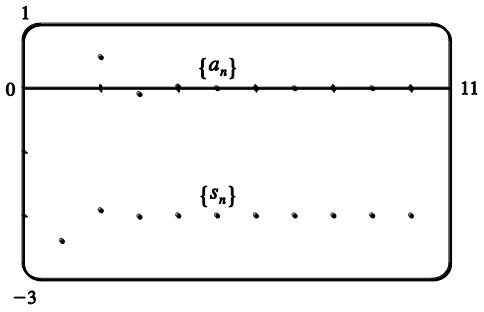
7. Pour $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+\sqrt{n}}$, $a_n = \frac{n}{1+\sqrt{n}}$. $s_1 = a_1 = \frac{1}{1+\sqrt{1}} = 0{,}5$, $s_2 = s_1 + a_2 = 0{,}5 + \frac{2}{1+\sqrt{2}} \approx 1{,}3284$, $s_3 = s_2 + a_3 \approx 2{,}4265$, $s_4 = s_3 + a_4 \approx 3{,}7598$, $s_5 = s_4 + a_5 \approx 5{,}3049$, $s_6 = s_5 + a_6 \approx 7{,}0443$, $s_7 = s_6 + a_7 \approx 8{,}9644$ et $s_8 = s_7 + a_8 \approx 11{,}0540$. Il semble que la série est divergente.

8. Pour $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$, $a_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$. $s_1 = a_1 = \frac{1}{1!} = 1$, $s_2 = s_1 + a_2 = 1 - \frac{1}{2!} = 0{,}5$, $s_3 = s_2 + a_3 = 0{,}5 + \frac{1}{3!} \approx 0{,}6667$, $s_4 = s_3 + a_4 = 0{,}625$, $s_5 = s_4 + a_5 \approx 0{,}6333$, $s_6 = s_5 + a_6 \approx 0{,}6319$, $s_7 = s_6 + a_7 \approx 0{,}6321$ et $s_8 = s_7 + a_8 \approx 0{,}6321$. Il semble que la série est convergente.

 © Groupe Modulo inc., 2013

9.

n	s_n
1	−2,400 00
2	−1,920 00
3	−2,016 00
4	−1,996 80
5	−2,000 64
6	−1,999 87
7	−2,000 03
8	−1,999 99
9	−2,000 00
10	−2,000 00

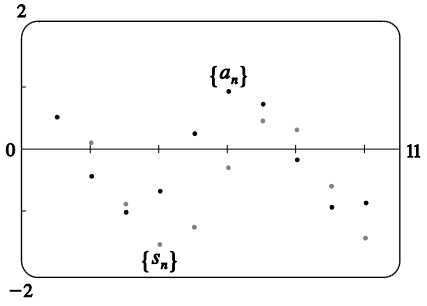


Le graphique et le tableau semblent montrer que la série converge vers −2. Il s'agit en fait d'une série géométrique avec $a = -2{,}4$ et $r = -\frac{1}{5}$; sa somme est donc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{(-5)^n} = \frac{-2{,}4}{1-(-\frac{1}{5})} = \frac{-2{,}4}{1{,}2} = -2$. On remarque que le point correspondant à $n = 1$ fait partie à la fois de $\{a_n\}$ et de $\{s_n\}$.

Remarque au sujet de la TI-86 : Pour obtenir le graphique de $\{a_n\}$ et de $\{s_n\}$, assurez-vous que votre calculatrice est en mode Param et en mode DrawDot. (On trouve DrawDot sous GRAPH, MORE, FORMT (F3).) Sous E(t)= assignez les valeurs suivantes : xt1=t, yt1=12/(-5)^t, xt2=t, yt2=sum seq(yt1,t,1,t,1). (On trouve sum et seq sous LIST, OPS (F5), MORE.) Sous WIND, utilisez 1,10,1,0,10,1,-3,1,1 afin d'obtenir un graphique similaire à celui qui apparaît ci-haut. Utilisez ensuite TRACE (F4) pour voir les valeurs.

10.

n	s_n
1	0,540 30
2	0,124 16
3	−0,865 84
4	−1,519 48
5	−1,235 82
6	−0,275 65
7	0,478 25
8	0,332 75
9	−0,578 38
10	−1,417 45

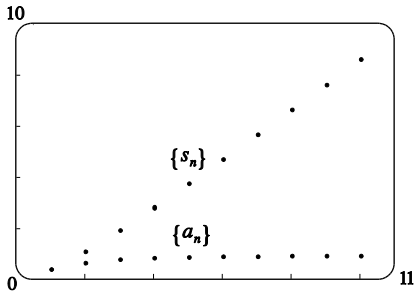


La série $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n$ diverge, puisque la suite associée de noverge pas vers 0.

 © Groupe Modulo inc., 2013

11.

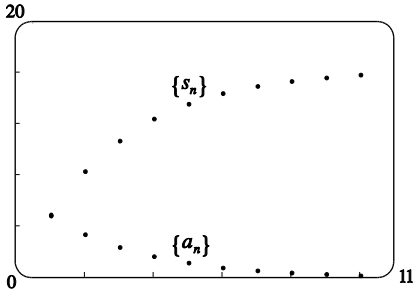
n	s_n
1	0,447 21
2	1,154 32
3	1,986 37
4	2,880 80
5	3,809 27
6	4,757 96
7	5,719 48
8	6,689 62
9	7,665 81
10	8,646 39



La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+4}}$ diverge, puisque la suite associée ne converge pas vers 0.

12.

n	s_n
1	4,900 00
2	8,330 00
3	10,731 00
4	12,411 70
5	13,588 19
6	14,411 73
7	14,988 21
8	15,391 75
9	15,674 22
10	15,871 96

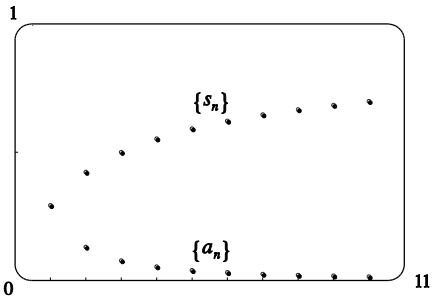


Le graphique et le tableau montrent que les termes de la suite associée deviennent de plus en plus petits et pourraient se rapprocher de 0 et que la série se rapproche d'une valeur près de 16. La série est géométrique avec $a_1 = 4,9$ et $r = 0,7$; sa somme est donc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{n+1}}{10^n} = \frac{4,9}{1-0,7} = \frac{4,9}{0,3} = 16,\overline{3}$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

13.

n	s_n
1	0,292 89
2	0,422 65
3	0,500 00
4	0,552 79
5	0,591 75
6	0,622 04
7	0,646 45
8	0,666 67
9	0,683 77
10	0,698 49



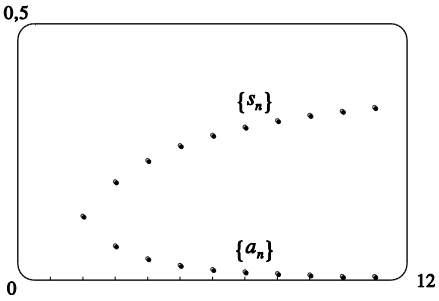
Le graphique et le tableau semblent montrer que la série converge.

$$\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$$
$$=1-\frac{1}{\sqrt{k+1}},$$

donc $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)=\lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)=1$.

14.

n	s_n
2	0,125 00
3	0,191 67
4	0,233 33
5	0,261 90
6	0,282 74
7	0,298 61
8	0,311 11
9	0,321 21
10	0,329 55
11	0,336 54



Le graphique et le tableau semblent montrer que la série converge.

$\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1/2}{n}-\frac{1/2}{n+2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$, donc

$\sum_{n=2}^{k}\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$. Lorsque $k\to\infty$, cette somme s'approche de $\frac{1}{2}(\frac{5}{6}-0)=\frac{5}{12}$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

15. a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{3n+1} = \dfrac{2}{3}$; la suite $\{a_n\}$ est donc convergente selon 6.1.1.

b) Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3} \neq 0$, la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ est divergente selon le critère de divergence.

16. a) $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ et $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j$ représentent toutes deux la somme des n premiers termes de la suite $\{a_n\}$, c'est-à-dire la $n^{\text{ième}}$ somme partielle.

b) $\sum\limits_{i=1}^{n} a_j = \underbrace{a_j + a_j + \cdots + a_j}_{n \text{ termes}} = na_j$, qui, en général, n'est pas la même chose que $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

17. $3 - 4 + \frac{16}{3} - \frac{64}{9} + \cdots$ est une série géométrique de raison $r = -\frac{4}{3}$. Puisque $|r| = \frac{4}{3} > 1$, la série diverge.

18. $4 + 3 + \frac{9}{4} + \frac{27}{16} + \cdots$ est une série géométrique de raison $\frac{3}{4}$. Puisque $|r| = \frac{3}{4} < 1$, la série converge vers $\dfrac{a}{1-r} = \dfrac{4}{1-3/4} = 16$.

19. $10 - 2 + 0{,}4 - 0{,}08 + \cdots$ est une série géométrique de raison $-\frac{2}{10} = -\frac{1}{5}$. Puisque $|r| = \frac{1}{5} < 1$, la série converge vers

$\dfrac{a}{1-r} = \dfrac{10}{1-(-1/5)} = \dfrac{10}{6/5} = \dfrac{50}{6} = \dfrac{25}{3}$.

20. $2 + 0{,}5 + 0{,}125 + 0{,}031\,25 + \cdots$ est une série géométrique de raison $r = \frac{0{,}5}{2} = \frac{1}{4}$. Puisque $|r| = \frac{1}{4} < 1$, la série converge

vers $\dfrac{a}{1-r} = \dfrac{2}{1-1/4} = \dfrac{2}{3/4} = \dfrac{8}{3}$.

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 6(0{,}9)^{n-1}$ est une série géométrique avec un premier terme $a = 6$ et une raison $r = 0{,}9$. Puisque $|r| = 0{,}9 < 1$, la série converge

vers $\dfrac{a}{1-r} = \dfrac{6}{1-0{,}9} = \dfrac{6}{0{,}1} = 60$.

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{10^n}{(-9)^{n-1}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{10(10)^{n-1}}{(-9)^{n-1}} = 10\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-\dfrac{10}{9}\right)^{n-1}$. La dernière série est géométrique avec $a = 10$ et de raison $r = -\frac{10}{9}$. Puisque $|r| = \frac{10}{9} > 1$,

la série diverge.

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-3)^{n-1}}{4^n} = \dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}$. La dernière série est géométrique avec $a = 1$ et de raison $r = -\frac{3}{4}$. Puisque $|r| = \frac{3}{4} < 1$, cette série converge

vers $\dfrac{1}{1-(-3/4)} = \frac{4}{7}$. Par conséquent, la série donnée converge vers $(\frac{1}{4})(\frac{4}{7}) = \frac{1}{7}$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

24. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{2})^n}$ est une série géométrique de raison $r=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Puisque $|r|=\frac{1}{\sqrt{2}}<1$, la série converge. Sa somme est

$$\frac{1}{1-1/\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)=2+\sqrt{2}\,.$$

25. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\pi^n}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\pi}{3}\right)^n$ est une série géométrique de raison $r=\frac{\pi}{3}$. Puisque $|r|>1$, la série diverge.

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{3^{n-1}}=3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e}{3}\right)^n$ est une série géométrique avec un premier terme $3(e/3)=e$ et une raison $r=\frac{e}{3}$. Puisque $|r|<1$, la série converge.

Sa somme est $\frac{e}{1-e/3}=\frac{3e}{3-e}$.

27. $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{15}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Ceci est un multiple constant de la série harmonique divergente; il diverge donc.

28. $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{1}{27}+\frac{2}{81}+\frac{1}{243}+\frac{2}{729}+\cdots=(\frac{1}{3}+\frac{1}{27}+\frac{1}{243}+\cdots)+(\frac{2}{9}+\frac{2}{81}+\frac{2}{729}+\cdots)$ sont toutes deux des séries géométriques convergentes dont les sommes sont $\frac{1/3}{1-1/9}=\frac{3}{8}$ et $\frac{2/9}{1-1/9}=\frac{1}{4}$; la série initiale converge donc et sa somme est $\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$.

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{3n-1}$ diverge selon le critère de divergence puisque $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{3n-1}=\frac{1}{3}\neq 0$.

30. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k(k+2)}{(k+3)^2}$ diverge selon le critère de divergence puisque $\lim_{k\to\infty}a_k=\lim_{k\to\infty}\frac{k(k+2)}{(k+3)^2}=\lim_{k\to\infty}\frac{1\cdot(1+2/k)}{(1+3/k)^2}=1\neq 0$.

31. Converge :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{2^n}{3^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]\quad\left[\text{somme de deux séries géométriques convergentes}\right]$$
$$=\frac{1/3}{1-1/3}+\frac{2/3}{1-2/3}=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$$

32. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+3^n}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{3^n}{2^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{3}{2}\right)^n\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n$. La première série est une série géométrique convergente ($|r|=\frac{1}{2}<1$), tandis que la seconde série est une série géométrique divergente ($|r|=\frac{3}{2}\geq 1$). La série initiale est donc divergente.

33. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{2}=2+\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[4]{2}+\cdots$ diverge selon le critère de divergence puisque $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=\lim_{n\to\infty}2^{1/n}=2^0=1\neq 0$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

34. Converge :

$$\sum_{n=1}^{\infty}[(0,8)^{n-1}-(0,3)^n]=\sum_{n=1}^{\infty}(0,8)^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}(0,3)^n \quad \left[\text{différence entre deux séries géométriques convergentes}\right]$$
$$=\frac{1}{1-0,8}-\frac{0,3}{1-0,3}=5-\frac{3}{7}=\frac{32}{7}$$

35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)$ diverge selon le critère de divergence puisque $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)=\ln\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)=\ln\frac{1}{2}\neq 0$.

36. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+(\frac{2}{3})^n}$ diverge selon le critère de divergence puisque $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+(\frac{2}{3})^n}=\frac{1}{1+0}=1\neq 0$.

37. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(\tfrac{\pi}{3})^k$ est une série géométrique de raison $r=\frac{\pi}{3}\approx 1{,}047$. Elle diverge parce que $|r|\geq 1$.

38. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(\cos 1)^k$ est une série géométrique de raison $r = \cos 1 \approx 0{,}540$. Elle converge parce que $|r| < 1$.Sa somme est $\dfrac{\cos 1}{1-\cos 1}\approx 1{,}175$.

39. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\arctan n$ diverge selon le critère de divergence puisque $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\arctan n=\frac{\pi}{2}\neq 0$.

40. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5^n}+\frac{2}{n}\right)$ diverge parce que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge. (Si elle convergeait, alors $\dfrac{1}{2}.\,2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ convergerait également selon le théorème 8 i). Nous savons cependant, selon l'example 8, que la série harmonique $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge.) Si la série donnée convergeait, alors la différence $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5^n}+\frac{2}{n}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{5^n}$ devrait converger (puisque $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{5^n}$ est une série géométrique convergente) et être égale à $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}$. Nous venons toutefois de voir que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}$ diverge, donc la série donnée doit également diverger.

41. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^n$ est une série géométrique avec un premier terme $a=\dfrac{1}{e}$ et de raison $r=\dfrac{1}{e}$. Puisque $|r|=\dfrac{1}{e}<1$, la série converge vers $\dfrac{1/e}{1-1/e}=\dfrac{1/e}{1-1/e}.\dfrac{e}{e}=\dfrac{1}{e-1}$. Selon l'exemple 7, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$. Par conséquent, selon le théorème 8 ii),

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e^n}+\frac{1}{n(n+1)}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{e-1}+1=\frac{1}{e-1}+\frac{e-1}{e-1}=\frac{e}{e-1}.$$

42. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n^2}$ diverge selon le critère de divergence puisque $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^n}{n^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}\overset{\text{H}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x}\overset{\text{H}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{2}=\infty\neq 0$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

43. À l'aide des fractions partielles, nous calculons les sommes partielles de la série $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^2-1}$, qui sont

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{i=2}^{n}\frac{2}{(i-1)(i+1)} = \sum_{i=2}^{n}\left(\frac{1}{i-1}-\frac{1}{i+1}\right) \\ &= \left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n-1}\right)+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Il s'agit ici d'une série télescopique et $s_n = 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$. Par conséquent, $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^2-1} = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) = \frac{3}{2}$.

44. Pour la série $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n}{n+1}$,

$s_n = (\ln 1-\ln 2)+(\ln 2-\ln 3)+(\ln 3-\ln 4)+\cdots+[\ln n-\ln(n+1)] = \ln 1-\ln(n+1) = -\ln(n+1)$ [série télescopique] Par conséquent, $\lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$ et la série est donc divergente.

45. Pour la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n(n+3)}$, $s_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{3}{i(i+3)} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+3}\right)$ [à l'aide des fractions partielles]. Cette dernière somme est

$$\begin{aligned} &(1-\tfrac{1}{4})+(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{5})+(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{6})+(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{7})+\cdots+(\tfrac{1}{n-3}-\tfrac{1}{n})+(\tfrac{1}{n-2}-\tfrac{1}{n+1})+(\tfrac{1}{n-1}-\tfrac{1}{n+2})+(\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{n+3}) \\ &\qquad = 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{n+1}-\tfrac{1}{n+2}-\tfrac{1}{n+3} \quad [\text{série télescopique}] \end{aligned}$$

Par conséquent, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n(n+3)} = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{n+1}-\tfrac{1}{n+2}-\tfrac{1}{n+3}) = 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3} = \tfrac{11}{6}$. Converge.

46. Pour la série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{1}{n^2}-\cos\frac{1}{(n+1)^2}\right)$,

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{i=1}^{n}\left(\cos\frac{1}{i^2}-\cos\frac{1}{(i+1)^2}\right) = \left(\cos 1-\cos\frac{1}{4}\right)+\left(\cos\frac{1}{4}-\cos\frac{1}{9}\right)+\cdots+\left(\cos\frac{1}{n^2}-\cos\frac{1}{(n+1)^2}\right) \\ &= \cos 1-\cos\frac{1}{(n+1)^2} \quad [\text{série télescopique}] \end{aligned}$$

Par conséquent, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{1}{n^2}-\cos\frac{1}{(n+1)^2}\right) = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(\cos 1-\cos\frac{1}{(n+1)^2}\right) = \cos 1-\cos 0 = \cos 1-1$. Converge.

47. Pour la série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{1/n}-e^{1/(n+1)}\right)$, $s_n = \sum_{i=1}^{n}\left(e^{1/i}-e^{1/(i+1)}\right) = (e^1-e^{1/2})+(e^{1/2}-e^{1/3})+\cdots+\left(e^{1/n}-e^{1/(n+1)}\right) = e-e^{1/(n+1)}$ [série télescopique]

Par conséquent, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{1/n}-e^{1/(n+1)}\right) = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(e-e^{1/(n+1)}\right) = e-e^0 = e-1$. Converge.

48. À l'aide des fractions partielles, nous calculons les sommes partielles de la série $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3-n}$, qui sont

$$s_n = \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i(i-1)(i+1)} = \sum_{i=2}^{n} \left(-\frac{1}{i} + \frac{1/2}{i-1} + \frac{1/2}{i+1} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{1}{i-1} - \frac{2}{i} + \frac{1}{i+1} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{2}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6}\right) + \cdots$$

$$+ \left(\frac{1}{n-3} - \frac{2}{n-2} + \frac{1}{n-1}\right) + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{2}{n-1} + \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1}\right)$$

Remarque : Dans trois expression consécutives entre paranthèses, la somme du 3e terme de la première expression, du 2e terme de la deuxième expression et du 1er terme de la troisième expression est égale à 0

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+2}$$

Par conséquent, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3 - n} = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+2} \right) = \frac{1}{4}$.

49. a) Beaucoup de gens affirmeront que $x < 1$, mais il ne faut pas oublier que x est constitué d'un nombre infini de chiffres 9.

b) $x = 0,99999\ldots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1\,000} + \frac{9}{10\,000} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n}$, qui est une série géométrique avec $a_1 = 0,9$ et $r = 0,1$. Sa somme est $\frac{0,9}{1-0,1} = \frac{0,9}{0,9} = 1$, c'est-à-dire $x = 1$.

c) Le nombre 1 a donc deux représentations décimales, 1,000 00… et 0,999 99...

d) À l'exception de 0, tous les nombres rationnels ayant un développement décimal limité peuvent avoir plus d'une représentation décimale. Par exemple, 0,5 peut être exprimé par 0,499 99… ainsi que par 0,500 00….

50. $a_1 = 1, a_n = (5-n)a_{n-1} \Rightarrow a_2 = (5-2)a_1 = 3(1) = 3$, $a_3 = (5-3)a_2 = 2(3) = 6$, $a_4 = (5-4)a_3 = 1(6) = 6$, $a_5 = (5-5)a_4 = 0$ et tous les termes qui suivent = 0. Par conséquent, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{4} a_n = 1 + 3 + 6 + 6 = 16$.

51. $0,\overline{8} = \frac{8}{10} + \frac{8}{10^2} + \cdots$ est une série géométrique avec $a = \frac{8}{10}$ et $r = \frac{1}{10}$. Elle converge vers $\frac{a}{1-r} = \frac{8/10}{1-1/10} = \frac{8}{9}$.

52. $0,\overline{46} = \frac{46}{100} + \frac{46}{100^2} + \cdots$ est une série géométrique avec $a = \frac{46}{100}$ et $r = \frac{1}{100}$. Elle converge vers $\frac{a}{1-r} = \frac{46/100}{1-1/100} = \frac{46}{99}$.

53. $2,\overline{\overline{516}} = 2 + \frac{516}{10^3} + \frac{516}{10^6} + \cdots$. Or, $\frac{516}{10^3} + \frac{516}{10^6} + \cdots$ est une série géométrique avec $a = \frac{516}{10^3}$ et $r = \frac{1}{10^3}$. Elle converge vers $\frac{a}{1-r} = \frac{516/10^3}{1-1/10^3} = \frac{516/10^3}{999/10^3} = \frac{516}{999}$. Par conséquent, $2,\overline{\overline{516}} = 2 + \frac{516}{999} = \frac{2514}{999} = \frac{838}{333}$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

54. $10,\overline{135} = 10,1 + \frac{35}{10^3} + \frac{35}{10^5} + \cdots$. Or, $\frac{35}{10^3} + \frac{35}{10^5} + \cdots$ est une série géométrique avec $a = \frac{35}{10^3}$ et $r = \frac{1}{10^2}$. Elle converge vers $\frac{a}{1-r} = \frac{35/10^3}{1-1/10^2} = \frac{35/10^3}{99/10^2} = \frac{35}{990}$. Par conséquent, $10,\overline{135} = 10,1 + \frac{35}{990} = \frac{9999+35}{990} = \frac{10\,034}{990} = \frac{5017}{495}$.

55. $1,53\overline{42} = 1,53 + \frac{42}{10^4} + \frac{42}{10^6} + \cdots$. Or, $\frac{42}{10^4} + \frac{42}{10^6} + \cdots$ est une série géométrique avec $a = \frac{42}{10^4}$ et $r = \frac{1}{10^2}$. Elle converge vers $\frac{a}{1-r} = \frac{42/10^4}{1-1/10^2} = \frac{42/10^4}{99/10^2} = \frac{42}{9900}$. Par conséquent, $1,53\overline{42} = 1,53 + \frac{42}{9900} = \frac{153}{100} + \frac{42}{9900} = \frac{15\,147}{9900} + \frac{42}{9900} = \frac{15\,189}{9900}$ ou $\frac{5063}{3300}$.

56. $7,\overline{123\,45} = 7 + \frac{12\,345}{10^5} + \frac{12\,345}{10^{10}} + \cdots$. Or, $\frac{12\,345}{10^5} + \frac{12\,345}{10^{10}} + \cdots$ est une série géométrique avec $a = \frac{12\,345}{10^5}$ et $r = \frac{1}{10^5}$. Elle converge vers $\frac{a}{1-r} = \frac{12\,345/10^5}{1-1/10^5} = \frac{12\,345/10^5}{99\,999/10^5} = \frac{12\,345}{99\,999}$.

Par conséquent, $7,\overline{123\,45} = 7 + \frac{12\,345}{99\,999} = \frac{699\,993}{99\,999} + \frac{12\,345}{99\,999} = \frac{712\,338}{99\,999}$ ou $\frac{237\,446}{33\,333}$.

57. $\sum_{n=1}^{\infty}(-5)^n x^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-5x)^n$ est une série géométrique avec $r = -5x$, donc la série converge $\Leftrightarrow$ $|r| < 1$ $\Leftrightarrow$ $|-5x| < 1$ $\Leftrightarrow$ $|x| < \frac{1}{5}$, c'est-à-dire $-\frac{1}{5} < x < \frac{1}{5}$. Dans ce cas, la somme de la série est $\frac{a}{1-r} = \frac{-5x}{1-(-5x)} = \frac{-5x}{1+5x}$.

58. $\sum_{n=1}^{\infty}(x+2)^n$ est une série géométrique avec $r = x + 2$, donc la série converge

$\Leftrightarrow$ $|r| < 1$ $\Leftrightarrow$ $|x+2| < 1$ $\Leftrightarrow$ $-1 < x+2 < 1$ $\Leftrightarrow$ $-3 < x < -1$. Dans ce cas, la somme de la série est

$\frac{a}{1-r} = \frac{x+2}{1-(x+2)} = \frac{x+2}{-x-1}$.

59. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-2}{3}\right)^n$ est une série géométrique avec $r = \frac{x-2}{3}$, donc la série converge

$\Leftrightarrow$ $|r| < 1$ $\Leftrightarrow$ $\left|\frac{x-2}{3}\right| < 1$ $\Leftrightarrow$ $-1 < \frac{x-2}{3} < 1$ $\Leftrightarrow$ $-3 < x-2 < 3$ $\Leftrightarrow$ $-1 < x < 5$. Dans ce cas, la somme de la série est $\frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{x-2}{3}} = \frac{1}{\frac{3-(x-2)}{3}} = \frac{3}{5-x}$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

60. $\sum_{n=0}^{\infty}(-4)^n(x-5)^n=\sum_{n=0}^{\infty}[-4(x-5)]^n$ est une série géométrique avec $r=-4(x-5)$, donc la série converge $\Leftrightarrow$ $|r|<1$ $\Leftrightarrow$ $|-4(x-5)|<1$ $\Leftrightarrow$ $|x-5|<\frac{1}{4}$ $\Leftrightarrow$ $-\frac{1}{4}<x-5<\frac{1}{4}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{19}{4}<x<\frac{21}{4}$. Dans ce cas, la somme de la série est $\frac{a}{1-r}=\frac{1}{1-[-4(x-5)]}=\frac{1}{4x-19}$.

61. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{x^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{x}\right)^n$ est une série géométrique avec $r=\frac{2}{x}$, donc la série converge $\Leftrightarrow$ $|r|<1$ $\Leftrightarrow$ $\left|\frac{2}{x}\right|<1$ $\Leftrightarrow$ $2<|x|$ $\Leftrightarrow$ $x>2$ ou $x<-2$. Dans ce cas, la somme de la série est $\frac{a}{1-r}=\frac{1}{1-2/x}=\frac{x}{x-2}$.

62. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin^n x}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sin x}{3}\right)^n$ est une série géométrique avec $r=\frac{\sin x}{3}$, donc la série converge $\Leftrightarrow$ $|r|<1$ $\Leftrightarrow$ $\left|\frac{\sin x}{3}\right|<1$ $\Leftrightarrow$ $|\sin x|<3$, qui est vrai pour tout x. Par conséquent, la somme de la série est $\frac{a}{1-r}=\frac{1}{1-(\sin x)/3}=\frac{3}{3-\sin x}$.

63. $\sum_{n=0}^{\infty}e^{nx}=\sum_{n=0}^{\infty}(e^x)^n$ est une série géométrique avec $r=e^x$, donc la série converge $\Leftrightarrow$ $|r|<1$ $\Leftrightarrow$ $|e^x|<1$ $\Leftrightarrow$ $-1<e^x<1$ $\Leftrightarrow$ $0<e^x<1$ $\Leftrightarrow$ $x<0$. Dans ce cas, la somme de la série est $\frac{a}{1-r}=\frac{1}{1-e^x}$.

64. Parce que $\frac{1}{n}\to 0$ et que la fonction ln est continue, nous obtenons $\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln 1=0$. Montrons maintenant que la série $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}[\ln(n+1)-\ln n]$ diverge.

$s_n=(\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+\cdots+(\ln(n+1)-\ln n)=\ln(n+1)-\ln 1=\ln(n+1)$.

Lorsque $n\to\infty$, $s_n=\ln(n+1)\to\infty$, donc la série diverge.

65. Après avoir défini *f*, utilisons les commandes convert(f,parfrac); dans Maple, Apart dans Mathematica ou Expand Rational et Simplify dans Derive, ce qui nous permettra de trouver que le terme général est $\frac{3n^2+3n+1}{(n^2+n)^3}=\frac{1}{n^3}-\frac{1}{(n+1)^3}$. La $n^{\text{ième}}$ somme partielle est donc $s_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^3}-\frac{1}{(k+1)^3}\right)=\left(1-\frac{1}{2^3}\right)+\left(\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3^3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n^3}-\frac{1}{(n+1)^3}\right)=1-\frac{1}{(n+1)^3}$. La série converge

 © Groupe Modulo inc., 2013

vers $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$. Ceci peut être confirmé en calculant la somme directement à l'aide des commandes sum(f,n=1..infinity); (dans Maple), Sum[f,{n,1,Infinity}] (dans Mathematica) ou Calculus Sum (de 1 à ∞) et Simplify (dans Derive).

66. L'exercice 65 a présenté les commandes spécifiques à chacun des logiciels de calcul symbolique.

$\frac{1}{n^5-5n^3+4n} = \frac{1}{24(n-2)} + \frac{1}{24(n+2)} - \frac{1}{6(n-1)} - \frac{1}{6(n+1)} + \frac{1}{4n}$. La $n^{\text{ième}}$ somme partielle est donc

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{24}\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{1}{k-2} - \frac{4}{k-1} + \frac{6}{k} - \frac{4}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right) \\ &= \frac{1}{24}\left[\left(\frac{1}{1} - \frac{4}{2} + \frac{6}{3} - \frac{4}{4} + \frac{1}{5}\right)\right] + \cdots + \left[\left(\frac{1}{n-2} - \frac{4}{n-1} + \frac{6}{n} - \frac{4}{n-1} + \frac{1}{n+2}\right)\right] \end{aligned}$$

Les termes dont le dénominateur est d'au moins 5 s'éliminent mutuellement, à l'exception de quelques termes dont le dénominateur comprend n. Donc, lorsque $n \to \infty$, $s_n \to \frac{1}{24}\left(\frac{1}{1} - \frac{3}{2} + \frac{3}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{24}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{96}$.

67. Pour $n = 1$, $a_1 = 0$, puisque $s_1 = 0$. Pour $n > 1$, $a_n = s_n - s_{n-1} = \frac{n-1}{n+1} - \frac{(n-1)-1}{(n-1)+1} = \frac{(n-1)n-(n+1)(n-2)}{(n+1)n} = \frac{2}{n(n+1)}$.

De plus, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-1/n}{1+1/n} = 1$.

68. $a_1 = s_1 = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$. Pour $n \neq 1$, $a_n = s_n - s_{n-1} = (3 - n2^{-n}) - \left[3 - (n-1)2^{-(n-1)}\right] = -\frac{n}{2^n} + \frac{n-1}{2^{n-1}} \cdot \frac{2}{2} = \frac{2(n-1)}{2^n} - \frac{n}{2^n} = \frac{n-2}{2^n}$

De plus, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(3 - \frac{n}{2^n}\right) = 3$ parce que $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{2^x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2^x \ln 2} = 0$.

69. a) Après la prise du premier comprimé, la quantité du médicament présente dans le corps est de 150 mg. Après le deuxième comprimé, la quantité est 150 mg plus 5 % du premier comprimé de 150 mg, c'est-à-dire [150 + 150(0,05)] mg. Après le troisième comprimé, la quantité est [150 + 150(0,05) + 150(0,05)^2] = 157,875 mg. Après n comprimés, la quantité (en mg) est $150 + 150(0{,}05) + \cdots + 150(0{,}05)^{n-1}$. Nous pouvons utiliser la formule 3 et exprimer cette quantité comme $\frac{150(1 - 0{,}05^n)}{1 - 0{,}05} = \frac{3000}{19}(1 - 0{,}05^n)$.

b) Le nombre de milligrammes qui demeurent dans le corps à long terme est $\lim_{n\to\infty}[\frac{3000}{19}(1 - 0{,}05^n)] = \frac{3000}{19}(1 - 0) \approx 157{,}895$, soit seulement 0,02 mg de plus que la quantité après 3 comprimés.

70. a) La concentration résiduelle juste avant la deuxième injection est De^{-aT}; avant la troisième, $De^{-aT} + De^{-a2T}$; avant la $(n+1)^{\text{ième}}$, $De^{-aT} + De^{-a2T} + \cdots + De^{-anT}$. Cette somme est égale à $\frac{De^{-aT}(1 - e^{-anT})}{1 - e^{-aT}}$ [formule 3].

b) La limite de la concentration avant l'injection est $\lim_{n\to\infty}\dfrac{De^{-aT}(1-e^{-anT})}{1-e^{-aT}}=\dfrac{De^{-aT}(1-0)}{1-e^{-aT}}\cdot\dfrac{e^{aT}}{e^{aT}}=\dfrac{D}{e^{aT}-1}$.

c) $\dfrac{D}{e^{aT}-1}\geq C \quad\Rightarrow\quad D\geq C(e^{aT}-1)$; la dose minimale est donc $D = C(e^{aT} - 1)$.

71. a) La première étape de la chaîne se produit lorsque le gouvernement local dépense D dollars. Les personnes qui reçoivent ces D dollars en dépensent une fraction c, c'est-à-dire Dc dollars. Celles qui reçoivent les Dc dollars en dépensent une fraction c, c'est-à-dire Dc^2 dollars. En continuant de cette façon, on constate que la dépense totale générée après n transactions est $S_n = D + Dc + Dc^2 + \cdots + Dc^{n-1} = \dfrac{D(1-c^n)}{1-c}$, selon la formule 3).

b)
$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{D(1-c^n)}{1-c}=\frac{D}{1-c}\lim_{n\to\infty}(1-c^n)=\frac{D}{1-c}\quad\left[\text{puisque } 0<c<1\quad\Rightarrow\quad\lim_{n\to\infty}c^n=0\right]$$
$$=\frac{D}{s}[\text{puisque } c+s=1]=kD\quad[\text{puisque } k=1/s]$$

Si $c = 0{,}8$, alors $s = 1 - c = 0{,}2$ et le multiplicateur est $k = 1/s = 5$.

72. a) Initialement, la balle tombe d'une hauteur H, rebondit ensuite à une hauteur rH, tombe de la hauteur rH, rebondit à une hauteur r^2H, retombe de la hauteur r^2H, et ainsi de suite. La distance totale qu'elle parcourt est

$$H+2rH+2r^2H+2r^3H+\cdots=H(1+2r+2r^2+2r^3+\cdots)=H[1+2r(1+r+r^2+\cdots)]$$
$$=H\left[1+2r\left(\frac{1}{1-r}\right)\right]=H\left(\frac{1+r}{1-r}\right)\text{ mètres}$$

b) Nous avons appris qu'une balle tombe de $\frac{1}{2}gt^2$ mètres en t secondes, où g est l'accélération gravitationnelle. Par conséquent, une balle tombe de h mètres en $t=\sqrt{2h/g}$ secondes. Le temps total de déplacement en secondes est

$$\sqrt{\frac{2H}{g}}+2\sqrt{\frac{2H}{g}r}+2\sqrt{\frac{2H}{g}r^2}+2\sqrt{\frac{2H}{g}r^3}+\cdots=\sqrt{\frac{2H}{g}}\left[1+2\sqrt{r}+2\sqrt{r}^2+2\sqrt{r}^3+\cdots\right]$$
$$=\sqrt{\frac{2H}{g}}\left(1+2\sqrt{r}\left[1+\sqrt{r}+\sqrt{r}^2+\cdots\right]\right)$$
$$=\sqrt{\frac{2H}{g}}\left[1+2\sqrt{r}\left(\frac{1}{1-\sqrt{r}}\right)\right]=\sqrt{\frac{2H}{g}}\frac{1+\sqrt{r}}{1-\sqrt{r}}$$

c) Il serait utile de dresser un tableau de la durée de chaque descente et remontée de la balle, ainsi que de la vitesse juste avant et juste après chaque rebond. Il faut se rappeler que le temps en secondes requis pour tomber de h mètres est $\sqrt{2h/g}$. La balle heurte la surface à la vitesse $-g\sqrt{2h/g}=-\sqrt{2hg}$ (en supposant que la direction vers le haut est positive), rebondit à la vitesse $kg\sqrt{2h/g}=k\sqrt{2hg}$ et prend le temps $k\sqrt{2h/g}$ pour atteindre le point maximal de son rebond, où sa vitesse est 0. À ce

 © Groupe Modulo inc., 2013

point, sa hauteur est k^2h. Tous ces résultats proviennent des formules du mouvement vertical avec accélération gravitationnelle

$$-g:\ \frac{d^2y}{dt^2}=-g \quad\Rightarrow\quad v=\frac{dy}{dt}=v_0-gt \quad\Rightarrow\quad y=y_0+v_0t-\tfrac{1}{2}gt^2.$$

Descente #	Durée de la descente	Vitesse avant le rebond	Vitesse après le rebond	Durée de la remontée	Hauteur maximale
1	$\sqrt{2H/\mathrm{g}}$	$\sqrt{2H\mathrm{g}}$	$k\sqrt{2H\mathrm{g}}$	$k\sqrt{2H/\mathrm{g}}$	k^2H
2	$\sqrt{2k^2H/g}$	$\sqrt{2k^2Hg}$	$k\sqrt{2k^2Hg}$	$k\sqrt{2k^2H/g}$	k^4H
3	$\sqrt{2k^4H/g}$	$\sqrt{2k^4Hg}$	$k\sqrt{2k^4Hg}$	$k\sqrt{2k^4H/g}$	k^6H
…	…	…	…	…	…

Le temps total de déplacement en secondes est

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{2H}{g}}+k\sqrt{\frac{2H}{g}}+k\sqrt{\frac{2H}{g}}+k^2\sqrt{\frac{2H}{g}}+k^2\sqrt{\frac{2H}{g}}+\cdots &= \sqrt{\frac{2H}{g}}\left(1+2k+2k^2+2k^3+\cdots\right)\\ &= \sqrt{\frac{2H}{g}}[1+2k(1+k+k^2+\cdots)]\\ &= \sqrt{\frac{2H}{g}}\left[1+2k\left(\frac{1}{1-k}\right)\right]=\sqrt{\frac{2H}{g}}\frac{1+k}{1-k}\end{aligned}$$

Autre méthode : Nous pourrions utiliser la réponse à la sous-question b). Au point maximal du rebond, la hauteur est $k^2h = rh$, donc $\sqrt{r}=k$ et le résultat découle de la sous-question b).

73. $\sum_{n=2}^{\infty}(1+c)^{-n}$ est une série géométrique avec $a = (1 + c)^{-2}$ et $r = (1 + c)^{-1}$; la série converge donc lorsque

$\left|(1+c)^{-1}\right|<1 \ \Leftrightarrow\ |1+c|>1 \ \Leftrightarrow\ 1+c>1$ ou $1+c<-1 \ \Leftrightarrow\ c>0$ ou $c<-2$. Calculons la somme de la série et posons-la égale à

$$2:\ \frac{(1+c)^{-2}}{1-(1+c)^{-1}}=2 \ \Leftrightarrow\ \left(\frac{1}{1+c}\right)^2=2-2\left(\frac{1}{1+c}\right) \ \Leftrightarrow\ 1=2(1+c)^2-2(1+c) \ \Leftrightarrow\ 2c^2+2c-1=0 \ \Leftrightarrow\ c=\tfrac{-2\pm\sqrt{12}}{4}=\tfrac{\pm\sqrt{3}-1}{2}.$$ La racine négative est à rejeter parce que $-2<\tfrac{-\sqrt{3}-1}{2}<0$. Donc, $c=\tfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

74. $\sum_{n=0}^{\infty}e^{nc}=\sum_{n=0}^{\infty}(e^c)^n$ est une série géométrique avec $a = (e^c)^0 = 1$et $r = e^c$. Si $e^c < 1$, sa somme est $\dfrac{1}{1-e^c}$, donc

$$\frac{1}{1-e^c}=10 \quad\Rightarrow\quad \tfrac{1}{10}=1-e^c \quad\Rightarrow\quad e^c=\tfrac{9}{10} \quad\Rightarrow\quad c=\ln\tfrac{9}{10}.$$

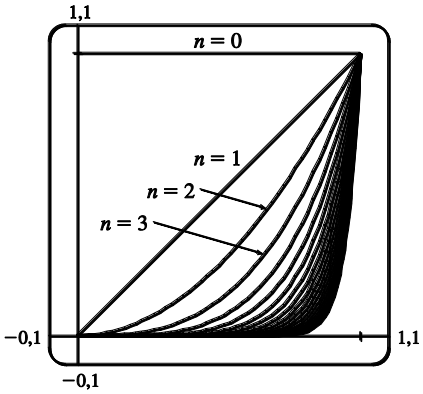
75.
$$\begin{aligned}e^{S_n}&=e^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}=e^1e^{1/2}e^{1/3}\ldots e^{1/n}>(1+1)(1+\tfrac{1}{2})(1+\tfrac{1}{3})\cdots(1+\tfrac{1}{n}) \quad [e^x>1+x]\\ &=\frac{2}{3}\frac{3}{2}\frac{4}{3}\cdots\frac{n+1}{n}=n+1\end{aligned}$$

Par conséquent, $e^{s_n}>n+1$ et $\lim_{n\to\infty}e^{s_n}=\infty$. Puisque $\{s_n\}$ est croissante, $\lim_{n\to\infty}s_n=\infty$, ce qui signifie que la série harmonique est divergente.

 © Groupe Modulo inc., 2013

76. L'aire entre $y = x^{n-1}$ et $y = x^n$ pour $0 \le x \le 1$ est

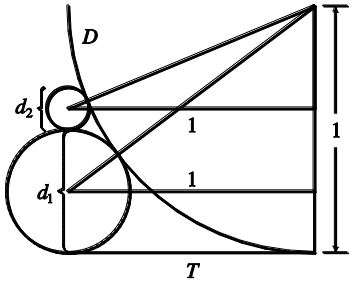
$$\int_0^1 (x^{n-1} - x^n)dx = \left[\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$
$$= \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$



Le graphique montre que lorsque $n \to \infty$, la somme des aires entre les courbes successives se rapproche de l'aire du carré-unité, c'est-à-dire 1. Donc, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

77. Posons que d_n représente le diamètre de C_n. Traçons des droites des centres de C_i au centre de D (ou de C); selon le théorème de Pythagore, nous obtenons

$1^2 + (1 - \frac{1}{2}d_1)^2 = (1 + \frac{1}{2}d_1)^2 \quad \Leftrightarrow$
$1 = (1 + \frac{1}{2}d_1)^2 - (1 - \frac{1}{2}d_1)^2 = 2d_1 \quad$ [différence de carrés] $\quad \Rightarrow \quad d_1 = \frac{1}{2}$.



De façon similaire,

$1 = (1 + \frac{1}{2}d_2)^2 - (1 - d_1 - \frac{1}{2}d^2)^2 = 2d_2 + 2d_1 - d_1^2 - d_1 d_2$
$= (2 - d_1)(d_1 + d_2) \quad \Leftrightarrow$

 © Groupe Modulo inc., 2013

$d_2 = \dfrac{1}{2-d_1} - d_1 = \dfrac{(1-d_1)^2}{2-d_1}$, $1 = (1+\frac{1}{2}d_3)^2 - (1-d_1-d_2-\frac{1}{2}d_3)^2 \quad \Leftrightarrow \quad d_3 = \dfrac{[1-(d_1+d_2)]^2}{2-(d_1+d_2)}$ et, en général, $d_{n+1} = \dfrac{(1-\sum_{i=1}^{m} d_i)^2}{2-\sum_{i=1}^{m} d_i}$. Si nous calculons d_2 et d_3 à partir des formules précédentes, nous trouverons que leurs valeurs sont $\dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2\cdot 3}$ et $\dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{3\cdot 4}$ respectivement.

Nous supposons donc qu'en général $d_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$. Utilisons l'induction afin de le démontrer. Supposons que pour tout $k \le n$, $d_k = \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$. Alors, $\sum_{i=1}^{n} d_i = 1 - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n}{n+1}$ [somme télescopique]. En effectuant un changement de variable pour cette valeur dans la formule pour d_{n+1}, nous obtenons $d_{n+1} = \dfrac{\left[1-\dfrac{n}{n+1}\right]^2}{2-\left(\dfrac{n}{n+1}\right)} = \dfrac{\dfrac{1}{(n+1)^2}}{\dfrac{n+2}{n+1}} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$, ce qui complète l'induction. Or, nous constatons que les sommes partielles $\sum_{i=1}^{n} d_i$ des diamètres des cercles se rapprochent de 1 lorsque $n \to \infty$,

c'est-à-dire $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = 1$, ce que nous désirions démontrer.

78. $|CD| = b \sin\theta$, $|DE| = |CD| \sin\theta = b\sin^2\theta$, $|EF| = |DE| \sin\theta = b\sin^3\theta$,…. Par conséquent,

$|CD|+|DE|+|EF|+|FG| + \cdots = b\sum_{n=1}^{\infty} \sin^n\theta = b\left(\dfrac{\sin\theta}{1-\sin\theta}\right)$, puisqu'il s'agit d'une série géométrique avec $r = \sin\theta$ et $|\sin\theta| < 1$ [parce que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$].

79. La série $1-1+1-1+1-1+\cdots$ diverge (série géométrique avec $r = -1$). Nous ne pouvons donc pas dire que $0 = 1-1+1-1+1-1+\cdots$.

80. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est convergente, alors $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ selon le théorème 6; donc, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} \ne 0$ et, par conséquent, $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a_n}$ est divergente selon le critère de divergence.

81. $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} ca_n = \lim_{n\to\infty} c\sum_{i=1}^{n} a_n = c\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, qui existe par hypothèse.

82. Si Σca_n était convergente, alors $\Sigma(1/c)(ca_n) = \Sigma a_n$ le serait également selon le théorème 8 i). Ce n'est toutefois pas le cas et donc, Σca_n doit être divergente.

 © Groupe Modulo inc., 2013

83. Supposons au contraire que $\Sigma(a_n + b_n)$ converge. Alors, $\Sigma(a_n + b_n)$ et Σa_n sont des séries convergentes. Donc, selon le théorème 8 iii), $\Sigma[(a_n + b_n) - a_n]$ serait également convergente. Cependant, $\Sigma[(a_n + b_n) - a_n] = \Sigma b_n$, ce qui est une contradiction, puisque le problème indique que Σb_n est divergente.

84. Non. Par exemple, prenons $\Sigma a_n = \Sigma n$ et $\Sigma b_n = \Sigma(-n)$, qui sont toutes deux divergentes; cependant, $\Sigma(a_n + b_n) = \Sigma 0$, qui converge vers la somme 0.

85. Les sommes partielles $\{s_n\}$ forment une suite croissante, puisque $s_n - s_{n-1} = a_n > 0$ pour tout n. De plus, la suite $\{s_n\}$ est bornée puisque $s_n \le 1000$ pour tout n. Donc, selon le théorème des suites monotones, la suite de sommes partielles converge, c'est-à-dire que la série Σa_n est convergente.

86. a) $$\text{Membre de droite} = \frac{1}{f_{n-1}f_n} - \frac{1}{f_n f_{n+1}} = \frac{f_n f_{n+1} - f_n f_{n-1}}{f_n^2 f_{n-1} f_{n+1}}$$
$$= \frac{f_{n+1} - f_{n-1}}{f_n f_{n-1} f_{n+1}} = \frac{(f_{n-1} + f_n) - f_{n-1}}{f_n f_{n-1} f_{n+1}} = \frac{1}{f_{n-1}f_{n+1}} = \text{Membre de gauche}$$

b) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{f_{n-1}f_{n+1}} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{f_{n-1}f_n} - \frac{1}{f_n f_{n+1}} \right) \quad [\text{selon la sous-question a)}]$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{1}{f_1 f_2} - \frac{1}{f_2 f_3} \right) + \left(\frac{1}{f_2 f_3} - \frac{1}{f_3 f_4} \right) + \left(\frac{1}{f_3 f_4} - \frac{1}{f_4 f_5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{f_{n-1}f_n} - \frac{1}{f_n f_{n+1}} \right) \right]$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{f_1 f_2} - \frac{1}{f_n f_{n+1}} \right) = \frac{1}{f_1 f_2} - 0 = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1 \quad \text{parce que } f_n \to \infty \text{ lorsque } n \to \infty.$$

c) $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{f_n}{f_{n-1}f_{n+1}} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{f_n}{f_{n-1}f_n} - \frac{f_n}{f_n f_{n+1}} \right) \quad [\text{tel que ci-dessus}]$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{f_{n-1}} - \frac{1}{f_{n+1}} \right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_3} \right) + \left(\frac{1}{f_2} - \frac{1}{f_4} \right) + \left(\frac{1}{f_3} - \frac{1}{f_5} \right) + \left(\frac{1}{f_4} - \frac{1}{f_6} \right) \right] + \cdots + \left(\frac{1}{f_{n-1}} - \frac{1}{f_{n+1}} \right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{1}{f_n} - \frac{1}{f_{n+1}} \right) = 1 + 1 - 0 - 0 = 2 \text{ parce que } f_n \to \infty \text{ lorsque } n \to \infty.$$

87. a) À la première étape, seul l'intervalle $\left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[$ (de longueur $\frac{1}{3}$) est enlevé. À la deuxième étape, nous enlevons les intervalles $\left]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right[$ et $\left]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right[$, d'une longueur totale de $2 \cdot (\frac{1}{3})^2$. À la troisième étape, nous enlevons 2^2 intervalles, chacun de longueur $(\frac{1}{3})^3$. En général, à la $n^{\text{ième}}$ étape nous enlevons 2^{n-1} intervalles, chacun de longueur $(\frac{1}{3})^n$, pour une longueur de $2^{n-1} \cdot (\frac{1}{3})^n = \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n-1}$. Par conséquent, la longueur totale de tous les intervalles enlevés est $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n-1} = \frac{1/3}{1-2/3} = 1$ [série géométrique avec $a = \frac{1}{3}$ et $r = \frac{2}{3}$]. On constate qu'à la $n^{\text{ième}}$ étape, l'intervalle le plus à gauche qui a été enlevé est $\left](\frac{1}{3})^n, (\frac{2}{3})^n\right[$. Donc, nous n'enlevons jamais 0, qui fait partie de l'ensemble de Cantor. De plus, l'intervalle

le plus à droite qui a été enlevé est $\left]1-(\frac{2}{3})^n;1-(\frac{1}{3})^n\right[$, donc 1 n'est jamais enlevé. D'autres nombres faisant partie de l'ensemble de Cantor sont $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{7}{9}$ et $\frac{8}{9}$.

b) L'aire qui a été enlevée à la première étape est $\frac{1}{9}$; à la deuxième étape, $8\cdot(\frac{1}{9})^2$; à la troisième étape, $(8)^2\cdot(\frac{1}{9})^3$. En général, l'aire enlevée à la $n^{\text{ième}}$ étape est $(8)^{n-1}(\frac{1}{9})^n=\frac{1}{9}(\frac{8}{9})^{n-1}$, donc l'aire totale de tous les carrés qui ont été enlevés est $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9}\left(\frac{8}{9}\right)^{n-1}=\frac{1/9}{1-8/9}=1$.

88. a)

a_1	1	2	4	1	1	1000
a_2	2	3	1	4	1000	1
a_3	1,5	2,5	2,5	2,5	500,5	500,5
a_4	1,75	2,75	1,75	3,25	750,25	250,75
a_5	1,625	2,625	2,125	2,875	625,375	375,625
a_6	1,687 5	2,687 5	1,937 5	3,062 5	687,813	313,188
a_7	1,656 25	2,656 25	2,031 25	2,968 75	656,594	344,406
a_8	1,671 88	2,671 88	1,984 38	3,015 63	672,203	328,797
a_9	1,664 06	2,664 06	2,007 81	2,992 19	664,398	336,602
a_{10}	1,667 97	2,667 97	1,996 09	3,003 91	668,301	332,699
a_{11}	1,666 02	2,666 02	2,001 95	2,998 05	666,350	334,650
a_{12}	1,666 99	2,666 99	1,999 02	3,000 98	667,325	333,675

Les limites semblent être $\frac{5}{3}$, $\frac{8}{3}$, 2, 3, 667 et 334. On remarque que la valeur de chacune de ces limites est plus proche de a_2 que de a_1. Donnons plus de poids à a_2 dans une formule donnant la limite. En général, nous estimons que la limite est $\frac{a_1+2a_2}{3}$.

b) $$\begin{aligned}a_{n+1}-a_n&=\tfrac{1}{2}(a_n+a_{n-1})-a_n=-\tfrac{1}{2}(a_n-a_{n-1})=-\tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{2}(a_{n-1}+a_{n-2})-a_{n-1}]\\&=-\tfrac{1}{2}[-\tfrac{1}{2}(a_{n-1}-a_{n-2})]=\cdots=(-\tfrac{1}{2})^{n-1}(a_2-a_1)\end{aligned}$$

Nous avons utilisé la formule $a_k=\frac{1}{2}(a_{k-1}+a_{k-2})$ un total de $n-1$ fois dans ce calcul, une fois pour chaque k entre 3 et $n+1$.

Nous obtenons maintenant

$$\begin{aligned}a_n&=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_{n-1}-a_{n-2})+(a_n-a_{n-1})\\&=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(-\tfrac{1}{2})^{k-1}(a_2-a_1)\end{aligned}$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a_1+(a_2-a_1)\sum_{k=1}^{\infty}(-\tfrac{1}{2})^{k-1}=a_1+(a_2-a_1)\left[\frac{1}{1-(-1/2)}\right]=a_1+\tfrac{2}{3}(a_2-a_1)=\frac{a_1+2a_2}{3}.$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

89. a) Pour $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$, $s_1=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$, $s_2=\frac{1}{2}+\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{5}{6}$, $s_3=\frac{5}{6}+\frac{3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=\frac{23}{24}$, $s_4=\frac{23}{24}+\frac{4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=\frac{119}{120}$. Les dénominateurs sont $(n+1)!$, donc nous pourrions estimer que la formule $s_n=\frac{(n+1)!-1}{(n+1)!}$.

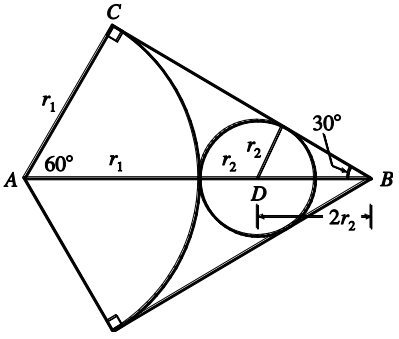
b) Pour $n=1$, $s_1=\frac{1}{2}=\frac{2!-1}{2!}$ et la formule est donc vraie pour $n=1$. Supposons que $s_k=\frac{(k+1)!-1}{(k+1)!}$. Alors,

$$s_{k+1}=\frac{(k+1)!-1}{(k+1)!}+\frac{k+1}{(k+2)!}=\frac{(k+1)!-1}{(k+1)!}+\frac{k+1}{(k+1)!(k+2)}=\frac{(k+2)!-(k+2)+k+1}{(k+2)!}$$
$$=\frac{(k+2)!-1}{(k+2)!}$$

Par conséquent, la formule est vraie pour $n=k+1$. Nous avons donc démontré, par induction, que l'estimation à la sous-question a) était exacte.

c) $\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!-1}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{(n+1)!}\right]=1$ et donc, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=1$.

90.



Représentons par r_1 = le rayon du cercle le plus grand, r_2 = le rayon du cercle suivant et ainsi de suite. À partir du graphique, nous obtenons $\angle BAC=60°$ et $\cos 60°=r_1/|AB|$, donc $|AB|=2r_1$ et $|DB|=2r_2$. Par conséquent, $2r_1=r_1+r_2+2r_2 \Rightarrow r_1=3r_2$. En général, nous obtenons $r_{n+1}=\frac{1}{3}r_n$ et l'aire totale est donc

$$A=\pi r_1^2+3\pi r_2^2+3\pi r_3^2+\cdots=\pi r_1^2+3\pi r_2^2\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{3^6}+\cdots\right)$$
$$=\pi r_1^2+3\pi r_2^2\cdot\frac{1}{1-1/9}=\pi r_1^2+\tfrac{27}{8}\pi r_2^2$$

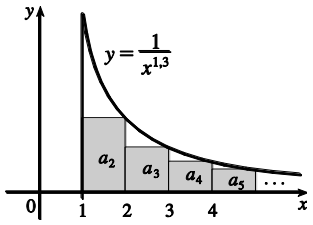
Puisque les côtés du triangle sont de longueur 1, $|BC|=\frac{1}{2}$ et $\tan 30°=\frac{r_1}{1/2}$. Par conséquent, $r_1=\frac{\tan 30°}{2}=\frac{1}{2\sqrt{3}} \Rightarrow r_2=\frac{1}{6\sqrt{3}}$,

donc $A=\pi\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2+\frac{27\pi}{8}\left(\frac{1}{6\sqrt{3}}\right)^2=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{32}=\frac{11\pi}{96}$. L'aire du triangle est $\frac{\sqrt{3}}{4}$ et les cercles occupent donc environ 83,1 % de l'aire du triangle.

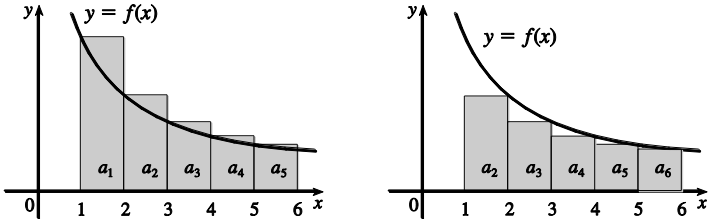
 © Groupe Modulo inc., 2013

6.3 Les séries à termes positifs

1. Le graphique montre que $a_2 = \frac{1}{2^{1,3}} < \int_1^2 \frac{1}{x^{1,3}}dx$, $a_3 = \frac{1}{3^{1,3}} < \int_2^3 \frac{1}{x^{1,3}}dx$ et ainsi de suite, donc $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1,3}} < \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{1,3}}dx$. L'intégrale converge selon 3.8.2, avec $p = 1{,}3 > 1$. Par conséquent, la série converge.



2. Le premier graphique montre que $\int_1^6 f(x)dx < \sum_{i=1}^{5} a_i$. Le deuxième graphique montre que $\sum_{i=2}^{6} a_i < \int_1^6 f(x)dx$. Par conséquent, nous obtenons $\sum_{i=2}^{6} a_i < \int_1^6 f(x)dx < \sum_{i=1}^{5} a_i$.



3. La fonction $f(x) = 1/\sqrt[5]{x} = x^{-1/5}$ est continue, positive et décroissante sur l'intervalle [1, ∞[; le critère de l'intégrale s'applique donc. $\int_1^{\infty} x^{-1/5}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t x^{-1/5}dx = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{5}{4}x^{4/5}\right]_1^t = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{4}t^{4/5} - \frac{5}{4}\right) = \infty$, donc $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt[5]{n}$ diverge.

4. La fonction $f(x) = 1/x^5$ est continue, positive et décroissante sur l'intervalle [1, ∞[; le critère de l'intégrale s'applique donc. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^5}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t x^{-5}dx = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{x^{-4}}{-4}\right]_1^t = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{4t^4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$. Comme cette intégrale impropre est convergente, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$ est également convergente selon le critère de l'intégrale.

5. La fonction $f(x) = \frac{1}{(2x+1)^3}$ est continue, positive et décroissante sur l'intervalle [1, ∞[; le critère de l'intégrale s'applique donc.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{(2x+1)^3}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^{\infty} \frac{1}{(2x+1)^3}dx = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{4}\frac{1}{(2x+1)^2}\right]_1^t = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{4(2t+1)^2} + \frac{1}{36}\right) = \frac{1}{36}.$$

Comme cette intégrale impropre est convergente, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}$ est également convergente selon le critère de l'intégrale.

 © Groupe Modulo inc., 2013

6. La fonction $f(x) = 1/\sqrt{x+4} = (x+4)^{-1/2}$ est continue, positive et décroissante sur l'intervalle [1, ∞[; le critère de l'intégrale s'applique donc. $\int_1^\infty (x+4)^{-1/2}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t (x+4)^{-1/2}dx = \lim_{t\to\infty}\left[2(x+4)^{1/2}\right]_1^t = \lim_{t\to\infty}(2\sqrt{t+4} - 2\sqrt{5}) = \infty$, donc la série $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n+4}$ diverge.

7. La fonction $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ est continue, positive et décroissante sur l'intervalle [1, ∞[; le critère de l'intégrale s'applique donc. $\int_1^\infty \frac{x}{x^2+1}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{x}{x^2+1}dx = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_1^t = \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}[\ln(t^2+1) - \ln 2] = \infty$. Comme cette intégrale impropre est divergente, la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$ est également divergente selon le critère de l'intégrale.

8. La fonction $f(x) = x^2e^{-x^3}$ est continue, positive et décroissante (*) sur l'intervalle [1, ∞[; le critère de l'intégrale s'applique donc. $\int_1^\infty x^2e^{-x^3}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t x^2e^{-x^3}dx = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{3}e^{-x^3}\right]_1^t = -\frac{1}{3}\lim_{t\to\infty}\left(e^{-t^3} - e^{-1}\right) = -\frac{1}{3}\left(0 - \frac{1}{e}\right) = \frac{1}{3e}$. Comme cette intégrale impropre est convergente, la série $\sum_{n=1}^{\infty} n^2e^{-n^3}$ est également convergente selon le critère de l'intégrale.

$(*): f'(x) = x^2e^{-x^3}(-3x^2) + e^{-x^3}(2x) = xe^{-x^3}(-3x^3+2) = \dfrac{x(2-3x^3)}{e^{x^3}} < 0$ pour $x > 1$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\sqrt{2}}}$ est une série p avec $p = \sqrt{2} > 1$, donc elle converge selon l'énoncé 3.

10. $\sum_{n=3}^{\infty} n^{-0,9999} = \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^{0,9999}}$ est une série p avec p = 0,999 9 ≤ 1, donc elle diverge selon l'énoncé 3. Le fait que la série commence avec n = 3 est non pertinent dans la détermination de la convergence.

11. $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \frac{1}{125} + \cdots \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$. Il s'agit ici d'une série p avec p = 3 > 1, donc elle converge selon l'énoncé 3.

12. $1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{4}} + \frac{1}{5\sqrt{5}} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$. Il s'agit ici d'une série p avec $p = \frac{3}{2} > 1$, donc elle converge selon l'énoncé 3.

13. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$. La fonction $f(x) = \dfrac{1}{2x-1}$ est continue, positive et décroissante sur l'intervalle [1, ∞]; le critère de l'intégrale s'applique donc. $\int_1^\infty \frac{1}{2x-1}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{2x-1}dx = \lim_{t\to\infty}[\frac{1}{2}\ln|2x-1|]_1^t = \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}(\ln(2t-1) - 0) = \infty$, donc la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ diverge.

 © Groupe Modulo inc., 2013

14. $\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{11}+\frac{1}{14}+\frac{1}{17}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n+2}$. La fonction $f(x)=\frac{1}{3x+2}$ est continue, positive et décroissante sur l'intervalle [1, ∞[; le critère de l'intégrale s'applique donc.

$\int_1^{\infty}\frac{1}{3x+2}dx=\lim_{t\to\infty}\int_1^{t}\frac{1}{3x+2}dx=\lim_{t\to\infty}[\frac{1}{3}\ln|3x+2|]_1^t=\frac{1}{3}\lim_{t\to\infty}(\ln(3t+2)-\ln 5)=\infty$, donc la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n+2}$ diverge.

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+4}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{n}}{n^2}+\frac{4}{n^2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}$. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ est une série *p* convergente où $p=\frac{3}{2}>1$. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ est une série *p* multipliée par une constante. Cette série *p* est convergente car *p* = 2 > 1, donc la série elle-même converge. La somme de deux séries convergentes est convergente, donc la série initiale est convergente.

16. $f(x)=\frac{x^2}{x^3+1}$ est continue et positive sur l'intervalle [2, ∞[et également décroissante puisque $f'(x)=\frac{x(2-x^3)}{(x^3+1)^2}<0$ pour $x\geq 2$; le critère de l'intégrale s'applique donc [on remarque que *f* n'est pas décroissante sur l'intervalle [1, ∞[]. $\int_2^{\infty}\frac{x^2}{x^3+1}dx=\lim_{t\to\infty}[\frac{1}{3}\ln(x^3+1)]_2^t=\frac{1}{3}\lim_{t\to\infty}[\ln(t^3+1)-\ln 9]=\infty$, donc la série $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+1}$ diverge, ainsi que la série donnée, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+1}$.

17. La fonction $f(x)=\frac{1}{x^2+4}$ est continue, positive et décroissante sur l'intervalle [1, ∞[; le critère de l'intégrale s'applique donc.

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2+4}dx=\lim_{t\to\infty}\int_1^{t}\frac{1}{x^2+4}dx=\lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\right]_1^t=\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\left[\arctan\left(\frac{t}{2}\right)-\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right]$$

Par conséquent, la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4}$ converge.

18. La fonction $f(x)=\frac{3x-4}{x^2-2x}=\frac{2}{x}+\frac{1}{x-2}$ [obtenu à l'aide des fractions partielles] est continue, positive et décroissante sur l'intervalle [3, ∞[puisqu'elle est la somme de deux fonctions similaires; le critère de l'intégrale s'applique donc.

$\int_3^{\infty}\frac{3x-4}{x^2-x}dx=\lim_{t\to\infty}\int_3^{t}\left[\frac{2}{x}+\frac{1}{x-2}\right]dx=\lim_{t\to\infty}\left[2\ln x+\ln(x-2)\right]_3^t=\lim_{t\to\infty}[2\ln t+\ln(t-2)-2\ln 3]=\infty$. L'intégrale est divergente, donc la série $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{3n-4}{n^2-n}$ est divergente.

 © Groupe Modulo inc., 2013

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^3}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^3}$, puisque $\frac{\ln 1}{1}=0$. La fonction $f(x)=\frac{\ln x}{x^3}$ est continue et positive sur l'intervalle [2, ∞[.

$f'(x)=\frac{x^3(1/x)-(\ln x)(3x^2)}{(x^3)^2}=\frac{x^2-3x^2\ln x}{x^6}=\frac{1-3\ln x}{x^4}<0 \quad\Leftrightarrow\quad 1-3\ln x<0 \quad\Leftrightarrow\quad \ln x>\tfrac{1}{3} \quad\Leftrightarrow\quad x>e^{1/3}\approx 1{,}4$, donc f est décroissante sur l'intervalle [2, ∞[; le critère d'intégrale s'applique donc.

$\int_2^{\infty}\frac{\ln x}{x^3}dx=\lim_{t\to\infty}\int_2^t\frac{\ln x}{x^3}dx\overset{(*)}{=}\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}\right]_1^t=\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{4t^2}(2\ln t+1)+\frac{1}{4}\right]\overset{(**)}{=}\frac{1}{4}$, donc la série $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^3}$ converge.

(*): $u=\ln x, dv=x^{-3}dx \quad\Rightarrow\quad du=(1/x)dx$, $v=-\frac{1}{2}x^{-2}$, donc

$\int\frac{\ln x}{x^3}dx=-\frac{1}{2}x^{-2}\ln x-\int-\frac{1}{2}x^{-2}(1/x)dx=-\frac{1}{2}x^{-2}\ln x+\frac{1}{2}\int x^{-3}dx=-\frac{1}{2}x^{-2}\ln x-\frac{1}{4}x^{-2}+C$. $(**):\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{2\ln t+1}{4t^2}\right)\overset{\text{H}}{=}\lim_{t\to\infty}\frac{2/t}{8t}=-\frac{1}{4}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^2}=0$.

20. La fonction $f(x)=\frac{1}{x^2+6x+13}=\frac{1}{(x+3)^2+4}$ est continue, positive et décroissante sur l'intervalle [1, ∞[; le critère de l'intégrale s'applique donc.

$$\int_1^{\infty}f(x)dx=\lim_{t\to\infty}\int_1^t\frac{1}{(x+3)^2+4}dx=\lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+3}{2}\right)\right]_1^t$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\left[\arctan\left(\frac{t+3}{2}\right)-\arctan 2\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan 2\right)$$

L'intégrale converge, donc la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+6n+13}$ converge.

21. $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ est continue et positive sur l'intervalle [2, ∞[et également décroissante puisque $f'(x)=-\frac{1+\ln x}{x^2(\ln x)^2}<0$ pour $x>2$; le critère de l'intégrale s'applique donc.

$\int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln x}dx=\lim_{t\to\infty}[\ln(\ln x)]_2^t=\lim_{t\to\infty}[\ln(\ln t)-\ln(\ln 2)]=\infty$, donc la série $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ diverge.

22. La fonction $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^2}$ est continue, positive et décroissante sur l'intervalle [2, ∞[; le critère de l'intégrale s'applique donc.

$\int_2^{\infty}f(x)dx=\lim_{t\to\infty}\int_2^t\frac{1}{x(\ln x)^2}dx=\lim_{t\to\infty}\left[\frac{-1}{\ln x}\right]_2^t$ en posant $u=\ln x$]
$=-\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{\ln t}-\frac{1}{\ln 2}\right)=\frac{1}{\ln 2}$,

donc la série $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$ converge.

 © Groupe Modulo inc., 2013

23. La fonction $f(x) = e^{1/x}/x^2$ est continue, positive et décroissante sur l'intervalle [1, ∞[; le critère de l'intégrale s'applique donc [$g(x) = e^{1/x}$ est décroissante, un fait que la division par x^2 ne change pas.]

$\int_1^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{e^{1/x}}{x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\left[-e^{1/x}\right]_1^t = -\lim_{t\to\infty}(e^{1/t} - e) = -(1-e) = e-1$, donc la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{1/n}}{n^2}$ converge.

24. $f(x) = \frac{x^2}{e^x} \quad\Rightarrow\quad f'(x) = \frac{e^x(2x) - x^2e^x}{(e^x)^2} = \frac{xe^x(2-x)}{(e^x)^2} = \frac{x(2-x)}{e^x} < 0$ pour $x > 2$, donc f est continue, positive et décroissante sur l'intervalle [3, ∞[; le critère de l'intégrale s'applique donc.

$\int_3^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_3^t \frac{x^2}{e^x}dx \overset{(*)}{=} \lim_{t\to\infty}[-e^{-x}(x^2+2x+2)]_3^t = -\lim_{t\to\infty}[e^{-t}(t^2+2t+2) - e^{-3}(17)] \overset{(**)}{=} \frac{17}{e^3}$, donc la série $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n^2}{e^n}$ converge.

$(*): \int x^2e^{-x}dx \overset{97}{=} -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}dx \overset{97}{=} -x^2e^{-x} + 2(-xe^{-x} + \int e^{-x}dx)$ [ou en effectuant deux intégrations par parties successives]

$= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C = -e^{-x}(x^2+2x+2) + C.$

$(**): \lim_{t\to\infty}\frac{t^2+2t+2}{e^t} \overset{H}{=} \lim_{t\to\infty}\frac{2t+2}{e^t} \overset{H}{=} \lim_{t\to\infty}\frac{2}{e^t} = 0$.

25. La fonction $f(x) = \frac{1}{x^2+x^3} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$ [obtenu à l'aide des fractions partielles] est continue, positive et décroissante sur l'intervalle [1, ∞[; le critère de l'intégrale s'applique donc.

$$\int_1^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right)dx = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{x} - \ln x + \ln(x+1)\right]_1^t$$
$$= \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{t} + \ln\frac{t+1}{t} + 1 - \ln 2\right] = 0 + 0 + 1 - \ln 2$$

L'intégrale converge, donc la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n^3}$ converge.

26. La fonction $f(x) = \frac{x}{x^4+1}$ est continue, positive et décroissante sur l'intervalle [1, ∞[. [On remarque que $f'(x) = \frac{x^4+1-4x^4}{(x^4+1)^2} = \frac{1-3x^4}{(x^4+1)^2} < 0$ sur l'intervalle [1, ∞[.] Par conséquent, le critère de l'intégrale s'applique.

$\int_1^\infty \frac{x}{x^4+1}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{\frac{1}{2}(2x)}{1+(x^2)^2}dx = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{2}\arctan(x^2)\right]_1^t = \frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}[\arctan(t^2) - \arctan 1] = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8}$, donc la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^4+1}$ converge.

27. La fonction $f(x) = \frac{\cos\pi x}{\sqrt{x}}$ n'est ni positive ni décroissante sur l'intervalle [1, ∞[; donc, les conditions du critère de l'intégrale ne sont pas satisfaites pour la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\pi n}{\sqrt{n}}$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

28. La fonction $f(x) = f(x) = \dfrac{\cos^2 x}{1+x^2}$ n'est pas décroissante sur l'intervalle [1, ∞[; donc, les conditions du critère de l'intégrale ne sont pas satisfaites pour la série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos^2 n}{1+n^2}$.

29. Nous avons déjà démontré (à l'exercice 21) que lorsque $p = 1$ la série $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n(\ln n)^p}$ diverge; supposons donc que $p \neq 1$.

$f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^p}$ est continue et positive sur l'intervalle [2, ∞[et $f'(x) = -\dfrac{p + \ln x}{x^2(\ln x)^{p+1}} < 0$ si $x > e^{-p}$, de sorte que f devient éventuellement décroissante et le critère de l'intégrale s'applique.

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{(\ln x)^{1-p}}{1-p}\right]_2^t \text{ [pour } p \neq 1] = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{(\ln t)^{1-p}}{1-p} - \frac{(\ln 2)^{1-p}}{1-p}\right]$$

Cette limite existe lorsque $1 - p < 0 \iff p > 1$, donc la série converge pour $p > 1$.

30. $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x\left[\ln(\ln x)\right]^p}$ est continue et positive sur l'intervalle [3, ∞[. Pour $p \geq 0$, f est de toute évidence décroissante sur l'intervalle [3, ∞[et pour $p < 0$, on peut vérifier que f devient éventuellement décroissante. Par conséquent, le critère de l'intégrale s'applique.

$$I = \int_3^{\infty} \frac{dx}{x\ln x\left[\ln(\ln x)\right]^p} = \lim_{t\to\infty}\int_3^t \frac{\left[\ln(\ln x)\right]^{-p}}{x\ln x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{\left[\ln(\ln x)\right]^{-p+1}}{-p+1}\right]_3^t \text{ [pour } p \neq 1]$$
$$= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{\left[\ln(\ln t)\right]^{-p+1}}{-p+1} - \frac{\left[\ln(\ln 3)\right]^{-p+1}}{-p+1}\right],$$

qui existe lorsque $-p + 1 < 0 \iff p > 1$. Si $p = 1$, alors $I = \lim_{t\to\infty}\left[\ln(\ln x)\right]_3^t = \infty$. Par conséquent, $\sum_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln n\left[\ln(\ln n)\right]^p}$ converge pour $p > 1$.

31. Il est évident que la série ne peut converger si $p \geq -\frac{1}{2}$, puisqu'alors $\lim_{n\to\infty} n(1+n^2)^p \neq 0$. Donc, supposons que $p < -\frac{1}{2}$. Alors, $f(x) = x(1 + x^2)^p$ est continue, positive et éventuellement décroissante sur l'intervalle [1, ∞[; le critère de l'intégrale s'applique donc.

$$\int_1^{\infty} x(x+1^2)^p\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+x^2)^{p+1}}{p+1}\right]_1^t = \frac{1}{2(p+1)}\lim_{t\to\infty}\left[(1+t^2)^{p+1} - 2^{p+1}\right].$$

La limite existe $\iff p + 1 < 0 \iff p < -1$, donc la série converge lorsque $p < -1$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

32. Si $p \le 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^p} = \infty$ et la série diverge, donc supposons que $p > 0$. $f(x) = \frac{\ln x}{x^p}$ est positive et continue et $f'(x) < 0$ pour $x > e^{1/p}$, donc f devient éventuellement décroissante et le critère de l'intégrale s'applique. En effectuant une intégration par parties, nous obtenons

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^p}dx = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{x^{1-p}\left[(1-p)\ln x - 1\right]}{(1-p)^2}\right]_1^t \text{ (pour } p \ne 1) = \frac{1}{(1-p^2)}\left[\lim_{t\to\infty} t^{1-p}\left[(1-p)\ln t - 1\right] + 1\right], \text{ qui existe lorsque}$$

$1-p<0 \quad \Leftrightarrow \quad p>1$. Par conséquent, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^p}$ converge $\quad \Leftrightarrow \quad p>1$.

33. Comme il s'agit ici d'une série p avec $p = x, \varsigma(x)$ est définie lorsque $x > 1$. À moins d'indication contraire, le domaine naturel d'une fonction f est l'ensemble des nombres réels x qui font que l'expression $f(x)$ est un nombre réel. Donc, dans le cas d'une série, c'est l'ensemble des nombres réels x qui font que la série est convergente.

34. a) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \frac{1}{1^2}[\text{soustraire } a_1] = \frac{\pi^2}{6} - 1$

b) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{49}{36}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi^2}{6}\right) = \frac{\pi^2}{24}$

35. a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{81}{n^4} = 81\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = 81\left(\frac{\pi^4}{90}\right) = \frac{9\pi^4}{10}$

b) $\sum_{k=5}^{\infty}\frac{1}{(k-2)^4} = \frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots = \sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90} - \left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}\right)[\text{soustraire } a_1 \text{ et } a_2] = \frac{\pi^4}{90} - \frac{17}{16}$

36. a) $f(x) = 1/x^4$ est positive et continue et $f'(x) = -4/x^5$ est négative pour $x > 0$; le critère de l'intégrale s'applique donc.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} \approx s_{10} = \frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots+\frac{1}{10^4} \approx 1{,}082\,037$. $R_{10} \le \int_{10}^{\infty}\frac{1}{x^4}dx = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{-3x^3}\right]_{10}^{t} = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{3t^3}+\frac{1}{3(10)^3}\right) = \frac{1}{3000}$, donc l'erreur commise est au plus égale à $0{,}000\overline{3}$.

b) $s_{10} + \int_{11}^{\infty}\frac{1}{x^4}dx \le s \le s_{10} + \int_{10}^{\infty}\frac{1}{x^4}dx \quad \Rightarrow \quad s_{10} + \frac{1}{3(11)^3} \le s \le s_{10} + \frac{1}{3(10)^3} \quad \Rightarrow$

1,082 037 + 0,000 250 = 1,082 287 ≤ s ≤ 1,082 037 + 0,000 333 = 1,082 370;

nous obtenons donc $s \approx 1{,}082\,33$ avec une erreur ≤ 0,000 05.

 © Groupe Modulo inc., 2013

c) L'estimation obtenue à la sous-question b) est $s \approx 1{,}082\ 33$ avec une erreur $\leq 0{,}000\ 05$. La valeur exacte donnée à l'exercice 35 est $\pi^4 / 90 \approx 1{,}082\ 323$. L'écart est de moins de 0,000 01.

d) $R_n \leq \int_n^\infty \frac{1}{x^4}dx = \frac{1}{3n^3}$. Donc, $R_n < 0{,}000\ 01 \Rightarrow \frac{1}{3n^3} < \frac{1}{10^5} \Rightarrow 3n^3 > 10^5 \Rightarrow n > \sqrt[3]{(10)^5 / 3} \approx 32{,}2$, c'est-à-dire pour $n > 32$.

37. a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ est positive et continue et $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$ est négative pour $x > 0$; le critère de l'intégrale s'applique donc. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \approx s_{10} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{10^2} \approx 1{,}549\ 768$. $R_{10} \leq \int_{10}^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{-1}{x}\right]_{10}^{t} = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{10}$, donc l'erreur commise est au plus égale à 0,1.

b) $s_{10} + \int_{11}^\infty \frac{1}{x^2}dx \leq s \leq s_{10} + \int_{10}^\infty \frac{1}{x^2}dx \Rightarrow s_{10} + \frac{1}{11} \leq s \leq s_{10} + \frac{1}{10} \Rightarrow$

$1{,}549\ 768 + 0{,}090\ 909 = 1{,}640\ 677 \leq s \leq 1{,}549\ 768 + 0{,}1 = 1{,}649\ 768$; nous obtenons donc $s \approx 1{,}645\ 22$ (la moyenne de 1,640 677 et 1,649 768) avec une erreur $\leq 0{,}005$ (la valeur maximale de 1,649 768 – 1,645 22 et de 1,645 22 – 1,640 677, arrondie au chiffre supérieur).

c) L'estimation obtenue à la sous-question b) est $s \approx 1{,}645\ 22$ avec une erreur $\leq 0{,}005$. La valeur exacte donnée à l'exercice 34 est $\pi^2 / 6 \approx 1{,}644\ 934$. L'écart est de moins de 0,000 3.

d) $R_n \leq \int_n^\infty \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{n}$. Donc $R_n < 0{,}001$ si $\frac{1}{n} < \frac{1}{1000} \Leftrightarrow n > 1000$.

38. $f(x) = 1/x^5$ est positive et continue et $f'(x) = -5/x^6$ est négative pour $x > 0$; le critère de l'intégrale s'applique donc. Selon les inégalités 5, $R_n \leq \int_n^\infty x^{-5}dx = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{-1}{4x^4}\right]_n^t = \frac{1}{4n^4}$. Si nous utilisons $n = 5$, alors $s_5 \approx 1{,}036\ 662$ et $R_5 \leq 0{,}0004$. Donc, $s \approx s_5 \approx 1{,}037$.

39. $f(x) = 1/(2x+1)^6$ est continue, positive et décroissante sur l'intervalle $[1, \infty[$; le critère de l'intégrale s'applique donc. Selon les inégalités 5, $R_n \leq \int_n^\infty (2x+1)^{-6}dx = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{-1}{10(2x+1)^5}\right]_n^t = \frac{1}{10(2n+1)^5}$. Pour avoir une précision de cinq décimales, nous devons calculer

$\frac{1}{10(2n+1)^5} \leq \frac{5}{10^6} \Leftrightarrow (2n+1)^5 \geq 20\ 000 \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{2}\left(\sqrt[5]{20\ 000} - 1\right) \approx 3{,}12$,.Il faut donc utiliser $n = 4$.

$s_4 = \sum_{n=1}^{4} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} \approx 0{,}001\ 446 \approx 0{,}001\ 45$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

40. $f(x)=\dfrac{1}{x(\ln x)^2}$ est positive et continue et $f'(x) = -\dfrac{\ln x+2}{x^2(\ln x)^3}$ est négative pour $x > 1$; le critère de l'intégrale s'applique donc.

Selon les inégalités 4, nous devons avoir $0{,}01 > \int_n^\infty \dfrac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim\limits_{t\to\infty}\left[\dfrac{-1}{\ln x}\right]_n^t = \dfrac{1}{\ln n}$. Ceci est vrai pour $n > e^{100}$; nous aurions donc besoin de ce nombre de termes, cela présente une grande difficulté puisque $e^{100} \approx 2{,}7 \times 10^{43}$.

41. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1{,}001} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{1{,}001}}$ est une série p convergente avec $p = 1{,}001 > 1$. Selon les inégalités 4, nous obtenons

$$R_n \le \int_n^\infty x^{-1{,}001}dx = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{x^{-1{,}001}}{-0{,}001}\right]_n^t = -1000\lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{x^{0{,}001}}\right]_n^t = -1000\left(-\frac{1}{n^{0{,}001}}\right) = \frac{1000}{n^{0{,}001}}.$$

Nous désirons $R_n < 0{,}000\,000\,005 \iff \dfrac{1000}{n^{0{,}001}} < 5\times10^{-9} \iff n^{0{,}001} > \dfrac{1000}{5\times10^{-9}} \iff$

$n > (2 \times 10^{11})^{1000} = 2^{1000} \times 10^{11\,000} \approx 1{,}07 \times 10^{301} \times 10^{11\,000} = 1{,}07 \times 10^{11\,301}$.

42. a) $f(x)=\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2$ est continue et positive pour $x > 1$ et, puisque $f'(x)=\dfrac{2\ln x(1-\ln x)}{x^3} < 0$ pour $x > e$, le critère de l'intégrale s'applique. À l'aide d'un logiciel de calcul symbolique, nous obtenons $\int_1^\infty \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2 dx = 2$, donc la série converge également.

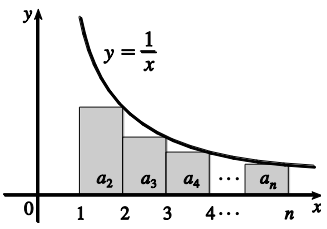
b) Comme le critère de l'intégrale s'applique, l'erreur dans $s \approx s_n$ est $R_n \le \int_n^\infty \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2 dx = \dfrac{(\ln n)^2 + 2\ln n + 2}{n}$.

c) En traçant le graphique des fonctions $y_1 = \dfrac{(\ln x)^2 + 2\ln x + 2}{x}$ et $y_2 = 0{,}05$, nous constatons que $y_1 < y_2$ pour $n \ge 1373$.

d) En utilisant le logiciel de calcul symbolique pour effectuer l'addition des 1373 premiers termes, nous obtenons $s_{1373} \approx 1{,}94$.

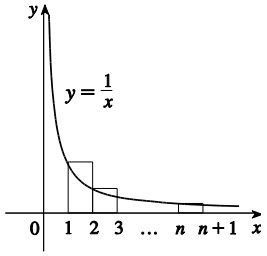
43. a) Le graphique montre que $a_2 + a_3 + \cdots + a_n \le \int_1^n f(x)dx$, donc avec $f(x) = \dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{n} \le \int_1^n \dfrac{1}{x}dx = \ln n$. Par conséquent, $s_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{n} \le 1 + \ln n$.

b) Selon la sous-question a), $s_{10^6} \le 1 + \ln 10^6 \approx 14{,}82 < 15$ et $s_{10^9} \le 1 + \ln 10^9 \approx 21{,}72 < 22$.

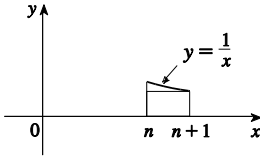


 © Groupe Modulo inc., 2013

44. a) La somme des aires des n rectangles dans le graphique est $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$. Or, $\int_1^{n+1}\frac{dx}{x}$ est inférieure à cette somme puisque les rectangles s'étendent au-dessus de la courbe $y = 1/x$; donc, $\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx=\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$, et puisque $\ln n < \ln(n+1)$, $0<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n=t_n$.



b) L'aire située sous la coube $f(x) = 1/x$ entre $x = n$ et $x = n+1$ est $\int_n^{n+1}\frac{dx}{x}=\ln(n+1)-\ln n$. Cette aire est de toute évidence supérieure à l'aire du rectangle inscrit dans le graphique $\left[\text{qui est } \frac{1}{n+1}\right]$; donc, $t_n - t_{n+1} = [\ln(n+1)-\ln n]-\frac{1}{n+1}>0$ et, par conséquent, $t_n > t_{n+1}$. Il s'ensuit que $\{t_n\}$ est une suite décroissante.



c) Nous avons montré que $\{t_n\}$ est décroissante et que $t_n > 0$ pour tout n. Par conséquent, $0 < t_n \le t_1 = 1$, donc $\{t_n\}$ est une suite monotone bornée. Il s'ensuit qu'elle converge selon le théorème des suites monotones.

45. $b^{\ln n}=(e^{\ln b})^{\ln n}=(e^{\ln n})^{\ln b}=n^{\ln b}=\frac{1}{n^{-\ln b}}$. Il s'agit ici d'une série p, qui converge pour tout b tel que

$-\ln b>1 \quad\Leftrightarrow\quad \ln b<-1 \quad\Leftrightarrow\quad b<e^{-1} \quad\Leftrightarrow\quad b<1/e$ [avec $b > 0$].

46. Pour la série $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{c}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$,

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{c}{i}-\frac{1}{i+1}\right)=\left(\frac{c}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{c}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{c}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{c}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\ &=\frac{c}{1}+\frac{c-1}{2}+\frac{c-1}{3}+\frac{c-1}{4}+\cdots+\frac{c-1}{n}-\frac{1}{n+1}=c+(c-1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

Par conséquent, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{c}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\left[c+(c-1)\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}-\frac{1}{n+1}\right]$. Puisque le produit d'une série divergente avec une constante donne une série divergente, alors la série est divergente, la dernière limite n'existe que si

 © Groupe Modulo inc., 2013

$c - 1 = 0$, donc la série initiale ne converge que si $c = 1$.

47. a) Nous ne pouvons rien affirmer à propos de $\sum a_n$. Si $a_n > b_n$ pour tout n et $\sum b_n$ est convergente, alors $\sum a_n$ pourrait être convergente ou divergente. (Voir la note après l'exemple 2.)

b) Si $a_n < b_n$ pour tout n, alors $\sum a_n$ est convergente. [Ceci est la partie i) de la règle de comparaison.]

48. a) Si $a_n > b_n$ pour tout n, alors $\sum a_n$ est divergente. [Ceci est la partie ii) de la règle de comparaison.]

b) Nous ne pouvons rien affirmer à propos de $\sum a_n$. Si $a_n < b_n$ pour tout n et $\sum a_n$ est divergente, alors $\sum a_n$ pourrait être convergente ou divergente.

49. $\dfrac{n}{2n^3+1} < \dfrac{n}{2n^3} = \dfrac{1}{2n^2} < \dfrac{1}{n^2}$ pour tout $n \geq 1$, donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^3+1}$ converge par comparaison avec $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, qui converge parce que c'est une série p avec $p = 2 > 1$.

50. $\dfrac{n^3}{n^4-1} > \dfrac{n^3}{n^4} = \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \geq 2$, donc $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3}{n^4-1}$ diverge par comparaison avec $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$, qui diverge parce que c'est une série p avec $p = 1 \leq 1$ (la série harmonique).

51. $\dfrac{n+1}{n\sqrt{n}} > \dfrac{n}{n\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout $n \geq 1$, donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n\sqrt{n}}$ diverge par comparaison avec $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, qui diverge parce que c'est une série p avec $p = \frac{1}{2} \leq 1$.

52. $\dfrac{n-1}{n^2\sqrt{n}} < \dfrac{n}{n^2 n^{1/2}} = \dfrac{1}{n^{3/2}}$ pour tout $n \geq 1$, donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2\sqrt{n}}$ converge par comparaison avec $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$, qui converge parce que c'est une série p avec $p = \frac{3}{2} > 1$.

53. $\dfrac{9^n}{3+10^n} < \dfrac{9^n}{10^n} = \left(\dfrac{9}{10}\right)^n$ pour tout $n \geq 1$. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\tfrac{9}{10})^n$ est une série géométrique convergente ($|r| = \frac{9}{10} < 1$), donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{3+10^n}$ converge, selon la règle de comparaison.

54. $\dfrac{6^n}{5^n-1} > \dfrac{6^n}{5^n} = \left(\dfrac{6}{5}\right)^n$ pour tout $n \geq 1$. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\tfrac{6}{5})^n$ est une série géométrique divergente ($|r| = \frac{6}{5} > 1$), donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{5^n-1}$ diverge, selon la règle de comparaison.

 © Groupe Modulo inc., 2013

55. $\frac{\ln k}{k} > \frac{1}{k}$ pour tout k ≥ 3 [puisque ln k > 1 pour $k \geq 3$], donc $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$ diverge par comparaison avec $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k}$, qui diverge parce que c'est une série p avec $p = 1 \leq 1$ (la série harmonique). Par conséquent, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$ diverge puisqu'un nombre fini de termes n'a aucune incidence sur la convergence ou la divergence d'une série.

56. $\frac{k \sin^2 k}{1+k^3} \leq \frac{k}{1+k^3} < \frac{k}{k^3} = \frac{1}{k^2}$ pour tout $k \geq 1$, donc $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sin^2 k}{1+k^3}$ converge par comparaison avec $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, qui converge parce que c'est une série p avec $p = 2 > 1$.

57. $\frac{\sqrt[3]{k}}{\sqrt{k^3+4k+3}} < \frac{\sqrt[3]{k}}{\sqrt{k^3}} = \frac{k^{1/3}}{k^{3/2}} = \frac{1}{k^{7/6}}$ pour tout $k \geq 1$, donc $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{k}}{\sqrt{k^3+4k+3}}$ converge par comparaison avec $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{7/6}}$, qui converge parce que c'est une série p avec $p = \frac{7}{6} > 1$.

58. $\frac{(2k-1)(k^2-1)}{(k+1)(k^2+4)^2} < \frac{2k(k^2)}{k(k^2)^2} = \frac{2k^3}{k^5} = \frac{2}{k^2}$ pour tout $k \geq 1$, donc $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)(k^2-1)}{(k+1)(k^2+4)^2}$ converge par comparaison avec $2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, qui converge parce c'est une série p où $p = 2 > 1$ multipliée par une constante.

59. $\frac{\arctan n}{n^{1,2}} < \frac{\pi/2}{n^{1,2}}$ pour tout $n \geq 1$, donc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^{1,2}}$ converge par comparaison avec $\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1,2}}$, qui converge parce que c'est une série p où $p = 1{,}2 > 1$ multipliée par une constante.

60. $\frac{\sqrt{n}}{n-1} > \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$, donc $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n-1}$ diverge par comparaison avec la série p divergente (partielle) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\left[p = \frac{1}{2} \leq 1\right]$.

61. $\frac{4^{n+1}}{3^n - 2} > \frac{4 \cdot 4^n}{3^n} = 4\left(\frac{4}{3}\right)^n$ pour tout $n \geq 1$. $\sum_{n=1}^{\infty} 4\left(\frac{4}{3}\right)^n = 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n$ est une série géométrique divergente $(|r| = \frac{4}{3} > 1)$, donc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+1}}{3^n - 2}$ diverge, selon le critère de comparaison.

62. $\frac{1}{\sqrt[3]{3n^4+1}} < \frac{1}{\sqrt[3]{3n^4}} < \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}} = \frac{1}{n^{4/3}}$ pour tout $n \geq 1$, donc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{3n^4+1}}$ converge par comparaison avec $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}}$, qui converge parce que c'est une série p avec $p = \frac{4}{3} > 1$.

63. Utilisons le critère de comparaison par une limite avec $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ et $b_n = \frac{1}{n}$:

 © Groupe Modulo inc., 2013

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+(1/n^2)}}=1>0$. Puisque la série harmonique $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ diverge également.

64. Utilisons le critère de comparaison par une limite avec $a_n=\frac{1}{2n+3}$ et $b_n=\frac{1}{n}$: $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+(3/n)}=\frac{1}{2}>0$. Puisque la série harmonique $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+3}$ diverge également.

65. Utilisons le critère de comparaison par une limite avec $a_n=\frac{1+4^n}{1+3^n}$ et $b_n=\frac{4^n}{3^n}$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1+4^n}{1+3^n}}{\frac{4^n}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+4^n}{1+3^n}\cdot\frac{3^n}{4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+4^n}{4^n}\cdot\frac{3^n}{1+3^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4^n}+1\right)\cdot\frac{1}{\frac{1}{3^n}+1}=1>0$$

Puisque la série géométrique $\sum b_n=\sum(\frac{4}{3})^n$ diverge, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+4^n}{1+3^n}$ diverge également.

Autre méthode : Utilisons le critère de comparaison avec $\frac{1+4^n}{1+3^n}>\frac{1+4^n}{3^n+3^n}>\frac{4^n}{2(3^n)}=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^n$ ou utilisons le critère de divergence.

66. $4^n > n$ pour tout $n \geq 1$ puisque la fonction $f(x) = 4^x - x$ satisfait à $f(1) = 3$ et $f'(x) = 4^x \ln 4 - 1 > 0$ pour $x \geq 1$. Donc,

$\frac{n+4^n}{n+6^n}<\frac{4^n+4^n}{n+6^n}<\frac{2\cdot4^n}{6^n}=2(\frac{4}{6})^n$ et, par conséquent, la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+4^n}{n+6^n}$ converge par comparaison avec $2\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{3})^n$, qui est une constante fois une série géométrique convergente $[|r|=\frac{2}{3}<1]$.

Autre méthode : Utilisons le critère de comparaison par une limite avec $a_n=\frac{n+4^n}{n+6^n}$ et $b_n=(\frac{2}{3})^n$.

67. Utilisons le critère de comparaison par une limite avec $a_n=\frac{\sqrt{n+2}}{2n^2+n+1}$ et $b_n=\frac{1}{n^{3/2}}$:

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{3/2}\sqrt{n+2}}{2n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^{3/2}\sqrt{n+2}\right)/\left(n^{3/2}\sqrt{n}\right)}{(2n^2+n+1)/n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+2/n}}{2+1/n+1/n^2}=\frac{\sqrt{1}}{2}=\frac{1}{2}>0$. Puisque $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ est une série p convergente $[p=\frac{3}{2}>1]$, la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}}{2n^2+n+1}$ converge également.

68. $\frac{\sqrt{n^4+1}}{n^3+n^2}>\frac{\sqrt{n^4}}{n^2(n+1)}=\frac{n^2}{n^2(n+1)}=\frac{1}{n+1}$ pour tout $n \geq 1$, donc $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^4+1}}{n^3+n^2}$ diverge par comparaison avec $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$, laquelle diverge parce que c'est une série p avec $p = 1 \leq 1$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

69. Si $a_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$ et $b_n = \dfrac{1}{n^2}$, alors

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n\sqrt{n^2-1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n/n}{\sqrt{n^2-1}/n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1-1/n^2}} = \dfrac{1}{1} = 1 > 0$, donc $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$ converge selon le critère de comparaison par une limite avec la série convergente $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$.

70. Utilisons le critère de comparaison par une limite avec $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2 e^{-n}$ et $b_n = e^{-n}$: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2 = 1 > 0$.

Puisque $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{e^n}$ est une série géométrique convergente $[|r| = \frac{1}{e} < 1]$, la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2 e^{-n}$ converge également.

71. $\dfrac{e^{1/n}}{n} > \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$, donc $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{1/n}}{n}$ diverge par comparaison avec la série harmonique $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$.

72. Il est évident que $n! = n(n-1)(n-2)\cdots(3)(2) \geq 2\cdot 2\cdot 2\cdot\cdots\cdot 2\cdot 2 = 2^{n-1}$, donc $\dfrac{1}{n!} \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n-1}}$ est une série géométrique convergente $[|r| = \frac{1}{2} < 1]$, donc $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$ converge, selon le critère de comparaison.

73. $\dfrac{n!}{n^n} = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(n-1)n}{n\cdot n\cdot n\cdot\cdots\cdot n\cdot n} \leq \dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{2}{n}\cdot 1\cdot 1\cdot\cdots\cdot 1$ pour $n \geq 2$, donc puisque $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n^2}$ converge $[p = 2 > 1]$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}$ converge également, selon le critère de comparaison.

74. Utilisons le critère de comparaison par une limite avec $a_n = \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $b_n = \dfrac{1}{n}$. Alors, $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont des séries à termes positifs et $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin(1/n)}{1/n} = \lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1 > 0$. Puisque $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ est la série harmonique divergente, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(1/n)$ diverge également. [Nous pourrions également utiliser la règle de L'Hospital pour évaluer la limite : $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin(1/x)}{1/x} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos(1/x)\cdot(-1/x^2)}{-1/x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\cos\dfrac{1}{x} = \cos 0 = 1$.]

75. Utilisons le critère de comparaison par une limite avec $a_n = \dfrac{1}{n^{1+1/n}}$ et $b_n = \dfrac{1}{n}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^{1+1/n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{1/n}} = 1$ $\left[\text{puisque}\lim\limits_{x\to\infty}x^{1/x} = 1 \text{ à l'aide de la règle de L'Hospital}\right]$, donc

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ diverge [série harmonique] $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{1+1/n}}$ diverge.

 © Groupe Modulo inc., 2013

76. $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{\sqrt{n^4+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{17}}+\frac{1}{\sqrt{82}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{10\,001}}\approx 1,248\,56$. Or, $\dfrac{1}{\sqrt{n^4+1}}<\dfrac{1}{\sqrt{n^4}}=\dfrac{1}{n^2}$, donc l'erreur est

$$R_{10}\le T_{10}\le\int_{10}^{\infty}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_{10}^{t}=\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{10}=0,1\ .$$

77. $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\frac{\sin^2 n}{n^3}=\frac{\sin^2 1}{1}+\frac{\sin^2 2}{8}+\frac{\sin^2 3}{27}+\cdots+\frac{\sin^2 10}{1000}\approx 0,832\,53$. Or, $\dfrac{\sin^2 n}{n^3}\le\dfrac{1}{n^3}$, donc l'erreur est

$$R_{10}\le T_{10}\le\int_{10}^{\infty}\frac{1}{x^3}dx=\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_{10}^{t}=\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{200}\right)=\frac{1}{200}=0,005\ .$$

78. $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}5^{-n}\cos^2 n=\frac{\cos^2 1}{5}+\frac{\cos^2 2}{5^2}+\frac{\cos^2 3}{5^3}+\cdots+\frac{\cos^2 10}{5^{10}}\approx 0,073\,93$. Or, $\dfrac{\cos^2 n}{5^n}\le\dfrac{1}{5^n}$, donc l'erreur est

$$R_{10}\le T_{10}\le\int_{10}^{\infty}\frac{1}{5^x}dx=\lim_{t\to\infty}\int_{10}^{t}5^{-x}dx=\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{5^{-x}}{\ln 5}\right]_{10}^{t}=\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{5^{-t}}{\ln 5}+\frac{5^{-10}}{\ln 5}\right)=\frac{1}{5^{10}\ln 5}<6,4\times10^{-8}\ .$$

79. $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{3^n+4^n}=\frac{1}{3^1+4^1}+\frac{1}{3^2+4^2}+\frac{1}{3^3+4^3}+\cdots+\frac{1}{3^{10}+4^{10}}\approx 0,197\,88$. Or, $\dfrac{1}{3^n+4^n}<\dfrac{1}{3^n+3^n}=\dfrac{1}{2\cdot 3^n}$, donc l'erreur est

$$R_{10}\le T_{10}\le\int_{10}^{\infty}\frac{1}{2\cdot 3^x}dx=\lim_{t\to\infty}\int_{10}^{t}\frac{1}{2}\cdot 3^{-x}dx=\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{2}\frac{3^{-x}}{\ln 3}\right]_{10}^{t}=\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\frac{3^{-t}}{\ln 3}+\frac{1}{2}\frac{3^{-10}}{\ln 3}\right)$$
$$=\frac{1}{2\cdot 3^{10}\ln 3}<7,7\times10^{-6}.$$

80. Utilisons le critère de comparaison par une limite avec $a_n=\dfrac{n+2}{(n+1)^3}$ et $b_n=\dfrac{1}{n^2}$:

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(n+2)}{(n+1)^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{(1+\frac{1}{n})^3}=1>0$. Puisque $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ est une série p convergente (partielle) [$p = 2 > 1$], la série $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n+2}{(n+1)^3}$ converge également.

81. Utilisons le critère de comparaison par une limite avec $a_n=\dfrac{5+2n}{(1+n^2)^2}$ et $b_n=\dfrac{1}{n^3}$:

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3(5+2n)}{(1+n^2)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^3+2n^4}{(1+n^2)^2}\cdot\frac{1/n^4}{1/(n^2)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n}+2}{(\frac{1}{n^2}+1)^2}=2>0$. Puisque $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ est une série p convergente [$p = 3 > 1$], la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5+2n}{(1+n^2)^2}$ converge également.

 © Groupe Modulo inc., 2013

82. Si $a_n = \dfrac{n^2-5n}{n^3+n+1}$ et $b_n = \dfrac{1}{n}$, alors $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-5n^2}{n^3+n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-5/n}{1+1/n^2+1/n^3} = 1 > 0$, donc $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2-5n}{n^3+n+1}$ diverge selon le critère de comparaison par une limite avec la série harmonique divergente $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$. (On constate que $a_n > 0$ pour $n \geq 6$.)

83. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n+1}{5^{n+1}}\cdot\dfrac{5^n}{n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{n+1}{n}\right| = \dfrac{1}{5}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+1/n}{1} = \dfrac{1}{5}(1) = \dfrac{1}{5} < 1$, donc la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{5^n}$ converge absolument, selon le critère de d'Alembert.

84. $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim\limits_{k\to\infty}\left[\dfrac{(k+1)(\frac{2}{3})^{k+1}}{k(\frac{2}{3})^k}\right] = \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{k+1}{k}\left(\dfrac{2}{3}\right)^1 = \dfrac{2}{3}\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{k}\right) = \frac{2}{3}(1) = \frac{2}{3} < 1$, donc la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}k(\frac{2}{3})^k$ converge absolument, selon le critère de d'Alembert. Puisque les termes de cette série sont positifs, la convergence absolue entraîne la convergence de la série.

85. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{(n+1)!}{100^{n+1}}\cdot\dfrac{100^n}{n!}\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{100} = \infty$ **.** donc la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{100^n}$ diverge, selon le critère de d'Alembert.

86. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{10^{n+1}}{(n+2)4^{2n+3}}\cdot\dfrac{(n+1)4^{2n+1}}{10^n}\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{10}{4^2}\cdot\dfrac{n+1}{n+2}\right) = \dfrac{5}{8} < 1$, donc la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{10^n}{(n+1)4^{2n+1}}$ est absolument convergente, selon le critère de d'Alembert. Puisque les termes de cette série sont positifs, la convergence absolue entraîne la convergence de la série.

87. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{2n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+1/n^2}{2+1/n^2} = \dfrac{1}{2} < 1$, donc la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{2n^2+1}\right)^n$ est absolument convergente, selon le critère de Cauchy.

88. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e > 1$, donc la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$ est divergente, selon le critère de Cauchy.

89. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{[2(n+1)]!}{[(n+1)!]^2}\cdot\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2+2/n)(2+1/n)}{(1+1/n)(1+1/n)} = \dfrac{2\cdot 2}{1\cdot 1} = 4 > 1$, donc la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$ est divergente, selon le critère de d'Alembert.

90. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(n+1)^{100}100^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\dfrac{n!}{n^{100}100^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{100}{n+1}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{100} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{100}{n+1}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{100} = 0\cdot 1 = 0 < 1$

donc la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{100}100^n}{n!}$ est absolument convergente, selon le critère de d'Alembert.

 © Groupe Modulo inc., 2013

91. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{2^{(n+1)^2}}{(n+1)!}\cdot\dfrac{n!}{2n^2}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n^2+2n+1}}{2^{n^2}(n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{2n+1}}{n+1} = L$. Or, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^{2x+1}}{x+1} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^{2x+1}(2\ln 2)}{1} = \infty$, donc $L > 1$ et la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{n^2}}{n!}$ est divergente, selon le critère de d'Alembert.

92. Utilisons le critère de d'Alembert avec la série $\dfrac{2}{5}+\dfrac{2\cdot 6}{5\cdot 8}+\dfrac{2\cdot 6\cdot 10}{5\cdot 8\cdot 11}+\dfrac{2\cdot 6\cdot 10\cdot 14}{5\cdot 8\cdot 11\cdot 14}+\cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2\cdot 6\cdot 10\cdot 14\cdot\cdots\cdot(4n-2)}{5\cdot 8\cdot 11\cdot 14\cdot\cdots\cdot(3n+2)}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{2\cdot 6\cdot 10\cdot\cdots\cdot(4n-2)[4(n+1)-2]}{5\cdot 8\cdot 11\cdot\cdots\cdot(3n+2)[3(n+1)+2]}\cdot\dfrac{5\cdot 8\cdot 11\cdot\cdots\cdot(3n+2)}{2\cdot 6\cdot 10\cdot\cdots\cdot(4n-2)}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n+2}{3n+5} = \dfrac{4}{3} > 1$, donc la série donnée est divergente.

93. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}{n!} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2\cdot 1)\cdot(2\cdot 2)\cdot(2\cdot 3)\cdot\cdots\cdot(2\cdot n)}{n!} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n n!}{n!} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n$, qui diverge, selon le critère de divergence, puisque $\lim\limits_{n\to\infty}2^n = \infty$.

94. Puisque $\dfrac{d_n}{10^n} \le \dfrac{9}{10^n}$ pour chaque n, et puisque $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{9}{10^n}$ est une série géométrique convergente ($|r| = \frac{1}{10} < 1$), $0, d_1 d_2 d_3 \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{d_n}{10^n}$ convergera toujours, selon le critère de comparaison.

95. Il est évident que si $p < 0$, alors la série diverge, puisque $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^p \ln n} = \infty$. Si $0 \le p \le 1$, alors

$n^p \ln n \le n \ln n \quad\Rightarrow\quad \dfrac{1}{n^p \ln n} \ge \dfrac{1}{n \ln n}$ et $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$ diverge (exercice 6.3.21), donc $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^p \ln n}$ diverge. Si $p > 1$, utilisons le critère de comparaison par une limite avec $a_n = \dfrac{1}{n^p \ln n}$ et $b_n = \dfrac{1}{n^p}$. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} b_n$ converge et $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ln n} = 0$, donc $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^p \ln n}$ converge également. (Ou encore, utilisons le critère de comparaison, puisque $n^p \ln n > n^p$ pour $n > e$.) En résumé, la série converge si et seulement si $p > 1$.

96. Puisque $\sum a_n$ converge, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, donc il existe un nombre N tel que $|a_n - 0| < 1$ pour tout $n > N \quad\Rightarrow\quad 0 \le a_n < 1$ pour tout $n > N \quad\Rightarrow\quad 0 \le a_n^2 \le a_n$. Puisque $\sum a_n$ converge, $\sum a_n^2$ converge également, par comparaison.

97. a) Puisque $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n/b_n) = 0$, il existe un nombre $N > 0$ tel que $|a_n/b_n - 0| < 1$ pour tout $n > N$ et donc, $a_n < b_n$ puisque a_n et b_n sont positifs. Par conséquent, puisque $\sum b_n$ converge, $\sum a_n$ converge également, par comparaison.

b)

i) Si $a_n = \dfrac{\ln n}{n^3}$ et $b_n = \dfrac{1}{n^2}$, alors $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1/x}{1} = 0$, donc $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^3}$ converge selon la sous-question a).

 © Groupe Modulo inc., 2013

ii) Si $a_n = \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}e^n}$ et $b_n = \dfrac{1}{e^n}$, alors $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1/x}{1/\left(2\sqrt{x}\right)} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x}} = 0$. Or, $\sum b_n$ est une série géométrique convergente de raison $r = 1/e$ [$|r| < 1$], donc $\sum a_n$ converge selon la sous-question a).

98. a) Puisque $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \infty$, il existe un nombre entier N tel que $\dfrac{a_n}{b_n} > 1$ lorsque $n > N$. (Posons que $M = 1$ dans la définition 6.1.5.)

Alors, $a_n > b_n$ lorsque $n > N$ et, puisque $\sum b_n$ est divergente, $\sum a_n$ est également divergente, par comparaison.

b)

i) Si $a_n = \dfrac{1}{\ln n}$ et $b_n = \dfrac{1}{n}$ pour $n \geq 2$, alors $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\ln n} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\ln x} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1/x} = \lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$, donc selon la sous-question a), $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{\ln n}$ est divergente.

ii) Si $a_n = \dfrac{\ln n}{n}$ et $b_n = \dfrac{1}{n}$, alors $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ est la série harmonique divergente et $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\ln n = \lim\limits_{x\to\infty}\ln x = \infty$, donc $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge selon la sous-question a).

99. Soit $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ et $b_n = \dfrac{1}{n}$. Alors, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$, or $\sum b_n$ diverge, bien que $\sum a_n$ converge.

100. $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{1/n}$, donc utilisons le critère de comparaison par une limite avec $b_n = \dfrac{1}{n}$. Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n > 0$, nous savons que soit les deux séries convergent, soit les deux séries divergent, et nous savons également que $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ diverge [série p avec $p = 1$]. Par conséquent, $\sum a_n$ doit être divergente.

101. Nous observons d'abord que, selon la règle de L'Hospital, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+x} = 1$. De plus, si $\sum a_n$ converge, alors $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ selon le théorème 6.2.6. Par conséquent, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(1+a_n)}{a_n} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1 > 0$. Le problème spécifie que $\sum a_n$ est convergente et que $a_n > 0$. Par conséquent, $\sum \ln(1+a_n)$ est convergente selon le critère de comparaison par une limite.

102. Oui. Puisque $\sum a_n$ est une série convergente à termes positifs, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ selon le théorème 6.2.6. De plus, $\sum b_n = \sum \sin(a_n)$ est une série à termes positifs (lorsque n prend une valeur assez grande). Nous obtenons $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin(a_n)}{a_n} = 1 > 0$. Par conséquent, $\sum b_n$ est également convergente selon le critère de comparaison par une limite.

 © Groupe Modulo inc., 2013

103. Oui. Puisque $\sum a_n$ converge, ses termes s'approchent de 0 lorsque $n \to \infty$, donc pour un certain nombre entier N, $a_n \le 1$ pour tout $n \ge N$. Mais alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{N-1} a_n b_n + \sum_{n=N}^{\infty} a_n b_n \le \sum_{n=1}^{N-1} a_n b_n + \sum_{n=N}^{\infty} b_n$. Le premier terme est une somme finie et le second terme converge puisque $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge. Donc, $\sum a_n b_n$ converge, selon le critère de comparaison.

104. Selon la définition de récurrence, $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{5n+1}{4n+3}\right| = \dfrac{5}{4} > 1$, donc la série diverge, selon le critère de d'Alembert.

105. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1/(n+1)^3}{1/n^3}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3}{(n+1)^3} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(1+1/n)^3} = 1$. Le critère de d'Alembert ne permet pas de conclure.

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(n+1)}{2^{n+1}}\cdot\dfrac{2^n}{n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n}\right) = \dfrac{1}{2}$. Le critère de d'Alembert permet de conclure que la série est convergente.

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\sqrt{n+1}}{1+(n+1)^2}\cdot\dfrac{1+n^2}{\sqrt{n}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}\cdot\dfrac{1/n^2+1}{1/n^2+(1+1/n)^2}\right] = 1$. Le critère de d'Alembert ne permet pas de conclure.

106. Appliquons le critère de d'Alembert :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{[(n+1)!]^2/[k(n+1)]!}{(n!)^2/(kn)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2}{[k(n+1)][k(n+1)-1]\cdots[kn+1]}\right|$$

Or, si $k = 1$, alors ceci est égal à $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(n+1)^2}{(n+1)}\right| = \infty$, donc la série diverge; si $k = 2$, la limite est $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}\right| = \dfrac{1}{4} < 1$, donc la série converge; finalement, si $k > 2$, alors la plus haute puissance de n dans le dénominateur est supérieure à 2 et donc, la limite est 0, ce qui montre la convergence. La série converge donc pour $k \ge 2$.

107. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\dfrac{n!}{x^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x}{n+1}\right| = |x|\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1} = |x|\cdot 0 = 0 < 1$, donc, selon le critère de d'Alembert, la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ converge pour tout x.

b) Puisque la série à la sous-question a) converge toujours, il en découle que $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{n!} = 0$, selon le théorème 6.2.7.

108. a)
$$\begin{aligned}
R_n &= a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} + \cdots = a_{n+1}\left(1 + \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+3}}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+4}}{a_{n+1}} + \cdots\right)\\
&= a_{n+1}\left(1 + \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+3}}{a_{n+2}}\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+4}}{a_{n+3}}\frac{a_{n+3}}{a_{n+2}}\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} + \cdots\right)\\
&= a_{n+1}(1 + r_{n+1} + r_{n+2}r_{n+1} + r_{n+3}r_{n+2}r_{n+1} + \cdots)(*)\\
&\le a_{n+1}\left(1 + r_{n+1} + r_{n+1}^2 + r_{n+1}^3 + \cdots\right) \quad [\text{puisque } \{r_n\} \text{ est décroissante}] = \frac{a_{n+1}}{1 - r_{n+1}}
\end{aligned}$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

b) On remarque que, puisque $\{r_n\}$ est croissante et $r_n \to L$ lorsque $n \to \infty$, nous obtenons $r_n < L$ pour tout n. Donc, en commençant par l'égalité (*), $R_n = a_{n+1}(1 + r_{n+1} + r_{n+2}r_{n+1} + r_{n+3}r_{n+2}r_{n+1} + \cdots) \le a_{n+1}(1 + L + L^2 + L^3 + \cdots) = \dfrac{a_{n+1}}{1-L}$.

109. a) $s_5 = \displaystyle\sum_{n=1}^{5} \frac{1}{n2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{64} + \frac{1}{160} = \frac{661}{960} \approx 0{,}688\,54$. Or, les quotients $r_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n2^n}{(n+1)2^{n+1}} = \dfrac{n}{2(n+1)}$ forment une suite croissante, puisque $r_{n+1} - r_n = \dfrac{n+1}{2(n+2)} - \dfrac{n}{2(n+1)} = \dfrac{(n+1)^2 - n(n+2)}{2(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{2(n+1)(n+2)} > 0$. Donc, selon l'exercice 105 b), l'erreur générée en utilisant s_5 est $R_5 \le \dfrac{a_6}{1 - \lim\limits_{n\to\infty} r_n} = \dfrac{1/(6 \cdot 2^6)}{1 - 1/2} = \dfrac{1}{192} \approx 0{,}005\,21$.

b) L'erreur générée en utilisant s_n comme approximation de la somme est $R_n = \dfrac{a_{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \dfrac{2}{(n+1)2^{n+1}}$. Nous voulons que $R_n < 0{,}000\,05 \iff \dfrac{1}{(n+1)2^n} < 0{,}000\,05 \iff (n+1)2^n > 20\,000$. Nous pouvons trouver un plus petit n par un processus de tâtonnement ou à l'aide d'un graphique. Nous calculons que $(11 + 1)2^{11} = 24\,576$, donc $s_{11} = \displaystyle\sum_{n=1}^{11} \frac{1}{n2^n} \approx 0{,}693\,109$ est à moins de 0,000 05 près de la somme réelle.

110. $s_{10} = \displaystyle\sum_{n=1}^{10} \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \cdots + \frac{10}{1024} \approx 1{,}988$. Les quotients $r_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \dfrac{2^n}{n} = \dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ forment une suite décroissante et $r_{11} = \dfrac{11+1}{2(11)} = \dfrac{12}{22} = \dfrac{6}{11} < 1$, donc, selon l'exercice 108a), l'erreur générée en utilisant s_{10} comme approximation de la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ est $R_{10} \le \dfrac{a_{11}}{1 - r_{11}} = \dfrac{\frac{11}{2048}}{1 - \frac{6}{11}} = \dfrac{121}{10\,240} \approx 0{,}011\,8$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

6.4 Les séries alternées

1. a) Une série alternée est une série à termes alternativement positifs et négatifs.

b) Une série alternée $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$, où $b_n = |a_n|$, converge si $0 < b_{n+1} \le b_n$ pour tout n et $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. (Ceci constitue le critère des séries alternées.)

c) L'erreur découlant de l'utilisation de la somme partielle s_n comme approximation de la somme totale s est égale au $R_n = s - s_n$ et cette erreur est inférieure à b_{n+1}, c'est-à-dire $|R_n| \le b_{n+1}$. (Ceci constitue le théorème d'estimation des séries alternées.)

2. $\frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \frac{2}{7} - \frac{2}{9} + \frac{2}{11} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{2n+1}$. Or, $b_n = \frac{2}{2n+1} > 0$, $\{b_n\}$ est décroissante et $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$; la série converge donc, selon le critère des séries alternées.

3. $-\frac{2}{5} + \frac{4}{6} - \frac{6}{7} + \frac{8}{8} - \frac{10}{9} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n}{n+4}$. Or, $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1+4/n} = \frac{2}{1} \ne 0$. Puisque $\lim_{n\to\infty} a_n \ne 0$ (en fait, cette limite n'existe pas), la série diverge, selon le critère de divergence.

4. $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Or, $b_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} > 0$, $\{b_n\}$ est décroissante et $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$; la série converge donc, selon le critère des séries alternées.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$. Or, $b_n = \frac{1}{2n+1} > 0$, $\{b_n\}$ est décroissante et $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$; la série converge donc, selon le critère des séries alternées.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\ln(n+4)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$. Or, $b_n = \frac{1}{\ln(n+4)} > 0$, $\{b_n\}$ est décroissante et $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$; la série converge donc, selon le critère des séries alternées.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n-1}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$. Or, $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3-1/n}{2+1/n} = \frac{3}{2} \ne 0$. Puisque $\lim_{n\to\infty} a_n \ne 0$ (en fait, cette limite n'existe pas), la série diverge, selon le critère de divergence.

8. $b_n = \frac{n}{\sqrt{n^3+2}} > 0$ pour $n \ge 1$. $\{b_n\}$ est décroissante pour $n \ge 2$ puisque

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^3+2}}\right)' = \frac{(x^3+2)^{1/2}(1) - x \cdot \frac{1}{2}(x^3+2)^{-1/2}(3x^2)}{\left(\sqrt{x^3+2}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}(x^3+2)^{-1/2}[2(x^3+2) - 3x^3]}{(x^3+2)^1} = \frac{4-x^3}{2(x^3+2)^{3/2}} < 0 \text{ pour } x > \sqrt[3]{4} \approx 1{,}6 \text{ . De}$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

plus, $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n/n}{\sqrt{n^3+2}/\sqrt{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2/n^2}} = 0$. Par conséquent, la série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^3+2}}$ converge, selon le critère des séries alternées.

9. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$. Or, $b_n = \frac{1}{e^n} > 0$, $\{b_n\}$ est décroissante et $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$; la série converge donc, selon le critère des séries alternées.

10. $b_n = \frac{\sqrt{n}}{2n+3} > 0$ pour $n \geq 1$. $\{b_n\}$ est décroissante pour $n \geq 2$ puisque

$\left(\frac{\sqrt{x}}{2x+3}\right)' = \frac{(2x+3)(\frac{1}{2}x^{-1/2}) - x^{1/2}(2)}{(2x+3)^2} = \frac{\frac{1}{2}x^{-1/2}[(2x+3)-4x]}{(2x+3)^2} = \frac{3-2x}{2\sqrt{x}(2x+3)^2} < 0$ pour $x > \frac{3}{2}$. De plus,

$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}/\sqrt{n}}{(2n+3)/\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}+3/\sqrt{n}} = 0$. Par conséquent, la série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{2n+3}$ converge, selon le critère des séries alternées.

11. $b_n = \frac{n^2}{n^3+4} > 0$ pour $n \geq 1$. $\{b_n\}$ est décroissante pour $n \geq 2$ puisque

$\left(\frac{x^2}{x^3+4}\right)' = \frac{(x^3+4)(2x) - x^2(3x^2)}{(x^3+4)^2} = \frac{x(2x^3+8-3x^3)}{(x^3+4)^2} = \frac{x(8-x^3)}{(x^3+4)^2} < 0$ pour $x > 2$. De plus, $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1+4/n^3} = 0$. Par conséquent, la série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+4}$ converge, selon le critère des séries alternées.

12. $b_n = ne^{-n} = \frac{n}{e^n} > 0$ pour $n \geq 1$. $\{b_n\}$ est décroissante pour $n \geq 1$ puisque $(xe^{-x})' = x(-e^{-x}) + e^{-x} = e^{-x}(1-x) < 0$ pour $x > 1$. De plus, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ puisque $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$. Par conséquent, la série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} ne^{-n}$ converge, selon le critère des séries alternées.

13. $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} e^{2/n} = e^0 = 1$, donc $\lim_{n\to\infty} (-1)^{n-1} e^{2/n}$ n'existe pas. Par conséquent, la série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{2/n}$ diverge, selon le critère de divergence.

14. $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \arctan n = \frac{\pi}{2}$, donc $\lim_{n\to\infty} (-1)^{n-1} \arctan n$ n'existe pas. Par conséquent, la série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \arctan n$ diverge, selon le critère de divergence.

 © Groupe Modulo inc., 2013

15. $a_n = \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})\pi}{1+\sqrt{n}} = \dfrac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}$. Or, $b_n = \dfrac{1}{1+\sqrt{n}} > 0$ pour $n \geq 0$, $\{b_n\}$ est décroissante et $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, donc la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\pi}{1+\sqrt{n}}$ converge, selon le critère des séries alternées.

16. $a_n = \dfrac{n\cos n\pi}{2^n} = (-1)^n \dfrac{n}{2^n} = (-1)^n b_n$. $\{b_n\}$ est décroissante pour $n \geq 2$ puisque $(x2^{-x})' = x(-2^{-x}\ln 2) + 2^{-x} = 2^{-x}(1 - x\ln 2) < 0$ pour $x > \dfrac{1}{\ln 2}[\approx 1,4]$. De plus, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ puisque $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{2^x} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{2^x \ln 2} = 0$. Par conséquent, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos n\pi}{2^n}$ converge, selon le critère des séries alternées.

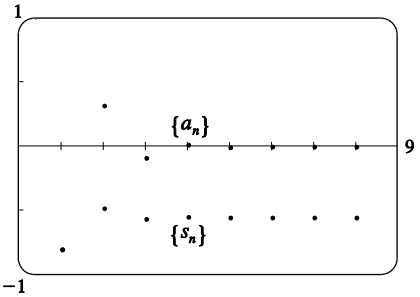
17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$. $b_n = \sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right) > 0$ pour $n \geq 2$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right) \geq \sin\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right) = \sin 0 = 0$; la série converge donc, selon le critère des séries alternées.

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$. $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right) = \cos(0) = 1$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$ n'existe pas et la série diverge, selon le critère de divergence.

19. $\dfrac{n^n}{n!} = \dfrac{n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n} \geq n \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^n}{n!} = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n n^n}{n!}$ n'existe pas. La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^n}{n!}$ diverge donc, selon le critère de divergence.

20. $b_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{1} \cdot \dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} > 0$ pour $n \geq 1$. $\{b_n\}$ est décroissante et $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, donc la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ converge, selon le critère des séries alternées.

21.



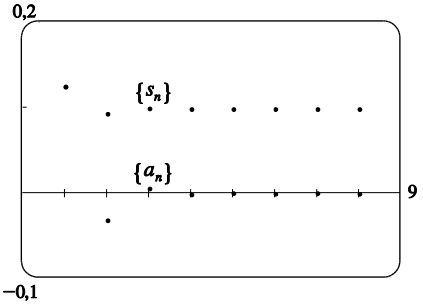
L'approximation de la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-0,8)^n}{n!}$ obtenue graphiquement est −0,55. $b_8 = \dfrac{(0,8)^n}{8!} \approx 0,000\ 004$, donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-0,8)^n}{n!} \approx s_7 = \sum_{n=1}^{7} \frac{(-0,8)^n}{n!}$$
$$\approx -0,8 + 0,32 - 0,085\ \overline{3} + 0,017\ 0\overline{6} - 0,002\ 731 + 0,000\ 364 - 0,000\ 042 \approx -0,550\ 7$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

L'addition de b_8 à s_7 ne change pas la quatrième décimale de s_7; la somme de la série, avec quatre décimales exactes, est donc −0,550 7.

22.



L'approximation de la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{8^n}$ obtenue graphiquement est 0,1. $b_6 = \frac{6}{8^6} \approx 0,000\ 023$, donc

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{8^n} \approx s_5 = \sum_{n=1}^{5}(-1)^{n-1}\frac{n}{8^n}$$
$$\approx 0,125 - 0,031\ 25 + 0,005\ 859 - 0,000\ 977 + 0,000\ 153 \approx 0,098\ 8$$

L'addition de b_6 à s_5 ne change pas la quatrième décimale de s_5; la somme de la série, avec quatre décimales exactes, est donc 0,098 8.

23. La série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^6}$ satisfait à la condition i) du critère des séries alternées parce que $\frac{1}{(n+1)^6} < \frac{1}{n^6}$, ainsi qu'à la condition ii), $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^6} = 0$. La série est donc convergente. Or, $b_5 = \frac{1}{5^6} = 0,000\ 064 > 0,000\ 05$ et $b_6 = \frac{1}{6^6} \approx 0,000\ 02 < 0,000\ 05$, donc, selon le théorème d'estimation des séries alternées, $n = 5$. (Ceci revient à dire que, puisque le 6ième terme est inférieur à l'erreur recherchée, il suffit d'additionner les 5 premiers termes pour obtenir la somme avec le degré de précision désiré.)

24. La série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n5^n}$ satisfait à la condition i) du critère des séries alternées parce que $\frac{1}{(n+1)^{5n+1}} < \frac{1}{n5^n}$, ainsi qu'à la condition ii), $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n5^n} = 0$. La série est donc convergente. Or, $b_4 = \frac{1}{4\cdot 5^4} = 0,0004 > 0,0001$ et $b_5 = \frac{1}{5\cdot 5^5} = 0,000\ 064 < 0,0001$, donc, selon le théorème d'estimation des séries alternées, $n = 4$. (Ceci revient à dire que, puisque le 5ième terme est inférieur à l'erreur recherchée, il suffit d'additionner les 4 premiers termes pour obtenir la somme avec le degré de précision désiré.)

25. La série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{10^n n!}$ satisfait à la condition i) du critère des séries alternées parce que $\frac{1}{10^{n+1}(n+1)!} < \frac{1}{10^n n!}$, ainsi qu'à la condition ii), $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{10^n n!} = 0$. La série est donc convergente. Or, $b_3 = \frac{1}{10^3 3!} \approx 0,000\ 167 > 0,000\ 005$ et $b_4 = \frac{1}{10^4 4!} = 0,000\ 004 < 0,000\ 005$, donc, selon le théorème d'estimation des séries alternées, $n = 4$ (puisque la série commence par $n = 0$ et non $n = 1$). (Ceci revient à dire

 © Groupe Modulo inc., 2013

que, puisque le 5ième terme est inférieur à l'erreur recherchée, il suffit d'additionner les 4 premiers termes pour obtenir la somme avec le degré de précision désiré.)

26. La série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}ne^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{e^n}$ satisfait à la condition i) de le critère des séries alternées parce que

$\left(\frac{x}{e^x}\right)'=\frac{e^x(1)-xe^x}{(e^x)^2}=\frac{e^x(1-x)}{(e^x)^2}=\frac{1-x}{e^x}<0$ pour $x>1$, ainsi qu'à la condition ii), $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{e^n}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0$. La série est donc convergente. Or, $b_6=6/e^6\approx 0{,}015>0{,}01$ et $b_7=7/e^7\approx 0{,}006<0{,}01$, donc, selon le théorème d'estimation des séries alternées, $n=6$. (Ceci revient à dire que, puisque le 7ième terme est inférieur à l'erreur recherchée, il suffit d'additionner les 6 premiers termes pour obtenir la somme avec le degré de précision désiré.)

27. $b_4=\frac{1}{8!}=\frac{1}{40\,320}\approx 0{,}000\ 025$, donc

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\approx s_3=\sum_{n=1}^{3}\frac{(-1)^n}{(2n)!}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{24}-\frac{1}{720}\approx -0{,}459\ 722$$

L'addition de b_4 à s_3 ne change pas la quatrième décimale de s_3, donc, selon le théorème d'estimation des séries alternées, la somme de la série, avec quatre décimales exactes, est −0,4597.

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^6}\approx s_9=\frac{1}{1^6}-\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}-\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}-\frac{1}{6^6}+\frac{1}{7^6}-\frac{1}{8^6}+\frac{1}{9^6}\approx 0{,}985\ 552$. Le fait de soustraire $b_{10}=1/10^6$ de s_9 ne change pas la quatrième décimale de s_9, donc, selon le théorème d'estimation des séries alternées, la somme de la série, avec quatre décimales exactes, est 0,9856.

29. $b_7=\frac{7^2}{10^7}=0{,}000\ 0049$, donc

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n^2}{10^n}\approx s_6=\sum_{n=1}^{6}\frac{(-1)^{n-1}n^2}{10^n}=\tfrac{1}{10}-\tfrac{4}{100}+\tfrac{9}{1000}-\tfrac{16}{10\,000}+\tfrac{25}{100\,000}-\tfrac{36}{1\,000\,000}=0{,}067\ 614$$

L'addition de b_7 à s_6 ne change pas la quatrième décimale de s_6, donc, selon le théorème d'estimation des séries alternées, la somme de la série, avec quatre décimales exactes, est 0,0676.

30. $b_6=\frac{1}{3^6\cdot 6!}=\frac{1}{524\,880}\approx 0{,}000\ 001\ 9$, donc

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n n!}\approx s_5=\sum_{n=1}^{5}\frac{(-1)^n}{3^n n!}=-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{18}-\tfrac{1}{162}+\tfrac{1}{1944}-\tfrac{1}{29160}\approx -0{,}283\ 471$$

L'addition de b_6 à s_5 ne change pas la quatrième décimale de s_5, donc, selon le théorème d'estimation des séries alternées, la somme de la série, avec quatre décimales exactes, est −0,2835.

 © Groupe Modulo inc., 2013

31. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{49}-\frac{1}{50}+\frac{1}{51}-\frac{1}{52}+\cdots$. La $50^{\text{ième}}$ somme partielle de la série est une sous-estimation puisque $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=s_{50}+\left(\frac{1}{51}-\frac{1}{52}\right)+\left(\frac{1}{53}-\frac{1}{54}\right)+\cdots$ et que les termes entre parenthèses sont tous positifs. On peut voir le résultat de façon géométrique à la figure 1.

32. Si $p>0$, $\frac{1}{(n+1)^p}\le\frac{1}{n^p}$ ($\{1/n^p\}$ est décroissante) et $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^p}=0$; la série converge donc, selon le critère des séries alternées. Si $p\le 0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ n'existe pas; la série diverge donc, selon le critère de divergence. Par conséquent, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ converge $\Leftrightarrow$ $p>0$.

33. De toute évidence, $b_n=\frac{1}{n+p}$ est décroissante et devient éventuellement positive et $\lim_{n\to\infty}b_n=0$ pour tout p. La série converge donc (selon le critère des séries alternées) pour tout p pour lequel chaque b_n est défini, c'est-à-dire $n+p\neq 0$ pour $n\ge 1$, ou encore p n'est pas un nombre entier négatif.

34. Soit $f(x)=\frac{(\ln x)^p}{x}$. Alors, $f'(x)=\frac{(\ln x)^{p-1}(p-\ln x)}{x^2}<0$ si $x>e^p$, donc f devient éventuellement décroissante pour chaque p. De toute évidence, $\lim_{n\to\infty}\frac{(\ln n)^p}{n}=0$ si $p\le 0$, et si $p>0$, nous pouvons appliquer le critère de l'Hospital $p+1$ fois pour arriver également à une limite de 0. La série converge donc pour tout p (selon le critère des séries alternées).

35. De toute évidence, $\sum b_{2n}=\sum 1/(2n)^2$ converge (par comparaison avec la série p pour $p=2$). Supposons donc que $\sum(-1)^{n-1}b_n$ converge. Alors, selon le théorème 6.2.8 ii), $\sum[(-1)^{n-1}b_n+b_n]=2(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots)=2\sum\frac{1}{2n-1}$ converge également. Cette série diverge toutefois, par comparaison avec la série harmonique, ce qui résulte en une contradiction. Par conséquent, $\sum(-1)^{n-1}b_n$ doit diverger. Le critère des séries alternées ne s'applique pas puisque $\{b_n\}$ n'est pas décroissante.

36. a) Démontrons ceci par induction. Soit P_n la proposition $s_{2n}=h_{2n}-h_n$. P_1, la proposition $s_2=h_2-h_1$, est vraie puisque $1-\frac{1}{2}=(1+\frac{1}{2})-1$. Maintenant, supposons que P_n est vraie. Nous allons démontrer qu'en conséquence, P_{n+1} doit être vraie.

$$\begin{aligned}h_{2n+2}-h_{n+1}&=\left(h_{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}\right)-\left(h_n+\frac{1}{n+1}\right)=(h_{2n}-h_n)+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\\&=s_{2n}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}=s_{2n+2}\end{aligned}$$

ce qui est P_{n+1} et ce qui démontre que $s_{2n}=h_{2n}-h_n$ pour tout n.

 © Groupe Modulo inc., 2013

b) Nous savons que $h_{2n} - \ln(2n) \to \gamma$ et $h_n - \ln n \to \gamma$ lorsque $n \to \infty$.

Donc, $s_{2n} = h_{2n} - h_n = [h_{2n} - \ln(2n)] - (h_n - \ln n) + [\ln(2n) - \ln n]$

et $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = \gamma - \gamma + \lim\limits_{n\to\infty}[\ln(2n) - \ln n] = \lim\limits_{n\to\infty}(\ln 2 + \ln n - \ln n) = \ln 2$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

6.5 La convergence absolue et conditionnelle

1. a) Puisque $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 8 > 1$, la série $\sum a_n$ diverge, selon la partie b) du critère généralisé de d'Alembert.

b) Puisque $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0{,}8 < 1$, la série $\sum a_n$ converge absolument (et, par conséquent, converge), selon la partie a) du critère généralisé de d'Alembert.

c) Puisque $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, le critère généralisée de d'Alembert ne permet pas de conclure; la série $\sum a_n$ pourrait converger ou diverger.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(-2)^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\dfrac{n^2}{(-2)^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|(-2)\dfrac{n^2}{(n+1)^2}\right| = 2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(1+1/n)^2} = 2(1) = 2 > 1$, donc la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-2)^n}{n^2}$ diverge, selon le critère généralisé de d'Alembert.

3. $b_n = \dfrac{n}{n^2+4} > 0$ pour $n \geq 1$, $\{b_n\}$ est décroissante pour $n \geq 2$ et $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, donc $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{n^2+4}$ converge, selon le critère des séries alternées. Pour déterminer si la série converge absolument, choisissons $a_n = \dfrac{1}{n}$ afin d'obtenir

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1/n}{n/(n^2+4)} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+4}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+4/n^2}{1} = 1 > 0$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n^2+4}$ diverge donc selon le critère de comparaison par une limite avec la série harmonique. Par conséquent, la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{n^2+4}$ est conditionnellement convergente.

4. $b_n = \dfrac{1}{5n+1} > 0$ pour $n \geq 0$, $\{b_n\}$ est décroissante pour $n \geq 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, donc $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{5n+1}$ converge, selon le critère des séries alternées. Pour déterminer si la série converge absolument, choisissons $a_n = \dfrac{1}{n}$ afin d'obtenir

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1/n}{1/(5n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n+1}{n} = 5 > 0$. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{5n+1}$ diverge donc, selon le critère de comparaison par une limite avec la série harmonique. Par conséquent, la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{5n+1}$ est conditionnellement convergente.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(-3)^{n+1}}{[2(n+1)+1]!}\cdot\dfrac{(2n+1)!}{(-3)^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|(-3)\dfrac{1}{(2n+3)(2n+2)}\right| = 3\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(2n+3)(2n+2)}$
$= 3(0) = 0 < 1$

 © Groupe Modulo inc., 2013

donc la série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{(2n+1)!}$ converge absolument, selon le critère généralisé de d'Alembert.

6. $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(1,1)^{n+1}}{(n+1)^4}\cdot\frac{n^4}{(1,1)^n}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{(1,1)n^4}{(n+1)^4} = (1,1)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{(n+1)^4}{n^4}} = (1,1)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+1/n)^4}$

$= (1,1)(1) = 1,1 > 1,$

donc la série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(1,1)^n}{n^4}$ diverge, selon le critère généralisé de d'Alembert.

7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{\sqrt{n^3+2}}$ diverge, selon le critère des séries alternées (voir l'exercice 6.4.8). Soit $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, avec $b_n = \frac{n}{\sqrt{n^3+2}}$. Alors,

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{\sqrt{n^3+2}}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3+2}}{\sqrt{n^3}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{n^3}} = 1 > 0$. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^3+2}}$ diverge donc, selon le critère de comparaison par une

limite avec la série p divergente $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}[p = \frac{1}{2} \le 1]$. Par conséquent, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{\sqrt{n^3+2}}$ est conditionnellement convergente.

8. Puisque $0 \le \frac{e^{1/n}}{n^3} \le \frac{e}{n^3} = e\left(\frac{1}{n^3}\right)$ et $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ est une série p convergente [$p = 3 > 1$], $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{1/n}}{n^3}$ converge et $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{1/n}}{n^3}$ est donc absolument

convergente.

9. $\left|\frac{\sin 4n}{4^n}\right| \le \frac{1}{4^n}$, donc $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 4n}{4^n}$ converge par comparaison avec la série géométrique convergente $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}[|r| = \frac{1}{4} < 1]$. Par

conséquent, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 4n}{4^n}$ est absolument convergente.

10. $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^{10}}{(-10)^{n+2}}\cdot\frac{(-10)^{n+1}}{n^{10}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{-10}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{10}\right| = \frac{1}{10}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10} = \frac{1}{10}(1) = \frac{1}{10} < 1$, donc la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{10}}{(-10)^{n+1}}$ est

absolument convergente, selon le critère généralisé de d'Alembert.

11. $\left|\frac{(-1)^n \arctan n}{n^2}\right| < \frac{\pi/2}{n^2}$, donc puisque $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi/2}{n^2} = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ converge ($p = 2 > 1$), la série donnée $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \arctan n}{n^2}$ est absolument

convergente, selon le critère de comparaison.

12. $n^{2/3} - 2 > 0$ pour $n \ge 3$, donc $\frac{3-\cos n}{n^{2/3}-2} > \frac{1}{n^{2/3}-2} > \frac{1}{n^{2/3}}$ pour $n \ge 3$. Puisque $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2/3}}$ diverge $[p = \frac{2}{3} \le 1]$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3-\cos n}{n^{2/3}-2}$ diverge

également, selon le critère de comparaison.

 © Groupe Modulo inc., 2013

13. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$ converge, selon le critère des séries alternées, puisque $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}=0$ et $\left\{\frac{1}{\ln n}\right\}$ est décroissante. Or, $\ln n < n$, donc $\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}$ et puisque $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ est la série harmonique (partielle) divergente, $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ diverge, selon le critère de comparaison. Par conséquent, $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$ est conditionnellement convergente.

14. $\frac{|\cos(n\pi/3)|}{n!}\le\frac{1}{n!}$ et $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ converge (selon le critère généralisé de d'Alembert), donc la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi/3)}{n!}$ est absolument convergente, selon le critère de comparaison.

15. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-2)^n}{n^n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0<1$, donc la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n^n}$ est absolument convergente, selon le critère généralisé de Cauchy.

16. $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\left(\frac{-2n}{n+1}\right)^{5n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^5n^5}{(n+1)^5}=32\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^5}=32\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+1/n)^5}$$
$$=32(1)=32>1,$$
donc la série $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{-2n}{n+1}\right)^{5n}$ est divergente, selon le critère généralisé de Cauchy.

17. Appliquons le critère généralisé de d'Alembert avec la série

$$1-\frac{1\cdot3}{3!}+\frac{1\cdot3\cdot5}{5!}-\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{7!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{(2n-1)!}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{(2n-1)!}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)[2(n+1)-1]}{[2(n+1)-1]!}\cdot\frac{(2n-1)!}{(-1)^{n-1}\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}\right|$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)(2n+1)(2n-1)!}{(2n+1)(2n)(2n-1)!}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0<1,$$

donc la série donnée est absolument convergente et, par conséquent, convergente.

18. $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{5\cdot8\cdot11\cdot\cdots\cdot(3n+5)}}{\frac{2^n n!}{5\cdot8\cdot11\cdot\cdots\cdot(3n+2)}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)}{3n+5}=\frac{2}{3}<1$, donc la série converge absolument, selon le critère généralisé de d'Alembert.

 © Groupe Modulo inc., 2013

19. Selon la définition de récurrence, $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{2+\cos n}{\sqrt{n}}\right| = 0 < 1$, donc la série converge absolument, selon le critère généralisé de d'Alembert.

20. La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n^n\cos n\pi}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{b_n^n}{n}$, où $b_n > 0$ pour $n \geq 1$ et $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \dfrac{1}{2}$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(-1)^{n+1}b_n^{n+1}}{n+1}\cdot\dfrac{n}{(-1)^n b_n^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} b_n\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{2}(1) = \dfrac{1}{2} < 1$, donc la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n^n\cos n\pi}{n}$ est absolument convergente, selon le critère généralisé de d'Alembert.

21. $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}b_1b_2\cdots b_n b_{n+1}}\cdot\frac{n^n b_1b_2\cdots b_n}{(-1)^n n!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)(n+1)n^n}{b_{n+1}(n+1)^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{b_{n+1}(n+1)^n}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_{n+1}}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_{n+1}}\left(\frac{1}{1+1/n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_{n+1}(1+1/n)^n} = \frac{1}{\frac{1}{2}e} = \frac{2}{e} < 1$$

donc la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{n^n b_1b_2b_3\cdots b_n}$ est absolument convergente, selon le critère généralisé de d'Alembert.

22. a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(-2)^{n+1}}{(n+1)^3+1}\cdot\dfrac{n^3+1}{(-2)^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(-2)\left(n^3+1\right)}{\left(n+1\right)^3+1}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\left(1+1/n^3\right)}{1+3/n+3/n^2+1/n^3} = 2$. Concluant (divergente).

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(n+1)}{2^{n+1}(-3)^{n+1}}\cdot\dfrac{2^n(-3)^n}{n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n+1}{2(-3)n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{6}+0\right) = \dfrac{1}{6}$. Concluant (convergente).

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(-3)^n}{\sqrt{n+1}}\cdot\dfrac{\sqrt{n}}{(-3)^{n-1}}\right| = 3\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n}{n+1}} = 3\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{1}{1+1/n}} = 3$. Concluant (divergente).

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\sin\left(\left(2\left(n+1\right)+1\right)\frac{\pi}{2}\right)\sqrt{n+1}}{1+(n+1)^2}\cdot\dfrac{1+n^2}{\sin\left(\left(2n+1\right)\frac{\pi}{2}\right)\sqrt{n}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}\cdot\dfrac{1/n^2+1}{1/n^2+(1+1/n)^2}\right] = 1$. Ne permet pas de conclure.

23.

i) Selon la suggestion dans l'exercice, nous trouvons que $|a_n| < r^n$ pour $n \geq N$ et donc, puisque la série géométrique $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ converge [$0 < r < 1$], la série $\sum_{n=N}^{\infty}|a_n|$ converge également, selon le critère de comparaison et, par conséquent, $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ converge également. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *an* est donc absolument convergente.

ii) Si $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$, alors il existe un nombre entier N tel que $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$ pour tout $n \geq N$, donc $|a_n| > 1$ pour $n \geq N$. Par conséquent, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, donc $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, selon le critère de divergence.

 © Groupe Modulo inc., 2013

iii) Étudions $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ [qui diverge] et $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ [qui converge]. Pour chaque somme, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=1$, donc le critère généralisé de Cauchy ne permet pas de conclure.

24. a)
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{[4(n+1)!][1103+26\,390(n+1)]}{[(n+1)!]^4 396^{4(n+1)}}\cdot\frac{(n!)^4 396^{4n}}{(4n)!(1103+26\,390n)}\right|$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)(26\,390n+27\,493)}{(n+1)^4 396^4(26\,390n+1103)} = \frac{4^4}{396^4} = \frac{1}{99^4} < 1,$$

donc, selon le critère généralisé de d'Alembert, la série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!(1103+26\,390n)}{(n!)^4 396^{4n}}$ converge.

b) $$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!(1103+26\,390n)}{(n!)^4 396^{4n}}$$

En utilisant le premier terme ($n = 0$), $\frac{1}{\pi}\approx\frac{2\sqrt{2}}{9801}\cdot\frac{1103}{1}$ $\Rightarrow$ $\pi\approx 3{,}141\ 592\ 73$; nous obtenons donc 6 décimales exactes pour π, qui est 3,141 592 653 589 793 238 lorsque calculé à 18 décimales près.

En ajoutant le deuxième terme ($n = 1$), $\frac{1}{\pi}\approx\frac{2\sqrt{2}}{9801}\left(\frac{1103}{1}+\frac{4!(1103+26\,390)}{396^4}\right)$ $\Rightarrow$ $\pi\approx 3{,}141\ 592\ 653\ 589\ 793\ 878$; nous obtenons donc 15 décimales exactes pour π.

25. a) Puisque $\sum a_n$ est absolument convergente et puisque $|a_n^+|\le|a_n|$ et $|a_n^-|\le|a_n|$ (parce que a_n^+ et a_n^- sont toutes deux égales à a_n ou à 0), nous concluons, selon le critère de comparaison, que $\sum a_n^+$ et $\sum a_n^-$ doivent toutes deux être absolument convergentes.

Autre méthode : Appliquer le théorème 6.2.8.

b) Nous allons démontrer par contradiction que $\sum a_n^+$ et $\sum a_n^-$ doivent diverger. Supposons que $\sum a_n^+$ converge.

Alors, $\sum(a_n^+ - \frac{1}{2}a_n)$ le ferait également, selon le théorème 6.2.8. Cependant, $\sum(a_n^+ - \frac{1}{2}a_n) = \sum[\frac{1}{2}(a_n+|a_n|) - \frac{1}{2}a_n] = \frac{1}{2}\sum|a_n|$, qui diverge parce que $\sum a_n$ n'est que simplement convergente. Par conséquent, $\sum a_n^+$ ne peut converger, ni $\sum a_n^-$, d'ailleurs.

26. Posons que $\sum b_n$ est la série réarrangée proposée dans la suggestion. [Cette série peut être construite en se servant du résultat de l'exercice 25 b).] Cette série présente des sommes partielles s_n dont la valeur oscille de part et d'autre de r. Puisque $\lim_{n\to\infty}a_n = 0$ (selon le théorème 6.2.6) et puisque la taille des oscillations $|s_n - r|$ est toujours inférieure à $|a_n|$ étant donné la façon dont $\sum b_n$ a été construite, nous trouvons que $\sum b_n = \lim_{n\to\infty}s_n = r$.

27. Supposons que $\sum a_n$ est conditionnellement convergente.

 © Groupe Modulo inc., 2013

a) $\sum n^2 a_n$ est divergente : Supposons que $\sum n^2 a_n$ converge. Alors, $\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = 0$ selon le théorème 6 à la section 6.2; il existe donc un nombre entier $N > 0$ tel que $n > N \Rightarrow n^2|a_n| < 1$. Pour $n > N$, nous obtenons $|a_n| < \frac{1}{n^2}$, donc $\sum_{n>N} |a_n|$ converge par comparaison avec la série p convergente $\sum_{n>N} \frac{1}{n^2}$. En d'autres termes, $\sum a_n$ converge absolument, ce qui contredit l'hypothèse que Σa_n est conditionnellement convergente. Cette contradiction démontre que $\sum n^2 a_n$ diverge. *Remarque :* Le même raisonnement démontre que $\sum n^p a_n$ diverge pour tout $p > 1$.

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$ est conditionnellment convergente. Elle converge, selon le critère des séries alternées, mais ne converge pas absolument $\left[\text{selon le critère de l'intégrale, puisque la fonction } f(x) = \frac{1}{x \ln x} \text{ est continue, positive et décroissante sur l'intervalle } [2,\infty[\text{ et } \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{t\to\infty} \int_2^t \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{t\to\infty} [\ln(\ln x)]_2^t = \infty\right]$. En posant $a_n = \frac{(-1)^n}{n \ln n}$ pour $n \geq 2$, nous obtenons que $\sum_{n=2}^{\infty} n a_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ converge, selon le critère des séries alternées.

Il est facile de trouver des séries conditionnellement convergentes $\sum a_n$ telles que $\sum n a_n$ diverge. Deux exemples sont $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$; ces deux séries convergent, selon le critère des séries alternées, mais ne convergent pas absolument parce que $\sum |a_n|$ est une série p avec $p \leq 1$. Dans les deux cas, $\sum n a_n$ diverge, selon le critère de divergence.

 © Groupe Modulo inc., 2013

6.6 Une stratégie pour déterminer la convergence ou la divergence d'une série

1. $\dfrac{1}{n+3^n} < \dfrac{1}{3^n} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ pour tout $n \geq 1$. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ est une série géométrique convergente $[|r| = \frac{1}{3} < 1]$, donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+3^n}$ converge, par comparaison.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\dfrac{(2n+1)^n}{n^{2n}}\right|} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right) = 0 < 1$, donc la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)^n}{n^{2n}}$ converge, selon le critère généralisé de Cauchy.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+2} = 1$, donc $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{n}{n+2}$ n'existe pas. Par conséquent, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+2}$ diverge, selon le critère de divergence.

4. $b_n = \dfrac{n}{n^2+2} > 0$ pour $n \geq 1$. $\{b_n\}$ est décroissante pour $n \geq 2$ puisque $\left(\dfrac{x}{x^2+2}\right)' = \dfrac{(x^2+2)(1)-x(2x)}{(x^2+2)^2} = \dfrac{2-x^2}{(x^2+2)^2} < 0$ pour $x \geq \sqrt{2}$. De plus, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^2+2} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1/n}{1+2/n^2} = 0$. Par conséquent, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+2}$ converge, selon le critère des séries alternées.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(n+1)^2 2^n}{(-5)^{n+1}}\cdot\dfrac{(-5)^n}{n^2 2^{n-1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(n+1)^2}{5n^2} = \dfrac{2}{5}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2 = \dfrac{2}{5}(1) = \dfrac{2}{5} < 1$, donc la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2 2^{n-1}}{(-5)^n}$ converge, selon le critère généralisé de d'Alembert.

6. Appliquons le critère de comparaison par une limite avec $a_n = \dfrac{1}{2n+1}$ et $b_n = \dfrac{1}{n}$: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2+(1/n)} = \dfrac{1}{2} > 0$. Puisque la série harmonique $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$ diverge également.

Autre solution : Utiliser le critère de l'intégrale.

7. Soit $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}}$. Alors, f est positive, continue et décroissante sur l'intervalle [2, ∞[; nous pouvons donc appliquer le critère de l'intégrale. Puisque $\displaystyle\int\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx \quad \begin{bmatrix} u = \ln x, \\ du = dx/x \end{bmatrix} = \int u^{-1/2}du = 2u^{1/2} + C = 2\sqrt{\ln x} + C$, nous obtenons $\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{t\to\infty}\int_2^t\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{t\to\infty}\left[2\sqrt{\ln x}\right]_2^t = \lim_{t\to\infty}\left(2\sqrt{\ln t} - 2\sqrt{\ln 2}\right) = \infty$. Puisque l'intégrale diverge, la série donnée $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ diverge.

 © Groupe Modulo inc., 2013

8. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k k!}{(k+2)!}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{(k+1)(k+2)}$. À l'aide du critère généralisé de d'Alembert, nous obtenons

$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{2^{k+1}}{(k+2)(k+3)}\cdot\frac{(k+1)(k+2)}{2^k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left(2\cdot\frac{k+1}{k+3}\right)=2>1$, donc la série diverge.

Autre solution : Appliquer le critère de divergence.

9. $\sum_{k=1}^{\infty}k^2e^{-k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{e^k}$. À l'aide du critère généralisé de d'Alembert, nous obtenons

$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k+1}{a_k}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)^2}{e^{k+1}}\cdot\frac{e^k}{k^2}\right|=\lim_{k\to\infty}\left[\left(\frac{k+1}{k}\right)^2\cdot\frac{1}{e}\right]=1^2\cdot\frac{1}{e}=\frac{1}{e}<1$, donc la série converge.

10. Soit $f(x)=x^2e^{-x^3}$. Alors, f est continue et positive sur l'intervalle [1, ∞[et $f'(x)=\frac{x(2-3x^3)}{e^{x^3}}<0$ pour $x\geq 1$, donc f est également décroissante sur l'intervalle [1, ∞[et nous pouvons appliquer le critère de l'intégrale. $\int_1^{\infty}x^2e^{-x^3}dx=\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{3}e^{-x^3}\right]_1^t=\frac{1}{3e}$, donc l'intégrale converge et, par conséquent, la série converge.

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^3}+\frac{1}{3^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$. La première série converge puisque c'est une série p avec $p = 3 > 1$ et la seconde série converge puisque c'est une série géométrique avec $|r|=\frac{1}{3}<1$. La somme de deux séries convergentes est convergente.

12. $\frac{1}{k\sqrt{k^2+1}}<\frac{1}{k\sqrt{k^2}}=\frac{1}{k^2}$, donc $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\sqrt{k^2+1}}$ converge par comparaison avec la série p convergente $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ ($p = 2 > 1$).

13. $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}(n+1)^2}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{3^n n^2}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{3(n+1)^2}{(n+1)n^2}=3\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2}=0<1$, donc la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n^2}{n!}$ converge, selon le critère généralisé de d'Alembert.

14. $\left|\frac{\sin 2n}{1+2^n}\right|\leq\frac{1}{1+2^n}<\frac{1}{2^n}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$, donc la série $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin 2n}{1+2^n}\right|$ converge par comparaison avec la série géométrique $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ avec $|r|=\frac{1}{2}<1$.

Il s'ensuit que la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n}{1+2^n}$ est absolument convergente et, par conséquent, convergente.

 © Groupe Modulo inc., 2013

15. $a_k = \dfrac{2^{k-1}3^{k+1}}{k^k} = \dfrac{2^k 2^{-1} 3^k 3^1}{k^k} = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{2\cdot 3}{k}\right)^k$. Selon le critère de Cauchy, $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left(\dfrac{6}{k}\right)^k} = \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{6}{k} = 0 < 1$, donc la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{6}{k}\right)^k$ converge. Il s'ensuit du théorème 8 i) à la section 6.2 que la série donnée, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k-1}3^{k+1}}{k^k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{3}{2}\left(\frac{6}{k}\right)^k$, converge également.

16. En utilisant le critère de comparaison par une limite avec $a_n = \dfrac{n^2+1}{n^3+1}$ et $b_n = \dfrac{1}{n}$, nous obtenons

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n^3+1}\cdot\dfrac{n}{1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+n}{n^3+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+1/n^2}{1+1/n^3} = 1 > 0$. Puisque $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ est la série harmonique divergente, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est également divergente.

17.
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)(2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\cdots\cdot(3n-1)(3n+2)}\cdot\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\cdots\cdot(3n-1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+2}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2+1/n}{3+2/n} = \frac{2}{3} < 1,$$
donc la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\cdots\cdot(3n-1)}$ converge, selon le critère généralisé de d'Alembert.

18. $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}-1}$ pour $n \geq 2$. $\{b_n\}$ est une suite décroissante de nombres positifs et $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, donc $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}-1}$ converge, selon le critère des séries alternées.

19. Soit $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$. Alors, $f'(x) = \dfrac{2-\ln x}{2x^{3/2}} < 0$ lorsque $\ln x > 2$ ou $x > e^2$, donc $\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$ est décroissante pour $n > e^2$. Selon la règle de l'Hospital, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1/n}{1/\left(2\sqrt{n}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{n}} = 0$, donc la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ converge, selon le critère des séries alternées.

20. $a_k = \dfrac{\sqrt[3]{k}-1}{k(\sqrt{k}+1)} < \dfrac{\sqrt[3]{k}}{k(\sqrt{k}+1)} < \dfrac{\sqrt[3]{k}}{k\sqrt{k}} = \dfrac{k^{1/3}}{k^{3/2}} = \dfrac{1}{k^{7/6}}$, donc la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{k}-1}{k(\sqrt{k}+1)}$ converge, par comparaison avec la série p convergente $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{7/6}}$ $\left(p = \frac{7}{6} > 1\right)$.

21. $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|(-1)^n\cos(1/n^2)\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\cos(1/n^2)\right| = \cos 0 = 1$, donc la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos(1/n^2)$ diverge, selon le critère de divergence.

22. $\lim\limits_{k\to\infty}|a_k| = \lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{1}{2+\sin k}\right| = \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{2+\sin k}$, laquelle n'existe pas (les termes varient entre $\frac{1}{3}$ et 1). Par conséquent, la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2+\sin k}$ diverge, selon le critère de divergence.

 © Groupe Modulo inc., 2013

23. En appliquant le critère de comparaison par une limite avec $a_n = \tan\left(\frac{1}{n}\right)$ et $b_n = \frac{1}{n}$, nous obtenons

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\tan(1/n)}{1/n} = \lim_{x\to\infty}\frac{\tan(1/x)}{1/x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\sec^2(1/x)\cdot(-1/x^2)}{-1/x^2} = \lim_{x\to\infty}\sec^2(1/x) = 1^2 = 1 > 0$. Puisque $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ est la série harmonique divergente, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ est également divergente.

24. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(n\sin\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin(1/n)}{1/n} = \lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x} = 1 \neq 0$ **,** donc la série $\sum_{n=1}^{\infty} n\sin(1/n)$ diverge, selon le critère de divergence.

25. Appliquons le critère généralisé de d'Alembert. $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{e^{(n+1)^2}}\cdot\frac{e^{n^2}}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)n!\cdot e^{n^2}}{e^{n^2+2n+1}n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{e^{2n+1}} = 0 < 1$, donc $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{e^{n^2}}$ converge.

26. $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+2n+2}{5^{n+1}}\cdot\frac{5^n}{n^2+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2/n+2/n^2}{1+1/n^2}\cdot\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5} < 1$, donc $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{5^n}$ converge, selon le critère généralisé de d'Alembert.

27. $\int_2^{\infty}\frac{\ln x}{x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right]_1^t$ [en intégrant par parties] $\overset{\text{H}}{=} 1$. Donc, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$ converge, selon le critère de l'intégrale et puisque $\frac{k\ln k}{(k+1)^3} < \frac{k\ln k}{k^3} = \frac{\ln k}{k^2}$, la série donnée $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\ln k}{(k+1)^3}$ converge, selon le critère de comparaison.

28. Puisque $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ est une suite décroissante, $e^{1/n} \le e^{1/1} = e$ pour tout $n \ge 1$ et $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e}{n^2}$ converge ($p = 2 > 1$); $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{1/n}}{n^2}$ converge donc, selon le critère de comparaison.

Autre solution : Utiliser le critère de l'intégrale.

29. $|a_n| = \frac{1}{e^n + e^{-n}} < \frac{1}{e^n}$ et $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^n}$ est une série géométrique convergente; $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{e^n + e^{-n}}$ est donc convergente, selon le critère de comparaison. Donc, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{e^n + e^{-n}}$ est absolument convergente et, par conséquent, convergente.

 © Groupe Modulo inc., 2013

30. Soit $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+5}$. Alors, $f(x)$ est continue et positive sur l'intervalle [1, ∞[et puisque $f'(x)=\dfrac{5-x}{2\sqrt{x}(x+5)^2}<0$ pour $x>5$, $f(x)$ devient éventuellement décroissante; nous pouvons donc appliquer le critère des séries alternées. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{n+5}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{1/2}+5n^{-1/2}}=0$, donc la série $\sum\limits_{j=1}^{\infty}(-1)^j\dfrac{\sqrt{j}}{j+5}$ converge.

31. $\lim\limits_{k\to\infty}a_k=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{5^k}{3^k+4^k}=[\text{diviser par } 4^k]\ \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{(5/4)^k}{(3/4)^k+1}=\infty$ puisque $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\dfrac{3}{4}\right)^k=0$ et $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\dfrac{5}{4}\right)^k=\infty$. Par conséquent, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{5^k}{3^k+4^k}$ diverge, selon le critère de divergence.

32. $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(n!)^n}{n^{4n}}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^4}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n}\cdot(n-4)!\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)(n-4)!\right]=\infty,$$
donc la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^n}{n^{4n}}$ diverge, selon le critère généralisé de Cauchy.

33. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2/n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{[(n+1)/n]^n}=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n)^n}=\dfrac{1}{e}<1$, donc la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ converge, selon le critère généralisé de Cauchy.

34. $0\le n\cos^2 n\le n$, donc $\dfrac{1}{n+n\cos^2 n}\ge\dfrac{1}{n+n}=\dfrac{1}{2n}$. Par conséquent, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+n\cos^2 n}$ diverge, par comparaison avec $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n}$, qui est ½ fois la série harmonique qui est divergente.

35. $a_n=\dfrac{1}{n^{1+1/n}}=\dfrac{1}{n\cdot n^{1/n}}$, donc posons que $b_n=\dfrac{1}{n}$ et appliquons le critère de comparaison par une limite. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^{1/n}}=1>0$, donc la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{1+1/n}}$ diverge, par comparaison avec la série harmonique divergente.

36. On remarque que $(\ln n)^{\ln n}=\left(e^{\ln\ln n}\right)^{\ln n}=\left(e^{\ln n}\right)^{\ln\ln n}=n^{\ln\ln n}$ et que $\ln\ln n\to\infty$ lorsque $n\to\infty$; il s'ensuit que $\ln\ln n>2$ pour n assez grand. Pour ces n, nous obtenons $(\ln n)^{\ln n}>n^2$, donc $\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}<\dfrac{1}{n^2}$. Puisque $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ converge [$p=2>1$], $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ converge également, selon le critère de comparaison.

37. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|an|}=\lim\limits_{n\to\infty}(2^{1/n}-1)=1-1=0<1$, donc la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{2}-1\right)^n$ converge, selon le critère généralisé de Cauchy.

 © Groupe Modulo inc., 2013

38. Appliquons le critère de comparaison par une limite avec $a_n = \sqrt[n]{2} - 1$ et $b_n = 1/n$. Alors,

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{1/n} - 1}{1/n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{1/x} - 1}{1/x} \overset{\text{H}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^{1/x} \cdot \ln 2 \cdot (-1/x^2)}{-1/x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} (2^{1/x} \cdot \ln 2) = 1 \cdot \ln\ 2 = \ln\ 2 > 0$. Donc, puisque $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge (série harmonique), $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{2} - 1\right)$ diverge également.

Autre solution : $\sqrt[n]{2} - 1 = \dfrac{1}{2^{(n-1)/n} + 2^{(n-2)/n} + \ 2^{(n-3)/n} + \ \cdots \ + 2^{1/n} + 1}$ [rationaliser le numérateur] $\geq \dfrac{1}{2n}$, et puisque $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ diverge (série harmonique), $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{2} - 1\right)$ diverge également, selon le critère de comparaison.

 © Groupe Modulo inc., 2013

6.7 Les séries de puissances

1. Une série de puissances est une série de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$, où x est une variable et les c_n sont des constantes appelées *coefficients de la série*.

Plus généralement, une série de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \cdots$ est appelée *série de puissances en (x − a)* ou *série de puissances centrées en a* ou *série de puissances autour de a*, où a est une constante.

2. a) Le rayon de convergence de la série de puissances $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ est :

i) 0 si la série converge seulement lorsque $x = a$

ii) ∞ si la série converge pour tout x ou

iii) un nombre positif R tel que la série converge si $|x - a| < R$ et diverge si $|x - a| > R$.

Dans la plupart des cas, on peut trouver R en utilisant le critère généralisé de d'Alembert.

b) L'intervalle de convergence d'une série de puissances est l'intervalle constitué de toutes les valeurs de x pour lesquelles la série converge. L'intervalle de convergence pour le cas i) à la sous-question a) est constitué du singleton $\{a\}$, pour le cas ii), de tous les nombres réels, c'est-à-dire de la droite des nombres réels $]-\infty, \infty[$ et, pour le cas (iii), de l'intervalle dont les extrémités sont $a - R$ et $a + R$ et qui peut comprendre aucune des extrémités, l'une ou l'autre d'entre elles ou encore les deux extrémités. Dans ce cas, il faut vérifier la convergence de la série à chaque extrémité de l'intervalle afin de déterminer l'intervalle de convergence.

3. Si $a_n = (-1)^n n x^n$, alors

$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}(n+1)x^{n+1}}{(-1)^n n x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| (-1)\frac{n+1}{n} x \right| = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right) |x| \right] = |x|$. Selon le critère généralisé de d'Alembert, la série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^n$ converge lorsque $|x| < 1$, donc le rayon de convergence $R = 1$. Vérifions maintenant les extrémités, c'est-à-dire $x = \pm 1$.

Les deux séries $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n (\pm 1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (\mp 1)^n n$ divergent, selon le critère de divergence, puisque $\lim_{n\to\infty} |(\mp 1)^n n| = \infty$. Par conséquent, l'intervalle de convergence est $I =]-1, 1[$.

4. Si $a_n = \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$, alors

 © Groupe Modulo inc., 2013

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{\sqrt[3]{n+1}}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{n}}{(-1)^n x^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(-1)x\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n}+1}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{\dfrac{1}{1+1/n}}\,|x| = |x|$. Selon le critère généralisé de d'Alembert, la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$ converge lorsque $|x| < 1$, donc $R = 1$. Lorsque $x = 1$, la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$ converge, selon le critère des séries alternées.

Lorsque $x = -1$, la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$ diverge puisqu'elle est une série p ($p = \frac{1}{3} \le 1$). Par conséquent, l'intervalle de convergence est $]-1, 1]$.

5. Si $a_n = \dfrac{x^n}{2n-1}$, alors $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x^{n+1}}{2n+1}\cdot\dfrac{2n-1}{x^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{2n+1}|x|\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2-1/n}{2+1/n}|x|\right) = |x|$. Selon le critère généralisé de d'Alembert, la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{2n-1}$ converge lorsque $|x| < 1$, donc $R = 1$. Lorsque $x = 1$, la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}$ diverge par comparaison avec $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n}$, puisque $\dfrac{1}{2n-1} > \dfrac{1}{2n}$, et $\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ diverge, puisque c'est ½ fois la série harmonique. Lorsque $x = -1$, la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n-1}$ converge, selon le critère des séries alternées. Par conséquent, l'intervalle de convergence est $[-1, 1[$.

6. Si $a_n = \dfrac{(-1)^n x^n}{n^2}$, alors

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\dfrac{n^2}{(-1)^n x^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(-1)xn^2}{(n+1)^2}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2|x|\right] = 1^2\cdot|x| = |x|$, donc $R = 1$. Lorsque $x = 1$, la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}$ converge, selon le critère des séries alternées. Lorsque $x = -1$, la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ converge, puisqu'elle est une série p avec $p = 2 > 1$. Par conséquent, l'intervalle de convergence est $[-1, 1]$.

7. Si $a_n = \dfrac{x^n}{n!}$, alors $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\dfrac{n!}{x^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x}{n+1}\right| = |x|\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1} = |x|\cdot 0 = 0 < 1$ pour *tout* nombre réel x. Donc, selon le critère généralisé de d'Alembert, $R = \infty$ et $I =]-\infty, \infty[$.

8. Il est plus facile dans ce cas d'appliquer le critère généralié de Cauchy. Si $a_n = n^n x^n$, alors $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} n|x| = \infty$ si $x \neq 0$, donc $R = 0$ et $I = \{0\}$.

9. Si $a_n = (-1)^n\dfrac{n^2x^n}{2^n}$, alors

 © Groupe Modulo inc., 2013

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(n+1)^2x^{n+1}}{2^{n+1}}\cdot\dfrac{2^n}{n^2x^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x(n+1)^2}{2n^2}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{|x|}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2\right] = \dfrac{|x|}{2}(1)^2 = \frac{1}{2}|x|$. Selon le critère généralisé de d'Alembert, la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^2x^n}{2^n}$ converge lorsque $\frac{1}{2}|x|<1 \iff |x|<2$, donc le rayon de convergence est $R = 2$. Lorsque $x = \pm 2$, les deux séries $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n^2(\pm 2)^n}{2^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(\mp 1)^n n^2$ divergent, selon le critère de divergence, puisque $\lim\limits_{n\to\infty}\left|(\mp 1)^n n^2\right| = \infty$. Par conséquent, l'intervalle de convergence est $I =]-2, 2[$.

10. Si $a_n = \dfrac{10^n x^n}{n^3}$, alors

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{10^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)^3}\cdot\frac{n^3}{10^n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{10xn^3}{(n+1)^3}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{10|x|}{(1+1/n)^3} = \frac{10|x|}{1^3} = 10|x|$$

Selon le critère généralisé de d'Alembert, la série $\sum\limits_{n}^{\infty}\dfrac{10^n x^n}{n^3}$ converge lorsque $10|x|<1 \iff |x|<\frac{1}{10}$, donc le rayon de convergence est $R = \frac{1}{10}$. Lorsque $x = -\frac{1}{10}$, la série converge, selon le critère des séries alternées; lorsque $x = \frac{1}{10}$, la série converge parce qu'elle est une série p avec $p = 3 > 1$. Par conséquent, l'intervalle de convergence est $I = [-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}]$.

11. Si $a_n = \dfrac{(-3)^n x^n}{n^{3/2}}$, alors

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-3)^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)^{3/2}}\cdot\frac{n^{3/2}}{(-3)^n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|-3x\left(\frac{n}{n+1}\right)^{3/2}\right| = 3|x|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+1/n}\right)^{3/2}\\ &= 3|x|(1) = 3|x|\end{aligned}$$

Selon le critère généralisé de d'Alembert, la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-3)^n}{n\sqrt{n}}x^n$ converge lorsque $3|x|<1 \iff |x|<\frac{1}{3}$, donc $R = \frac{1}{3}$. Lorsque $x = \frac{1}{3}$, la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^{3/2}}$ converge, selon le critère des séries alternées. Lorsque $x = -\frac{1}{3}$, la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{3/2}}$ est une série p convergente $(p = \frac{3}{2} > 1)$. Par conséquent, l'intervalle de convergence est $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$.

12. Si $a_n = \dfrac{x^n}{n3^n}$, alors

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}\cdot\frac{n3^n}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{3}\left(\frac{n}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{3}\left(\frac{1}{1+1/n}\right) = \frac{1}{3}|x|$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

Selon le critère généralisé de d'Alembert, la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n3^n}$ converge lorsque $\frac{1}{3}|x|<1 \quad\Leftrightarrow\quad |x|<3$, donc $R = 3$. Lorsque $x = 3$, la série $\sum_{n}\frac{1}{n}$ est la série harmonique divergente. Lorsque $x = -3$, la série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ est la série harmonique alternée convergente (multipliée par −1). Par conséquent, l'intervalle de convergence est [−3, 3[.

13. Si $a_n=(-1)^n\frac{x^n}{4^n\ln n}$, alors $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{4^{n+1}\ln(n+1)}\cdot\frac{4^n\ln n}{x^n}\right|=\frac{|x|}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(n+1)}=\frac{|x|}{4}\cdot 1\left[\text{selon la règle de l'Hospital}\right]=\frac{|x|}{4}$. Selon le critère généralisé de d'Alembert, la série converge lorsque $\frac{|x|}{4}<1 \quad\Leftrightarrow\quad |x|<4$, donc $R = 4$. Lorsque $x = -4$, $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{4^n\ln n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left[(-1)(-4)\right]^n}{4^n\ln n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$. Puisque $\ln n < n$ pour $n \geq 2$, $\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}$ et $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ est la série harmonique divergente (sans le terme $n = 1$), $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ est divergente, selon le critère de comparaison. Lorsque $x = 4$, $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{4^n\ln n}=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln n}$, qui converge, selon le critère des séries alternées. Par conséquent, $I =]-4, 4]$.

14. Si $a_n=(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, alors

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+3}}{(2n+3)!}\cdot\frac{(2n+1)!}{(-1)^n x^{2n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)x^2}{(2n+3)(2n+2)}\right|=x^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+3)(2n+2)}$$
$$=x^2\cdot 0=0<1$$

Donc, selon le critère généralisé de d'Alembert, la série $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ converge pour *tout* nombre réel x. Par conséquent, $R = \infty$ et $I =]-\infty, \infty[$.

15. Si $a_n=\frac{(x-2)^n}{n^2+1}$, alors $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)^2+1}\cdot\frac{n^2+1}{(x-2)^n}\right|=|x-2|\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{(n+1)^2+1}=|x-2|$. Selon le critère généralisé de d'Alembert, la série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2+1}$ converge lorsque

$|x-2|<1$ [$R = 1$] $\Leftrightarrow\quad -1<x-2<1 \quad\Leftrightarrow\quad 1<x<3$. Lorsque $x = 1$, la série $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2+1}$ converge, selon le critère des séries alternées; lorsque $x = 3$, la série $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ converge, par comparaison avec la série $p\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ [$p = 2 > 1$]. Par conséquent, l'intervalle de convergence est $I = [1, 3]$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

16. Si $a_n = (-1)^n \dfrac{(x-3)^n}{2n+1}$, alors $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(x-3)^{n+1}}{2n+3}\cdot\dfrac{2n+1}{(x-3)^n}\right| = |x-3|\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{2n+3} = |x-3|$. Selon le critère généralisé de d'Alembert, la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(x-3)^n}{2n+1}$ converge lorsque $|x-3|<1$ $[R=1] \Leftrightarrow -1<x-3<1 \Leftrightarrow 2<x<4$. Lorsque $x = 2$, la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2n+1}$ diverge, par comparaison par une limite avec la série harmonique (ou en utilisant le critère de l'intégrale); lorsque $x = 4$, la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{2n+1}$ converge, selon le critère des séries alternées. Par conséquent, l'intervalle de convergence est $I =]2, 4]$.

17. Si $a_n = \dfrac{3^n(x+4)^n}{\sqrt{n}}$, alors $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{3^{n+1}(x+4)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\cdot\dfrac{n}{3^n(x+4)^n}\right| = 3|x+4|\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 3|x+4|$. Selon le critère généralisé de d'Alembert, la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n(x+4)^n}{\sqrt{n}}$ converge lorsque $3|x+4|<1 \Leftrightarrow |x+4|<\frac{1}{3}$ $\left[R=\frac{1}{3}\right] \Leftrightarrow -\frac{1}{3}<x+4<\frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{13}{3}<x<-\frac{11}{3}$. Lorsque $x=-\frac{13}{3}$, la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ converge, selon le critère des séries alternées; lorsque $x=-\frac{11}{3}$, la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge $\left[p=\frac{1}{2}\le 1\right]$. Par conséquent, l'intervalle de convergence est $I = [-\frac{13}{3}, -\frac{11}{3}[$.

18. Si $a_n = \dfrac{n}{4^n}(x+1)^n$, alors $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(n+1)(x+1)^{n+1}}{4^{n+1}}\cdot\dfrac{4^n}{n(x+1)^n}\right| = \dfrac{|x+1|}{4}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n} = \dfrac{|x+1|}{4}$. Selon le critère généralisé de d'Alembert, la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{4^n}(x+1)^n$ converge lorsque $\dfrac{|x+1|}{4}<1 \Leftrightarrow |x+1|<4$ $[R=4] \Leftrightarrow -4<x+1<4 \Leftrightarrow -5<x<3$. Lorsque $x = -5$ ou 3, les deux séries $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\mp 1)^n n$ divergent, selon le critère de divergence, puisque $\lim\limits_{n\to\infty}|(\mp 1)^n n| = \infty$. Par conséquent, l'intervalle de convergence est $I =]-5, 3[$.

19. Si $a_n = \dfrac{(x-2)^n}{n^n}$, alors $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x-2|}{n} = 0$, donc la série converge pour tout x (selon le critère généralisé de Cauchy). $R = \infty$ et $I =]-\infty, \infty[$.

20. Si $a_n = \dfrac{(2x-1)^n}{5^n\sqrt{n}}$, alors

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2x-1)^{n+1}}{5^{n+1}\sqrt{n+1}}\cdot\frac{5^n\sqrt{n}}{(2x-1)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|2x-1|}{5}\sqrt{\frac{n}{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{|2x-1|}{5}\sqrt{\frac{1}{1+1/n}} = \frac{|2x-1|}{5}.$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

Selon le critère généralisé de d'Alembert, la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-1)^n}{5^n\sqrt{n}}$ converge lorsque

$\frac{|2x-1|}{5}<1 \iff |2x-1|<5 \iff |x-\frac{1}{2}|<\frac{5}{2} \iff -\frac{5}{2}<x-\frac{1}{2}<\frac{5}{2} \iff -2<x<3$, donc $R=\frac{5}{2}$. Lorsque $x = 3$, la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série p divergente ($p=\frac{1}{2}\le 1$). Lorsque $x = -2$, la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge, selon le critère des séries alternées. Par conséquent, l'intervalle de convergence est $I = [-2, 3[$.

21. $a_n=\frac{n}{b^n}(x-a)^n$, où $b > 0$.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\,|x-a|^{n+1}}{b^{n+1}}\cdot\frac{b^n}{n|x-a|^n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{|x-a|}{b}=\frac{|x-a|}{b}.$$

Selon le critère généralisé de d'Alembert, la série converge lorsque

$\frac{|x-a|}{b}<1 \iff |x-a|<b$ [donc $R=b$] $\iff -b<x-a<b \iff a-b<x<a+b$. Lorsque $|x-a|=b$, $\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}n=\infty$, donc la série diverge. Par conséquent, $I =]a - b, a + b[$.

22. $a_n=\frac{b^n}{\ln n}(x-a)^n$, où $b > 0$.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b^{n+1}(x-a)^{n+1}}{\ln(n+1)}\cdot\frac{\ln n}{b^n(x-a)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\cdot b\,|x-a|=b\,|x-a|$$

puisque $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln x}{\ln(x+\ 1)}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1/(x+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1}=1$. Selon le critère généralisé de d'Alembert, la série $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{b^n}{\ln n}(x-a)^n$ converge lorsque $b\,|x-a|<1 \iff |x-a|<\frac{1}{b} \iff -\frac{1}{b}<x-a<\frac{1}{b} \iff a-\frac{1}{b}<x<a+\frac{1}{b}$, donc $R=\frac{1}{b}$.

Lorsque $x=a+\frac{1}{b}$, la série $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ diverge, par comparaison avec la série p divergente $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$, puisque $\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}$ pour $n \ge 2$.

Lorsque $x=a-\frac{1}{b}$, la série $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$ converge, selon le critère des séries alternées. Par conséquent, l'intervalle de convergence est $I=\left[a-\frac{1}{b}, a+\frac{1}{b}\right[$.

23. Si $a_n = n!\,(2x - 1)^n$, alors $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!\,(2x-1)^{n+1}}{n!(2x-1)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}(n+1)\,|2x-1|\to\infty$ lorsque $n \to \infty$ pour tout $x\neq\frac{1}{2}$. Puisque la série diverge pour tout $x\neq\frac{1}{2}$, $R = 0$ et $I=\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

24. $a_n = \dfrac{n^2x^n}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)} = \dfrac{n^2x^n}{2^n n!} = \dfrac{nx^n}{2^n(n-1)!}$, donc

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)\,|x|^{n+1}}{2^{n+1}n!}\cdot\dfrac{2^n(n-1)!}{n|x|^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n^2}\dfrac{|x|}{2} = 0$. Par conséquent, selon le critère généralisé de d'Alembert, la série converge pour *tout* nombre réel x, $R = \infty$ et $I =]-\infty, \infty[$.

25. Si $a_n = \dfrac{(5x-4)^n}{n^3}$, alors

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(5x-4)^{n+1}}{(n+1)^3}\cdot\frac{n^3}{(5x-4)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}|5x-4|\left(\frac{n}{n+1}\right)^3 = \lim_{n\to\infty}|5x-4|\left(\frac{1}{1+1/n}\right)^3$$
$$= |5x-4|\cdot 1 = |5x-4|$$

Selon le critère généralisé de d'Alembert, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5x-4)^n}{n^3}$ converge lorsque

$|5x-4|<1 \iff |x-\tfrac{4}{5}|<\tfrac{1}{5} \iff -\tfrac{1}{5}<x-\tfrac{4}{5}<\tfrac{1}{5} \iff \tfrac{3}{5}<x<1$, donc $R = \tfrac{1}{5}$. Lorsque $x = 1$, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ est une série p convergente ($p = 3 > 1$). Lorsque $x = \tfrac{3}{5}$, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}$ converge, selon le critère des séries alternées. Par conséquent, l'intervalle de convergence est $I = [\tfrac{3}{5}, 1]$.

26. Si $a_n = \dfrac{x^{2n}}{n(\ln n)^2}$, alors $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x^{2n+2}}{(n+1)[\ln(n+1)]^2}\cdot\dfrac{n(\ln n)^2}{x^{2n}}\right| = |x^2|\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\,(\ln n)^2}{(n+1)[\ln(n+1)]^2} = x^2$.

Selon le critère généralisé de d'Alembert, la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n(\ln n)^2}$ converge lorsque $x^2<1 \iff |x|<1$, donc $R = 1$. Lorsque $x = \pm 1$, $x^{2n} = 1$, la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n(\ln n)^2}$ converge, selon le critère de l'intégrale (voir l'exercice 6.3.22). Par conséquent, l'intervalle de convergence est $I = [-1, 1]$.

27. Si $a_n = \dfrac{x^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}$, alors

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x^{n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)(2n+1)}\cdot\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{x^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x|}{2n+1} = 0 < 1$. Par conséquent, selon le critère généralisé de d'Alembert, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}$ converge pour *tout* nombre réel x, $R = \infty$ et $I =]-\infty, \infty[$.

28. Si $a_n = \dfrac{n!x^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}$, alors

 © Groupe Modulo inc., 2013

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)(2n+1)}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{n!x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\ |x|}{2n+1} = \frac{1}{2}|x|$. Selon le critère généralisé de d'Alembert, la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge lorsque $\frac{1}{2}|x|<1 \quad\Rightarrow\quad |x|<2$, donc $R = 2$. Lorsque $x = \pm 2$,

$|a_n| = \frac{n!2^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)} = \frac{[1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n]2^n}{[1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)]} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)} > 1$, donc chacune des deux séries aux extrémités diverge, selon le critère de divergence. Par conséquent, l'intervalle de convergence est $I =]-2, 2[$.

29. a) L'exercice spécifie que la série de puissances $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ est convergente pour $x = 4$. Donc, selon le théorème 3, elle doit converger pour au moins $-4 < x \le 4$. En particulier, elle converge lorsque $x = -2$, c'est-à-dire que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(-2)^n$ est convergente.

b) Il ne s'ensuit pas nécessairement que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(-4)^n$ est convergente. [Se référer aux commentaires qui suivent le théorème 3 au sujet de la convergence à l'extrémité d'un intervalle. Un exemple est $c_n = (-1)^n/(n4^n)$.]

30. L'exercice spécifie que la série de puissances $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ est convergente lorsque $x = -4$ et divergente lorsque $x = 6$. Donc, selon le théorème 3, elle converge pour au moins $-4 \le x < 4$ et diverge pour au moins $x \ge 6$ et $x < -6$. Par conséquent :

a) Elle converge lorsque $x = 1$, c'est-à-dire que $\sum c_n$ est convergente.

b) Elle diverge lorsque $x = 8$, c'est-à-dire que $\sum c_n 8^n$ est divergente.

c) Elle converge lorsque $x = -3$, c'est-à-dire que $\sum c_n(-3^n)$ est convergente.

d) Elle diverge lorsque $x = -9$, c'est-à-dire que $\sum c_n(-9)^n = \sum(-1)^n c_n 9^n$ est divergente.

31. Si $a_n = \frac{(n!)^k}{(kn)!}x^n$ alors

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{[(n+1)!]^k(kn)!}{(n!)^k[k(n+1)]!}|x| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^k}{(kn+k)(kn+k-1)\cdots(kn+2)(kn+1)}|x|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)(n+1)}{(kn+1)\ (kn+2)}\cdots\frac{(n+1)}{(kn+k)}\right]|x|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n+1}{kn+1}\right]\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n+1}{kn+2}\right]\cdots\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n+\ 1}{kn+k}\right]|x|$$

$$= \left(\frac{1}{k}\right)^k |x|<1 \quad\Leftrightarrow\quad |x|<k^k \text{ pour qu'il y ait convergence et le rayon de convergence est } R = k^k$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

32. a) Nous remarquons que les quatre intervalles aux sous-questions a) à d) ont un milieu $m = \frac{1}{2}(p+q)$ et un rayon de convergence $r = \frac{1}{2}(q-p)$. Nous savons également que l'intervalle de convergence de la série de puissances $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ est]−1, 1[. Pour changer le rayon de convergence à r, nous pouvons remplacer x^n par $\left(\frac{x}{r}\right)^n$. Pour déplacer le milieu de l'intervalle de convergence, nous pouvons remplacer x par $x - m$. Par conséquent, une série de puissances dont l'intervalle de convergence est $]p, q[$ est $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-m}{r}\right)^n$, où $m = \frac{1}{2}(p+q)$ et $r = \frac{1}{2}(q-p)$.

b) Un peu comme à l'exemple 2, nous savons que l'intervalle de convergence de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ est [−1, 1[. Si nous introduisons le facteur $(-1)^n$ dans a_n, l'intervalle de convergence devient]−1; 1]. En changeant maintenant le milieu et le rayon comme nous l'avons fait à la sous-question a), nous obtenons $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}\left(\frac{x-m}{r}\right)^n$, une série de puissances dont l'intervalle de convergence est $]p, q]$.

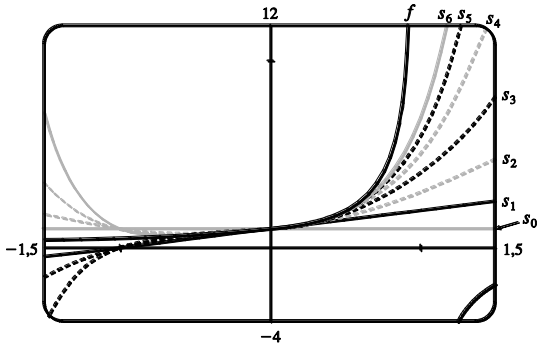
c) Comme à la sous-question b), $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x-m}{r}\right)^n$ est une série de puissances dont l'intervalle de convergence est $[p, q[$.

d) Si, au dénominateur, nous augmentons la valeur de l'exposant de n (n^2 par exemple), dans la série de puissances à la sous-question c), alors, lorsque $x = q$, la série de puissances $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\frac{x-m}{r}\right)^n$ convergera, par comparaison avec la série p avec $p = 2 > 1$, et l'intervalle de convergence sera $[p, q]$.

33. Non. Si une série de puissance est centrée en a, son intervalle de convergence est symétrique autour de a. Si une série de puissances a un rayon de convergence infini, alors son intervalle de convergence doit être $]-\infty, \infty[$ et non $[0, \infty[$.

34. Les sommes partielles de la série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ne convergent définitivement pas vers $f(x) = 1/(1-x)$ pour $x \geq 1$, puisque f n'est pas définie en $x = 1$ et négative sur l'intervalle $]1, \infty[$, alors que toutes les sommes partielles sont positives sur cet intervalle. Les sommes partielles ne convergent également pas vers f pour $x \leq -1$, puisque $0 < f(x) < 1$ sur cet intervalle, alors que les sommes partielles sont soit supérieures à 1, soit inférieures à 0. Les sommes partielles semblent converger vers f sur l'intervalle]−1, 1[. Cette preuve graphique s'accorde avec ce que nous savons des séries géométriques : convergence pour $|x| < 1$, divergence pour $|x| \geq 1$ (voir exemples 1 et 5 à la section 6.2).

 © Groupe Modulo inc., 2013



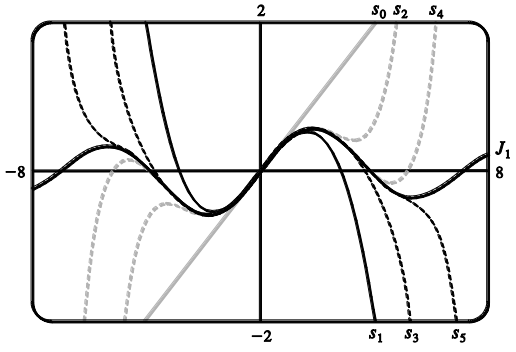
35. a) Si $a_n = \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(n+1)!2^{2n+1}}$, alors

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+3}}{(n+1)!\,(n+2)!2^{2n+3}}\cdot\frac{n!(n+1)!2^{2n+1}}{x^{2n+1}}\right| = \left(\frac{x}{2}\right)^2 \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)} = 0 \text{ pour tout } x.$$

Donc, $J_1(x)$ converge pour tout x et son domaine est $]-\infty, \infty[$.

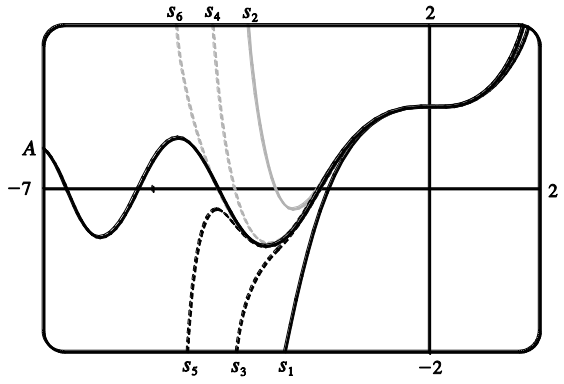
b), c) Les premiers termes de $J_1(x)$ jusqu'à $n = 5$ sont $a_0 = \dfrac{x}{2}$,

$a_1 = -\dfrac{x_3}{16}$, $a_2 = \dfrac{x^5}{384}$, $a_3 = -\dfrac{x^7}{18\,432}$, $a_4 = \dfrac{x^9}{1\,474\,560}$ et $a_5 = -\dfrac{x^{11}}{176\,947\,200}$. Les sommes partielles semblent produire une bonne approximation de $J_1(x)$ près de l'origine mais, à mesure que $|x|$ augmente, il est nécessaire d'utiliser un grand nombre de termes pour obtenir une bonne approximation.



36. a) $A(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, où $a_n = \dfrac{x^{3n}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot\cdots\cdot(3n-1)(3n)}$, donc $\lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x|^3 \lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{(3n+2)(3n+3)} = 0$ pour tout x, donc le domaine est $\mathbb{R}$.

b), c) $s_0 = 1$ n'apparaît pas au graphique. Les sommes partielles semblent produire une bonne approximation de $A(x)$ près de l'origine mais, à mesure que $|x|$ augmente, il est nécessaire d'utiliser un grand nombre de termes pour obtenir une bonne approximation.



Pour représenter graphiquement A, il faut d'abord saisir $A(x)$ dans un logiciel de calcul symbolique. On remarque que, pour $n \geq 1$, le dénominateur de a_n est

$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (3n-1) \cdot 3n = \dfrac{(3n)!}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \cdots \cdot (3n-2)} = \dfrac{(3n)!}{\prod_{k=1}^{n}(3k-2)}$, donc $a_n = \dfrac{\prod_{k=1}^{n}(3k-2)}{(3n)!}x^{3n}$ et, par

conséquent, $A(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\prod_{k=1}^{n}(3k-2)}{(3n)!}x^{3n}$. Maple et Mathematica peuvent tous deux représenter graphiquement A si nous la définissons de cette façon et Derive peut produire un graphique similaire en utilisant une somme partielle adéquate de $A(x)$. Derive, Maple et Mathematica ont tous deux fonctions initiales d'Airy, appelées AI·SERIES(z,m) et BI·SERIES(z,m) dans BESSEL.MTH dans Derive, et AiryAi et AiryBi dans Maple et Mathematica (simplement Ai et Bi dans les versions plus anciennes de Maple). Il est toutefois très difficile de trouver la valeur de A en fonction des valeurs des fonctions Airy des logiciels de calcul symbolique même si, en fait, $A(x) = \dfrac{\sqrt{3}\ \mathrm{AiryAi}(x) + \mathrm{AiryBi}(x)}{\sqrt{3}\ \mathrm{AiryAi}(0) + \mathrm{AiryBi}(0)}$.

37. $s_{2n-1} = 1 + 2x + x^2 + 2x^3 + x^4 + 2x^5 + \cdots + x^{2n-2} + 2x^{2n-1}$

$= 1(1+2x) + x^2(1+2x) + x^4(1+2x) + \cdots + x^{2n-2}(1+2x) = (1+2x)(1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n-2})$

$= (1+2x)\dfrac{1-x^{2n}}{1-x^2}$ [selon 6.2.3) avec $r = x^2$] $\rightarrow$ $\dfrac{1+2x}{1-x^2}$ à mesure que $n \to \infty$ selon 6.2.24)], lorsque $|x| < 1$

De plus, $s_{2n} = s_{2n-1} + x^{2n} \to \dfrac{1+2x}{1-x^2}$, puisque $x^{2n} \to 0$ pour $|x| < 1$. Par conséquent, $s_n \to \dfrac{1+2x}{1-x^2}$, puisque s_{2n} et s_{2n-1} se rapprochent toutes deux de $\dfrac{1+2x}{1-x^2}$ lorsque $n \to \infty$. Il s'ensuit que l'intervalle de convergence est $]-1, 1[$ et $f(x) = \dfrac{1+2x}{1-x^2}$.

38. $s_{4n-1} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_0x^4 + c_1x^5 + c_2x^6 + c_3x^7 + \cdots + c_3x^{4n-1}$

$= (c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3)(1 + x^4 + x^8 + \cdots + x^{4n-4}) \to \dfrac{c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3}{1-x^4}$ lorsque $n \to \infty$ [selon 6.2.4, avec $r = x^4$]

pour $|x^4| < 1 \iff |x| < 1$. De plus, s_{4n}, s_{4n+1}, s_{4n+2} ont les mêmes limites

 © Groupe Modulo inc., 2013

(par exemple, $s_{4n} = s_{4n-1} + c_0x^4$ et $x^{4n} \to 0$ pour $|x| < 1$). Donc, si au moins une des valeurs de c_0, c_1, c_2 et c_3 n'est pas égale à 0, alors l'intervalle de convergence est $]-1, 1[$ et $f(x) = \dfrac{c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3}{1 - x^4}$.

39. Appliquons le critère généralisé de Cauchy à la série $\sum c_n x^n$. Il faut que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n x^n|} = |x| \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = c|x| < 1$ pour qu'il y ait convergence ou $|x| < 1/c$, donc $R = 1/c$.

40. Supposons que $c_n \neq 0$. En appliquant le critère généralisé de d'Alembert à la série $\sum c_n(x-a)^n$, nous trouvons que

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}(x-a)^{n+1}}{c_n(x-a)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x-a|}{|c_n/c_{n+1}|} (*) = \frac{|x-a|}{\lim\limits_{n\to\infty}|c_n/c_{n+1}|} (\text{si } \lim_{n\to\infty} |c_n/c_{n+1}| \neq 0),$$

donc la série converge lorsque $\dfrac{|x-a|}{\lim\limits_{n\to\infty}|c_n/c_{n+1}|} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad |x-a| < \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|$. Par conséquent, $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|$. Si $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right| = 0$ et $|x-a| \neq 0$, alors (*) montre que $L = \infty$; la série diverge donc et, par conséquent, $R = 0$. Il s'ensuit que, dans tous les cas, $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|$.

41. Pour $2 < x < 3$, $\sum c_n x^n$ diverge et $\sum d_n x^n$ converge. Selon l'exercice 6.2.69, $\sum (c_n + d_n)x^n$ diverge. Puisque les deux séries convergent pour $|x| < 2$, le rayon de convergence de $\sum (c_n + d_n)x^n$ est 2.

42. Puisque $\sum c_n x^n$ converge lorsque $|x| < R$, $\sum c_n x^{2n} = \sum c_n \left(x^2\right)^n$ converge lorsque $|x^2| < R \quad \Leftrightarrow \quad |x| < \sqrt{R}$, donc le rayon de convergence de la seconde série est $\sqrt{R}$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

6.8 Les représentations de fonctions sous la forme de séries de puissances

1. Si le rayon de convergence de $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$ est 10, alors le rayon de convergence de $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nc_n x^{n-1}$ est également 10, selon le théorème 2.

2. Si $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$ converge sur l'intervalle]−2, 2[, alors $\int f(x)dx=C+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n+1}x^{n+1}$ a le même rayon de convergence (selon le théorème 2), mais peut ne pas avoir le même intervalle de convergence : il est possible que la série intégrée converge à une extrémité (ou aux deux extrémités).

3. Notre but est de représenter la fonction sous la forme $\frac{1}{1-r}$ et d'utiliser ensuite l'égalité 1 pour la représenter comme une série de puissances. $f(x)=\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ avec $|-x|<1 \Leftrightarrow |x|<1$, donc $R = 1$ et $I =]-1, 1[$.

4. $f(x)=\frac{5}{1-4x^2}=5\left(\frac{1}{1-4x^2}\right)=5\sum_{n=0}^{\infty}(4x^2)^n=5\sum_{n=0}^{\infty}4^n x^{2n}$. La série converge lorsque $|4x^2|<1 \Leftrightarrow |x|^2<\frac{1}{4} \Leftrightarrow |x|<\frac{1}{2}$, donc $R=\frac{1}{2}$ et $I=\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[$.

5. $f(x)=\frac{2}{3-x}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{1-x/3}\right)=\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}x^n$. La série converge lorsque $\left|\frac{x}{3}\right|<1$, c'est-à-dire lorsque $|x| < 3$, donc $R = 3$ et $I =]-3, 3[$.

6. $f(x)=\frac{1}{x+10}=\frac{1}{10}\left(\frac{1}{1-(-x/10)}\right)=\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{10}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{10^{n+1}}x^n$. La série converge lorsque $\left|\frac{x}{10}\right|<1$, c'est-à-dire lorsque $|x| < 10$, donc $R = 10$ et $I =]-10, 10[$.

7. $f(x)=\frac{x}{9+x^2}=\frac{x}{9}\left[\frac{1}{1+(x/3)^2}\right]=\frac{x}{9}\left[\frac{1}{1-\{-(x/3)^2\}}\right]=\frac{x}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\left(\frac{x}{3}\right)^2\right]^n=\frac{x}{9}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{9^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$. La série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\left(\frac{x}{3}\right)^2\right]^n$ converge lorsque $\left|-\left(\frac{x}{3}\right)^2\right|<1 \Leftrightarrow \frac{|x^2|}{9}<1 \Leftrightarrow |x|^2<9 \Leftrightarrow |x|<3$, donc $R = 3$ et $I =]-3, 3[$.

8. $f(x)=\frac{x}{2x^2+1}=x\left(\frac{1}{1-(-2x^2)}\right)=x\sum_{n=0}^{\infty}(-2x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n x^{2n+1}$. La série converge lorsque $|-2x^2|<1 \Rightarrow |x^2|<\frac{1}{2} \Rightarrow |x|<\frac{1}{\sqrt{2}}$, donc $R=\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $I=\left]-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

9. $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}=(1+x)\left(\dfrac{1}{1-x}\right)=(1+x)\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n+1}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n=1+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n$.

La série converge lorsque $|x|<1$, donc $R=1$ et $I=\,]-1,\,1[$.

Deuxième méthode : $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}=\dfrac{-(1-x)+2}{1-x}=-1+2\left(\dfrac{1}{1-x}\right)=-1+2\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=1+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n$.

Troisième méthode :

$$f(x)=\frac{1+x}{1-x}=(1+x)\left(\frac{1}{1-x}\right)=(1+x)(1+x+x^2+x^3+\ \cdots)$$

$$=(1+x+x^2+x^3+\cdots)+(x+x^2+x^3+x^4+\cdots)=1+2x+2x^2+2x^3\ +\ \cdots=1+2\sum_{n=1}^{\infty}x^n$$

10. $f(x)=\dfrac{x^2}{a^3-x^3}=\dfrac{x^2}{a^3}\cdot\dfrac{1}{1-x^3/a^3}=\dfrac{x^2}{a^3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x^3}{a^3}\right)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{3n+2}}{a^{3n+3}}$. La série converge lorsque $|\,x^3/a^3\,|<1 \iff |\,x^3\,|<|\,a^3\,| \iff |\,x\,|<|\,a\,|$, donc

$R=|a|$ et $I=\,]-|a|,\,|a|[$.

11. $f(x)=\dfrac{3}{x^2-x-2}=\dfrac{3}{(x-2)(x+1)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x+1} \implies 3=A(x+1)+B(x-2)$. Posons $x=2$ pour obtenir $A=1$ et $x=-1$ pour

obtenir $B=-1$. Par conséquent,

$$\frac{3}{x^2-x-2}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{-2}\left(\frac{1}{1-(x/2)}\right)-\frac{1}{1-(-x)}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n-\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n-1(-1)^n\right]x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^{n+1}-\frac{1}{2^{n+1}}\right]x^n$$

Nous avons représenté f comme la somme de deux séries géométriques; la première converge pour $x\in\,]-2,\,2[$ et la seconde converge pour $]-1,\,1[$. Par conséquent, la somme converge pour $x\in\,]-1,\,1[=I$.

12. $f(x)=\dfrac{x+2}{2x^2-x-1}=\dfrac{x+2}{(2x+1)(x-1)}=\dfrac{A}{2x+1}+\dfrac{B}{x-1} \implies x+2=A(x-1)+B(2x+1)$. Posons $x=1$ pour

obtenir $3=3B \implies B=1$ et $x=-\frac{1}{2}$ pour obtenir $\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}\,A \implies A=-1$. Par conséquent,

$$\frac{x+2}{2x^2-x-1}=\frac{-1}{2x+1}+\frac{1}{x-1}=-1\left(\frac{1}{1-(-2x)}\right)-1\left(\frac{1}{1-x}\right)=-\sum_{n=0}^{\infty}(-2x)^n-\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-2)^n+\ 1\right]x^n$$

Nous avons représenté f comme la somme de deux séries géométriques; la première converge pour $x\in\,]-\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}[$ et la seconde converge pour $]-1,\,1[$. Par conséquent, la somme converge pour $x\in\,]-\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}[=I$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

13. a) $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{-1}{1+x}\right)=-\dfrac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\right]$ [selon l'exercice 3]

$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^{n-1}$ [selon le théorème 2 *i*)] $=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n$ avec $R=1$

À la dernière étape, il est à noter que nous avons ré-indexé la série soit, *diminuer* de 1 la valeur initiale de la variable de sommation *n* et *augmenter* ensuite de 1 chaque occurrence de *n* dans le terme [on remarque également que $(-1)^{n+2}=(-1)^n$].

b) $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^3}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{1}{(1+x)^2}\right]=-\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n\right]$ [selon la sous-question a)]

$=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n+1)nx^{n-1}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+2)(n+1)x^n$ avec $R=1$

c) $f(x)=\dfrac{x^2}{(1+x)^3}=x^2\cdot\dfrac{1}{(1+x)^3}=x^2\cdot\dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+2)(n+1)x^n$ [selon la sous-question b)]

$=\dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+2)(n+1)x^{n+2}$

Afin d'exprimer la série de puissances avec x^n plutôt que x^{n+2}, nous allons ré-indexé la série, soit *diminuer* de 2 chaque occurrence de *n* dans le terme et *augmenter* de 2 la valeur initiale de la variable de sommation. Ceci donnera

$\dfrac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(n)(n-1)x^n$ avec $R=1$.

14. a) $\int\dfrac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x)+C$ et

$\int\dfrac{1}{1-x}dx=\int(1+x+x^2+\ \cdots)dx=\left(x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\ \cdots\right)+C=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}+C$ pour $|x|<1$.

Donc, $-\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}+C$ et, en posant $x=0$, nous obtenons $0=C$. Par conséquent,, $f(x)=\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$ avec $R=1$.

b) $f(x)=x\ln(1-x)=-x\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n}$.

c) En posant que $x=\dfrac{1}{2}$, $\ln\dfrac{1}{2}=-\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(1/2)^n}{n}$ $\Rightarrow$ $\ln 1-\ln 2=-\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1^n}{n2^n}$ $\Rightarrow$ $\ln 2=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n2^n}$.

15. $f(x)=\ln(5-x)=-\int\dfrac{dx}{5-x}=-\dfrac{1}{5}\int\dfrac{dx}{1-x/5}=-\dfrac{1}{5}\int\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x}{5}\right)^n\right]dx=C-\dfrac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{5^n(n+1)}=C-\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n5^n}$

En posant $x=0$, nous obtenons $C=\ln 5$. La série converge pour $|x/5|<1$ $\Leftrightarrow$ $|x|<5$, donc $R=5$.

16. $f(x)=x^2\arctan(x^3)=x^2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(x^3)^{2n+1}}{2n+1}$ [selon l'exemple 7] $=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{6n+3+2}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{6n+5}}{2n+1}$ pour $|x^3|<1$ $\Leftrightarrow$ $|x|<1$, donc $R=1$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

17. Nous savons que $\dfrac{1}{1+4x}=\dfrac{1}{1-(-4x)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-4x)^n$. En prenant la dérivée de chaque membre, nous obtenons

$$\frac{-4}{(1+4x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-4)^n nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-4)^{n+1}(n+1)x^n, \text{ donc}$$

$$f(x)=\frac{x}{(1+4x)^2}=\frac{-x}{4}\cdot\frac{-4}{(1+4x)^2}=\frac{-x}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-4)^{n+1}(n+1)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n(n+1)x^{n+1}$$

pour $|-4x|<1 \iff |x|<\frac{1}{4}$, donc $R=\frac{1}{4}$.

18. $\dfrac{1}{2-x}=\dfrac{1}{2(1-x/2)}=\dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n+1}}x^n$. Or, $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{2-x}\right)=\dfrac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n+1}}x^n\right) \Rightarrow \dfrac{1}{(2-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n+1}}nx^{n-1}$ et

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(2-x)^2}\right)=\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}nx^{n-1}\right) \Rightarrow \frac{2}{(2-x)^3}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}n(n-1)x^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)(n+1)}{2^{n+3}}x^n.$$

Par conséquent, $f(x)=\left(\dfrac{x}{2-x}\right)^3=\dfrac{x^3}{(2-x)^3}=\dfrac{x^3}{2}\cdot\dfrac{2}{(2-x)^3}=\dfrac{x^3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+2)(n+1)}{2^{n+3}}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(n+2)(n+1)}{2^{n+4}}x^{n+3}$ pour $\left|\dfrac{x}{2}\right|<1 \iff |x|<2$,

donc $R = 2$.

19. Selon l'exemple 5, $\dfrac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1+x}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{x}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n+1}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n+\sum_{n=1}^{\infty}nx^n \quad [\text{pour égaliser les premiers termes respectifs}]\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)+n]x^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+\ 1)x^n \text{ avec } R=1\end{aligned}$$

20. Selon l'exemple 5, $\dfrac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$, donc

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)=\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n\right) \Rightarrow \frac{2}{(1-x)^3}=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nx^{n-1}. \text{ Par conséquent,}$$

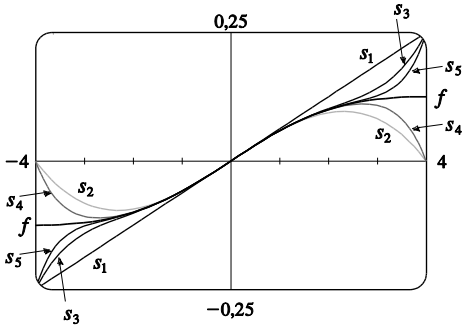
$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{x^2+x}{(1-x)^3}=\frac{x^2}{(1-x)^3}+\frac{x}{(1-x)^3}=\frac{x^2}{2}\cdot\frac{2}{(1-x)^3}+\frac{x}{2}\cdot\frac{2}{(1-x)^3}\\&=\frac{x^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nx^{n-1}+\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)n}{2}x^{n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)n}{2}x^n\\&=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(n-1)}{2}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)n}{2}x^n \quad [\text{ré-indexons pour égaliser les exposants de } x]\\&=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2-n}{2}x^n+x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2+n}{2}x^n \quad [\text{pour égaliser les premiers termes respectifs}]\\&=x+\sum_{n=2}^{\infty}n^2x^n=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n \text{ avec } R=\ 1\end{aligned}$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

21. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+16}=\dfrac{x}{16}\left(\dfrac{1}{1-(-x^2/16)}\right)=\dfrac{x}{16}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\dfrac{x^2}{16}\right)^n=\dfrac{x}{16}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{16^n}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{16^{n+1}}x^{2n+1}$. La série converge

lorsque $|-x^2/16|<1 \quad\Leftrightarrow\quad x^2<16 \quad\Leftrightarrow\quad |x|<4$, donc $R=4$. Les sommes partielles sont $s_1=\dfrac{x}{16}$,

$s_2=s_1-\dfrac{x^3}{16^2}, s_3=s_2+\dfrac{x^5}{16^3}, s_4=s_3-\dfrac{x^7}{16^4}, s_5=s_4+\dfrac{x^9}{16^5}, \ldots$. On remarque que s_1 correspond au premier terme de la série, quelles que soient la valeur de la variable de sommation et la valeur de l'exposant.



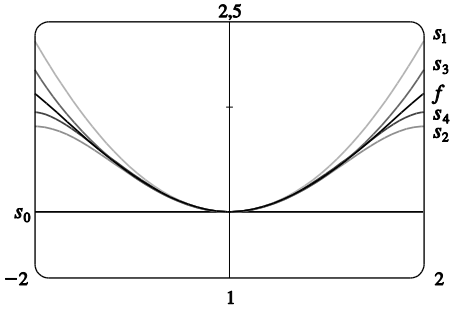
Lorsque n augmente, $s_n(x)$ procure une meilleure aproximation de f sur l'intervalle de convergence, qui est]−4, 4[.

22. $f(x)=\ln(x^2+4) \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+4}=\dfrac{2x}{4}\left(\dfrac{1}{1-(-x^2/4)}\right)=\dfrac{x}{2}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\dfrac{x^2}{4}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2^{2n+1}}$, donc

$f(x)=\displaystyle\int\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2^{2n+1}}\,dx=C+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+2}}{2^{2n+1}(2n+2)}=\ln 4+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+2}}{(n+1)2^{2n+2}}$ [$f(0)=\ln 4$, donc $C=\ln 4$]. La série converge

lorsque $|-x^2/4|<1 \quad\Leftrightarrow\quad x^2<4 \quad\Leftrightarrow\quad |x|<2$, donc $R=2$. Si $x=\pm 2$, alors $f(x)=\ln 4+\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n+1}$, laquelle converge, selon le critère des séries alternées. Les sommes partielles sont $s_0=\ln 4$ [≈ 1,39], $s_1=s_0+\dfrac{x^2}{4}$, $s_2=s_1-\dfrac{x^4}{2\cdot 2^4}$, $s_3=s_2+\dfrac{x^6}{3\cdot 2^6}$,

$s_4=s_3-\dfrac{x^8}{4\cdot 2^8}, \ldots$.



Lorsque n augmente, $s_n(x)$ procure une meilleure aproximation de f sur l'intervalle de convergence, qui est [−2, 2].

 © Groupe Modulo inc., 2013

23. $f(x)=\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)=\ln(1+x)-\ln(1-x)=\int\dfrac{dx}{1+x}+\int\dfrac{dx}{1-x}=\int\dfrac{dx}{1-(-x)}+\int\dfrac{dx}{1-x}$

$$=\int\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right]dx=\int\left[(1-x+x^2-x^3+x^4-\ldots)+(1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots)\right]dx$$

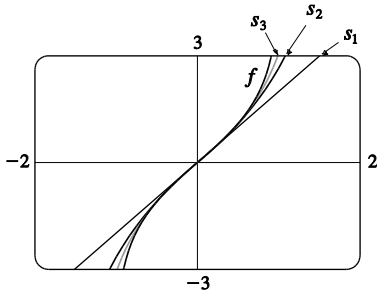
$$=\int(2+2x^2+2x^4+\cdots)dx=\int\sum_{n=0}^{\infty}2x^{2n}dx=C+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x^{2n+1}}{2n+1}$$

Toutefois, $f(0)=\ln\frac{1}{1}=0$, donc $C=0$ et nous obtenons $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{2x^{2n+1}}{2n+1}$ avec $R=1$. Si $x=\pm1$, alors $f(x)=\pm2\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2n+1}$,

lesquelles divergent toutes deux, selon le critère de comparaison par une limite avec $b_n=\dfrac{1}{n}$.

Les sommes partielles sont $s_1=\dfrac{2x}{1}$, $s_2=s_1+\dfrac{2x^3}{3}$, $s_3=s_2+\dfrac{2x^5}{5},\ldots.$

Lorsque n augmente, $s_n(x)$ procure une meilleure aproximation de f sur l'intervalle de convergence, qui est $]-1, 1[$.



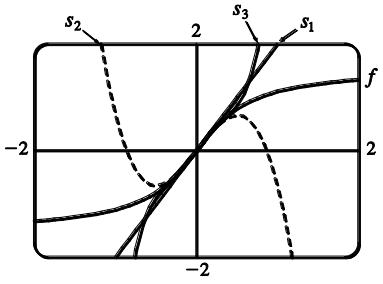
24. $f(x)=\arctan(2x)=2\int\dfrac{dx}{1+4x^2}=2\int\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(4x^2)^n dx=2\int\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n x^{2n}dx$

$$=C+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n x^{2n+1}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n+1}x^{2n+1}}{2n+1}\quad[f(0)=\arctan 0=0,\ \text{donc } C=0]$$

La série converge lorsque $|4x^2|<1 \iff |x|<\frac{1}{2}$, donc $R=\frac{1}{2}$. Si $x=\pm\frac{1}{2}$, alors $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{2n+1}$ et $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{2n+1}$,

respectivement. Les deux séries convergent, selon le critère des séries alternées. Les sommes partielles

sont $s_1=\dfrac{2x}{1},s_2=s_1-\dfrac{2^3x^3}{3},s_3=s_2+\dfrac{2^5x^5}{5},\cdots$



Lorsque n augmente, $s_n(x)$ procure une meilleure aproximation de f sur l'intervalle de convergence, qui est $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

25. $\dfrac{t}{1-t^8} = t\cdot\dfrac{1}{1-t^8} = t\sum_{n=0}^{\infty}(t^8)^n = \sum_{n=0}^{\infty}t^{8n+1} \quad\Rightarrow\quad \int\dfrac{t}{1-t^8}dt = C+\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{t^{8n+2}}{8n+2}$. La série pour $\dfrac{1}{1-t^8}$ converge lorsque $|t^8|<1 \quad\Leftrightarrow\quad |t|<1$,

donc $R = 1$ pour cette série ainsi que pour la série pour $t/(1 - t^8)$. Selon le théorème 2, la série pour $\int\dfrac{t}{1-t^8}dt$ a également $R = 1$.

26. $\dfrac{t}{1+t^3} = t\cdot\dfrac{1}{1-(-t^3)} = t\sum_{n=0}^{\infty}(-t^3)n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{3n+1} \quad\Rightarrow\quad \int\dfrac{t}{1+t^3}dt = C+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{t^{3n+2}}{3n+2}$. La série pour $\dfrac{1}{1+t^3}$ converge

lorsque $|-t^3|<1 \quad\Leftrightarrow\quad |t|<1$, donc $R = 1$ pour cette série ainsi que pour la série $\dfrac{t}{1+t^3}$. Selon le théorème 2, la série pour $\int\dfrac{t}{1+t^3}dt$ a

également $R = 1$.

27. Selon l'exemple 6, $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$ pour $|x| < 1$, donc $x^2\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{n+2}}{n}$ et $\int x^2\ln(1+x)dx = C+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{n+3}}{n(n+3)}$.

$R = 1$ pour la série pour $\ln(1 + x)$, donc $R = 1$ également pour la série représentant $x^2\ln(1 + x)$. Selon le théorème 2, la série

pour $\int x^2\ln(1+x)dx$ a également $R = 1$.

28. Selon l'exemple 7, $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2^{n+1}}$ pour $|x| < 1$, donc $\dfrac{\arctan x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{2n+1}$ et $\int\dfrac{\arctan x}{x}dx = C+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$.

$R = 1$ pour la série pour $\arctan x$, donc $R = 1$ également pour la série représentant $\dfrac{\arctan x}{x}$. Selon le théorème 2, la série

pour $\int\dfrac{\arctan x}{x}dx$ a également $R = 1$.

29. $\dfrac{1}{1+x^5} = \dfrac{1}{1-(-x^5)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^5)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{5n} \quad\Rightarrow\quad \int\dfrac{1}{1+x^5}dx = \int\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{5n}dx = C+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{5n+1}}{5n+1}$. Par

conséquent, $I = \int_0^{0,2}\dfrac{1}{1+x^5}dx = \left[x-\dfrac{x^6}{6}+\dfrac{x^{11}}{11}-\cdots\right]_0^{0,2} = 0,2-\dfrac{(0,2)^6}{6}+\dfrac{(0,2)^{11}}{11}-\cdots$. La série est alternée, donc si nous utilisons les

deux premiers termes, l'erreur sera d'au plus $(0,2)^{11}/11 \approx 1,9\times10^{-9}$. Donc, $I \approx 0,2 - (0,2)^6/6 \approx 0,199\,989$, avec six décimales.

30. Selon l'exemple 6, $\ln(1+x^4) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{4n}}{n} \quad\Rightarrow\quad \int\ln(1+x^4)dx = \int\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{4n}}{n}dx = C+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{4n+1}}{n(4n+1)}$. Par

conséquent, $I = \int_0^{0,4}\ln(1+x^4)dx = \left[\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^9}{18}+\dfrac{x^{13}}{39}-\dfrac{x^{17}}{68}+\cdots\right]_0^{0,4} = \dfrac{(0,4)^5}{5}-\dfrac{(0,4)^9}{18}+\dfrac{(0,4)^{13}}{39}-\dfrac{(0,4)^{17}}{68}+\cdots$. La série est alternée, donc si

nous utilisons les trois premiers termes, l'erreur sera d'au plus $(0,4)^{17}/68 \approx 2,5\times10^{-9}$.

Donc, $I \approx (0,4)^5/5 - (0,4)^9/18 + (0,4)^{13}/39 \approx 0,002\,034$, avec six décimales.

 © Groupe Modulo inc., 2013

31. Remplaçons x par $3x$ dans l'exemple 7. Nous trouvons que

$$\int x\arctan(3x)dx = \int x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(3x)^{2n+1}}{2n+1}dx = \int\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{2n+1}x^{2n+2}}{2n+1}dx = C+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{2n+1}x^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\int_0^{0,1} x\arctan(3x)dx &= \left[\frac{3x^3}{1\cdot 3}-\frac{3^3x^5}{3\cdot 5}+\frac{3^5x^7}{5\cdot 7}-\frac{3^7x^9}{7\cdot 9}+\cdots\right]_0^{0.1}\\ &= \frac{1}{10^3}-\frac{9}{5\times 10^5}+\frac{243}{35\times 10^7}-\frac{2187}{63\times 10^9}+\cdots.\end{aligned}$$

La série est alternée, donc si nous utilisons trois termes, l'erreur sera d'au plus $\frac{2187}{63\times 10^9}\approx 3{,}5\times 10^{-8}$. Donc,

$\int_0^{0,1} x\arctan(3x)dx \approx \frac{1}{10^3}-\frac{9}{5\times 10^5}+\frac{243}{35\times 10^7}\approx 0{,}000\ 983$, avec six décimales.

32. $$\int_0^{0,3}\frac{x^2}{1+x^4}dx = \int_0^{0,3}x^2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{4n}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n x^{4n+3}}{4n+3}\right]_0^{0,3} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^{4n+3}}{(4n+3)10^{4n+3}}$$
$$= \frac{3^3}{3\times 10^3}-\frac{3^7}{7\times 10^7}+\frac{3^{11}}{11\times 10^{11}}-\cdots$$

La série est alternée, donc si nous n'utilisons que deux termes, l'erreur sera d'au plus $\frac{3^{11}}{11\times 10^{11}}\approx 0{,}000\ 000\ 16$.

Donc, $\int_0^{0,3}\frac{x^2}{1+x^4}dx \approx \frac{3^3}{3\times 10^3}-\frac{3^7}{7\times 10^7}\approx 0{,}008\ 969$, avec six décimales.

33. Selon l'exemple 7, $\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$, donc $\arctan 0{,}2 = 0{,}2-\frac{(0{,}2)^3}{3}+\frac{(0{,}2)^5}{5}-\frac{(0{,}2)^7}{7}+\cdots$. La série est alternée, donc si nous utilisons trois termes, l'erreur sera d'au plus $\frac{(0{,}2)^7}{7}\approx 0{,}000\ 002$. Par conséquent,

$\arctan 0{,}2 \approx 0{,}2-\frac{(0{,}2)^3}{3}+\frac{(0{,}2)^5}{5}\approx 0{,}197\ 40$, avec cinq décimales.

34. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \Rightarrow f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2nx^{2n-1}}{(2n)!}$ [le premier terme s'annule], donc

$$\begin{aligned}f''(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)(2n-1)x^{2n-2}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2(n-1)}}{[2(n-1)]!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{[en remplaçant } n \text{ par } n+1]\\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = -f(x) \quad \Rightarrow \quad f''(x)+f(x)=0.\end{aligned}$$

35. a) $J_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$, $J_0'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2nx^{2n-1}}{2^{2n}(n!)^2}$ et $J_0''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n(2n-1)x^{2n-2}}{2^{2n}(n!)^2}$, donc

 © Groupe Modulo inc., 2013

$$\begin{aligned}
x^2J_0''(x)+xJ_0'(x)+x^2J_0(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n(2n-1)x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2nx^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+2}}{2^{2n}(n!)^2}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n(2n-1)x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2nx^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{2^{2n-2}[(n-1)!]^2}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n(2n-1)x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2nx^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^{-1}2^2n^2x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{2n(2n-1)+2n-2^2n^2}{2^{2n}(n!)^2}\right]x^{2n}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{4n^2-2n+2n-4n^2}{2^{2n}(n!)^2}\right]x^{2n}=0
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
\int_0^1 J_0(x)dx &= \int_0^1\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}\right]dx=\int_0^1\left(1-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{64}-\frac{x^6}{2304}+\cdots\right)dx\\
&= \left[x-\frac{x^3}{3\cdot 4}+\frac{x^5}{5\cdot 64}-\frac{x^7}{7\cdot 2304}+\cdots\right]_0^1=1-\frac{1}{12}+\frac{1}{320}-\frac{1}{16\,128}+\cdots
\end{aligned}$$

Puisque $\frac{1}{16\,128}\approx 0{,}000\,062$, il découle du théorème d'estimation des séries alternées que $\int_0^1 J_0(x)dx \approx 1-\frac{1}{12}+\frac{1}{320}\approx 0{,}920$, avec trois décimales.

36. a) $J_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(n+1)!2^{2n+1}}$, $J_1'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)x^{2n}}{n!(n+1)!2^{2n+1}}$ et $J_1''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)(2n)x^{2n-1}}{n!(n+1)!2^{2n+1}}$. $x^2J_1''(x)+xJ_1'(x)+(x^2-1)J_1(x)$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)(2n)x^{2n+1}}{n!(n+1)!2^{2n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)x^{2n+1}}{n!(n+1)!2^{2n+1}}\\
&\qquad +\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+3}}{n!(n+1)!2^{2n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(n+1)!2^{2n+1}}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)(2n)x^{2n+1}}{n!(n+1)!2^{2n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)x^{2n+1}}{n!(n+1)!2^{2n+1}}\\
&\qquad -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(n-1)!n!2^{2n-1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(n+1)!2^{2n+1}} \quad \left[\begin{array}{l}\text{remplacer } n \text{ par } n-1\\ \text{dans le troisième terme}\end{array}\right]\\
&= \frac{x}{2}-\frac{x}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{(2n+1)(2n)+(2n+1)-(n)(n+1)2^2-1}{n!(n+1)!2^{2n+1}}\right]x^{2n+1}=0
\end{aligned}$$

b) $J_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
J_0'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)x^{2n-1}}{2^{2n}(n!)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2(n+1)x^{2n+1}}{2^{2n+2}[(n+1)!]^2} \quad [\text{remplacer } n \text{ par } n+1]\\
&= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!n!} \quad [\text{annuler 2 et } n+1;\ \text{sortir } -1 \text{ de la somme}]=-J_1(x)
\end{aligned}$$

37. a) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \Rightarrow f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=f(x)$

b) Selon le théorème 5.4.2, la seule solution à l'équation différentielle $df(x)/dx = f(x)$ est $f(x) = Ke^x$; cependant, $f(0) = 1$, donc $K = 1$et $f(x) = e^x$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

Autre solution : Nous pourrions résoudre l'équation $df(x)/dx = f(x)$ en la traitant comme une équation différentielle à variables séparables.

38. $\frac{|\sin nx|}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$, donc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ converge, selon le critère de comparaison. $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin nx}{n^2}\right) = \frac{\cos nx}{n}$, donc lorsque $x = 2k\pi$ [k étant un nombre entier], $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2kn\pi)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, laquelle diverge [série harmonique]. $f_n''(x) = -\sin nx$, donc $\sum_{n=1}^{\infty} f_n''(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$, qui converge seulement si $\sin nx = 0$ ou $x = k\pi$ [k étant un nombre entier].

39. Si $a_n = \frac{x^n}{n^2}$, alors, selon le critère généralisé de d'Alembert, $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = |x| < 1$ pour qu'il y ait convergence, donc $R = 1$. Lorsque $x = \pm 1$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x^n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, qui est une série p convergente ($p = 2 > 1$), donc l'intervalle de convergence pour f est $[-1, 1]$. Selon le théorème 2, les rayons de convergence de f' et f'' sont tous deux 1, donc il n'est nécessaire de vérifier que les extrémités. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ et cette série diverge pour $x = 1$ (série harmonique) et converge pour $x = -1$ (critère des séries alternées), donc l'intervalle de convergence est $[-1, 1[$. $f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n+1}$ diverge à 1 et -1 (critère de divergence), puisque $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$, donc son intervalle de convergence est $]-1, 1[$.

40. a) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}x^n = \frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{1-x}\right] = -\frac{1}{(1-x)^2}(-1) = \frac{1}{(1-x)^2}$, $|x| < 1$.

b)

i) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x\left[\frac{1}{(1-x)^2}\right]$ [selon la sous-question a)] $= \frac{x}{(1-x)^2}$ pour $|x| < 1$.

ii) Posons $x = \frac{1}{2}$ dans i) : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1/2}{(1-1/2)^2} = 2$.

c)

i) $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n = x^2\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = x^2\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}\right] = x^2\frac{d}{dx}\frac{1}{(1-x)^2}$
$= x^2\frac{2}{(1-x)^3} = \frac{2x^2}{(1-x)^3}$ pour $|x| < 1$.

ii) Posons $x = \frac{1}{2}$ dans i) : $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2-n}{2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{2(1/2)^2}{(1-1/2)^3} = 4$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

iii) Selon b) ii) et c) ii), nous obtenons $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-n}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=4+2=6$.

41. Selon l'exemple 7, $\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour $|x|<1$. En particulier, pour $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$, nous obtenons

$$\frac{\pi}{6}=\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(1/\sqrt{3})^{2n+1}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{3}\right)^n\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{2n+1},\ \text{donc}\ \pi=\frac{6}{\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}=2\sqrt{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}.$$

42. a) $$\int_0^{1/2}\frac{dx}{x^2-x+1}=\int_0^{1/2}\frac{dx}{(x-1/2)^2+3/4}\quad\left[x-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}u,\ u=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right),\ dx=\frac{\sqrt{3}}{2}du\right]$$

$$=\int_{-1/\sqrt{3}}^{0}\frac{(\sqrt{3}/2)du}{(3/4)(u^2+1)}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\left[\arctan u\right]_{-1/\sqrt{3}}^{0}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left[0-\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right]$$

b) $$\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}\quad\Rightarrow$$

$$\frac{1}{x^2-x+1}=(x+1)\left(\frac{1}{1+x^3}\right)=(x+1)\frac{1}{1-(-x^3)}=(x+1)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}\quad\text{pour}\ |x|<1\quad\Rightarrow$$

$$\int\frac{dx}{x^2-x+1}=C+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{3n+2}}{3n+2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{3n+1}}{3n+1}\ \text{pour}\ |x|<1\quad\Rightarrow$$

$$\int_0^{1/2}\frac{dx}{x^2-x+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{4\cdot 8^n(3n+2)}+\frac{1}{2\cdot 8^n(3n+1)}\right]=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{8^n}\left(\frac{2}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}\right).$$ Selon la sous-question a), ceci est égal

à $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$, donc $\pi=\frac{3\sqrt{3}}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{8^n}\left(\frac{2}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}\right)$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

6.9 Les séries de Taylor et de Maclaurin

1. Selon le théorème 5 avec $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-5)^n$, $b_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$, donc $b_8 = \dfrac{f^{(8)}(5)}{8!}$.

2. a) Selon la formule 6, si f a un développement en série de puissances en 1, il doit être de la forme $f(1) + f'(1)(x-1) + \cdots$. En comparant à la série donnée, $1{,}6 - 0{,}8(x-1) + \cdots$, nous devons avoir $f'(1) = -0{,}8$. Au graphique, toutefois, $f'(1)$ est positive. Par conséquent, la série donnée *n'*est *pas* la série de Taylor de f centrée en 1.

b) Si f a un développement en série de puissances en 2, il doit être de la forme $f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{1}{2}f''(2)(x-2)^2 + \cdots$. En comparant à la série donnée, $2{,}8 + 0{,}5(x-2) + 1{,}5(x-2)^2 - 0{,}1(x-2)^3 + \cdots$, nous devons avoir $\frac{1}{2}f''(2) = 1{,}5$, c'est-à-dire que $f''(2)$ est positive. Au graphique, toutefois, f est concave vers le bas près de $x = 2$, donc $f''(2)$ doit être négative. Par conséquent, la série donnée donnée *n'*est *pas* la série de Taylor de f centrée en 2.

3. Puisque $f^{(n)}(0) = (n+1)!$, la formule 7 produit la série de Maclaurin $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(n+1)!}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$. En appliquant le critère généralisé de d'Alembert avec $a_n = (n+1)x^n$, nous obtenons $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(n+2)x^{n+1}}{(n+1)x^n}\right| = |x|\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{n+1} = |x|\cdot 1 = |x|$. Pour qu'il y ait convergence, il faut que $|x| < 1$, donc le rayon de convergence $R = 1$.

4. Puisque $f^{(n)}(4) = \dfrac{(-1)^n n!}{3^n(n+1)}$, la formule 6 produit la série de Taylor

$\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(4)}{n!}(x-4)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n!}{3^n(n+1)n!}(x-4)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{3^n(n+1)}(x-4)^n$, qui est la série de Taylor de f centrée en 4. Appliquons le critère généralisé de d'Alembert afin de trouver le rayon de convergence, R.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}(x-4)^{n+1}}{3^{n+1}(n+2)}\cdot\frac{3^n(n+1)}{(-1)^n(x-4)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)(x-4)(n+1)}{3(n+2)}\right|$$
$$= \frac{1}{3}|x-4|\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{3}|x-4|$$

Pour qu'il y ait convergence, $\frac{1}{3}|x-4| < 1 \iff |x-4| < 3$, donc $R = 3$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

5.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$(1-x)^{-2}$	1
1	$2(1-x)^{-3}$	2
2	$6(1-x)^{-4}$	6
3	$24(1-x)^{-5}$	24
4	$120(1-x)^{-6}$	120
⋮	⋮	⋮

$$\begin{aligned}(1-x)^{-2} &= f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+\cdots\\ &= 1+2x+\tfrac{6}{2}x^2+\tfrac{24}{6}x^3+\tfrac{120}{24}x^4+\cdots\\ &= 1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n\end{aligned}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(n+2)x^{n+1}}{(n+1)x^n}\right| = |x|\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{n+1} = |x|(1) = |x| < 1$ pour qu'il y ait convergence, donc

$R = 1$.

6.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$\ln(1+x)$	0
1	$(1+x)^{-1}$	1
2	$-(1+x)^{-2}$	−1
3	$2(1+x)^{-3}$	2
4	$-6(1+x)^{-4}$	−6
5	$24(1+x)^{-5}$	24
⋮	⋮	⋮

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+\frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5+\cdots\\ &= 0+x-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{2}{6}x^3-\tfrac{6}{24}x^4+\tfrac{24}{120}x^5-\cdots\\ &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\end{aligned}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\dfrac{n}{x^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x|}{1+1/n} = |x| < 1$ pour qu'il y ait convergence, donc $R = 1$.

Il est à noter que la réponse obtenue correspond au développement de $\ln(1 + x)$ dans le tableau 1; nous l'avons cependant obtenue en utilisant une méthode différente. (Comparer avec l'exemple 6 à la section 6.8.)

7.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$\sin \pi x$	0
1	$\pi \cos \pi x$	π
2	$-\pi^2 \sin \pi x$	0
3	$-\pi^3 \cos \pi x$	$-\pi^3$
4	$\pi^4 \sin \pi x$	0
5	$\pi^5 \cos \pi x$	π^5
⋮	⋮	⋮

$$\begin{aligned}\sin \pi x &= f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+\frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5+\cdots\\ &= 0+\pi x+0-\frac{\pi^3}{3!}x^3+0+\frac{\pi^5}{5!}x^5+\cdots\\ &= \pi x-\frac{\pi^3}{3!}x^3+\frac{\pi^5}{5!}x^5-\frac{\pi^7}{7!}x^7+\cdots\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}\end{aligned}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\pi^{2n+3}x^{2n+3}}{(2n+3)!}\cdot\dfrac{(2n+1)!}{\pi^{2n+1}x^{2n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\pi^2x^2}{(2n+3)(2n+2)} = 0 < 1$ pour tout x, donc $R = \infty$.

8.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	e^{-2x}	1
1	$-2e^{-2x}$	−2
2	$4e^{-2x}$	4
3	$-8e^{-2x}$	−8
4	$16e^{-2x}$	16
⋮	⋮	⋮

$$e^{-2x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n!}x^n\,.$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-2)^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{(-2)^n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2|x|}{n+1}\\ &= 0<1 \quad \text{pour tout } x, \text{ donc } R=\infty.\end{aligned}$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

9.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	2^x	1
1	$2^x(\ln 2)$	$\ln 2$
2	$2^x(\ln 2)^2$	$(\ln 2)^2$
3	$2^x(\ln 2)^3$	$(\ln 2)^3$
4	$2^x(\ln 2)^4$	$(\ln 2)^4$
⋮	⋮	⋮

$$2^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n}{n!} x^n .$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(\ln 2)^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(\ln 2)^n x^n} \right|$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln 2)|x|}{n+1} = 0 < 1 \quad \text{pour tout } x, \text{ donc } R = \infty.$$

10.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$x \cos x$	0
1	$-x \sin x + \cos x$	1
2	$-x \cos x - 2 \sin x$	0
3	$x \sin x - 3 \cos x$	−3
4	$x \cos x + 4 \sin x$	0
5	$-x \sin x + 5 \cos x$	5
6	$-x \cos x - 6 \sin x$	0
7	$x \sin x - 7 \cos x$	−7
⋮	⋮	⋮

$$x\cos x = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \cdots$$
$$= 0 + 1x + 0 - \frac{3}{3!}x^3 + 0 + \frac{5}{5!}x^5 + 0 - \frac{7}{7!}x^7 + \cdots$$
$$= x - \frac{1}{2!}x^3 + \frac{1}{4!}x^5 - \frac{1}{6!}x^7 + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+3}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(-1)^n x^{2n+1}} \right|$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{(2n+2)(2n+1)} = 0 < 1 \quad \text{pour tout } x, \text{ donc } R = \infty.$$

11.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(1)$
0	$x^4 - 3x^2 + 1$	−1
1	$4x^3 - 6x$	−2
2	$12x^2 - 6$	6
3	$24x$	24
4	24	24
5	0	0
6	0	0
⋮	⋮	⋮

$f^{(n)}(x) = 0$ pour $n \geq 5$, donc f possède un développement fini de puissances centré en $a = 1$.

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + 1 = \sum_{n=0}^{4} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n$$
$$= \frac{-1}{0!}(x-1)^0 + \frac{-2}{1!}(x-1)^1 + \frac{6}{2!}(x-1)^2 + \frac{24}{3!}(x-1)^3 + \frac{24}{4!}(x-1)^4$$
$$= -1 - 2(x-1) + 3(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + (x-1)^4$$

Toute somme finie de puissances converge évidemment pour tout x, donc $R = \infty$.

12.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(-2)$
0	$x - x^3$	6
1	$1 - 3x^2$	−11
2	$-6x$	12
3	−6	−6
4	0	0
5	0	0
⋮	⋮	⋮

$f^{(n)}(x) = 0$ pour $n \geq 4$, donc f possède un développement fini de puissances centré en $a = -2$.

$$f(x) = x - x^3 = \sum_{n=0}^{3} \frac{f^{(n)}(-2)}{n!}(x+2)^n$$
$$= \frac{6}{0!}(x+2)^0 + \frac{-11}{1!}(x+2)^1 + \frac{12}{2!}(x+2)^2 + \frac{-6}{3!}(x+2)^3$$
$$= 6 - 11(x+2) + 6(x+2)^2 - (x+2)^3$$

Toute somme finie de puissances converge évidemment pour tout x, donc $R = \infty$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

13.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(2)$
0	$\ln x$	$\ln 2$
1	$1/x$	$1/2$
2	$-1/x^2$	$-1/2^2$
3	$2/x^3$	$2/2^3$
4	$-6/x^4$	$-6/2^4$
5	$24/x^5$	$24/2^5$
⋮	⋮	⋮

$$\begin{aligned} f(x) = \ln x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n \\ &= \frac{\ln 2}{0!}(x-2)^0 + \frac{1}{1!2^1}(x-2)^1 + \frac{-1}{2!2^2}(x-2)^2 + \frac{2}{3!2^3}(x-2)^3 \\ &\quad + \frac{-6}{4!2^4}(x-2)^4 + \frac{24}{5!2^5}(x-2)^5 + \cdots \\ &= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{n!2^n}(x-2)^n \\ &= \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n2^n}(x-2)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}(x-2)^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} \cdot \frac{n2^n}{(-1)^{n+1}(x-2)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)(x-2)n}{(n+1)2}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)\frac{|x-2|}{2} \\ &= \frac{|x-2|}{2} < 1 \quad \text{pour qu'il y ait convergence, donc } |x-2| < 2 \text{ et } R = 2. \end{aligned}$$

14.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(-3)$
0	$1/x$	$-1/3$
1	$-1/x^2$	$-1/3^2$
2	$2/x^3$	$-2/3^3$
3	$-6/x^4$	$-6/3^4$
4	$24/x^5$	$-24/3^5$
⋮	⋮	⋮

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(-3)}{n!}(x+3)^n \\ &= \frac{-1/3}{0!}(x+3)^0 + \frac{-1/3^2}{1!}(x+3)^1 + \frac{-2/3^3}{2!}(x+3)^2 \\ &\quad + \frac{-6/3^4}{3!}(x+3)^3 + \frac{-24/3^5}{4!}(x+3)^4 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-n!/3^{n+1}}{n!}(x+3)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{3^{n+1}} \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(x+3)^{n+1}}{3^{n+2}} \cdot \frac{3^{n+1}}{(x+3)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x+3|}{3} = \frac{|x+3|}{3} < 1 \text{ pour qu'il y ait convergence, donc } |x$$

$+ 3| < 3$ et $R = 3$.

15.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(3)$
0	e^{2x}	e^6
1	$2e^{2x}$	$2e^6$
2	2^2e^{2x}	$4e^6$
3	2^3e^{2x}	$8e^6$
4	2^4e^{2x}	$16e^6$
⋮	⋮	⋮

$$\begin{aligned} f(x) = e^{2x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(3)}{n!}(x-3)^n \\ &= \frac{e^6}{0!}(x-3)^0 + \frac{2e^6}{1!}(x-3)^1 + \frac{4e^6}{2!}(x-3)^2 \\ &\quad + \frac{8e^6}{3!}(x-3)^3 + \frac{16e^6}{4!}(x-3)^4 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n e^6}{n!}(x-3)^n \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}e^6(x-3)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n e^6(x-3)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2|x-3|}{n+1} = 0 < 1 \text{ pour tout } x, \text{ donc } R = \infty.$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

16.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(\pi/2)$
0	$\sin x$	1
1	$\cos x$	0
2	$-\sin x$	-1
3	$-\cos x$	0
4	$\sin x$	1
⋮	⋮	⋮

$$\begin{aligned} f(x) = \sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\pi/2)}{k!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^k \\ &= 1 - \frac{(x-\pi/2)^2}{2!} + \frac{(x-\pi/2)^4}{4!} - \frac{(x-\pi/2)^6}{6!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-\pi/2)^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{|x-\pi/2|^{2n+2}}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{|x-\pi/2|^{2n}}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{|x-\pi/2|^2}{(2n+2)(2n+1)} = 0 < 1 \text{ pour tout } x, \text{ donc } R = \infty.$$

17.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(\pi)$
0	$\cos x$	-1
1	$-\sin x$	0
2	$-\cos x$	1
3	$\sin x$	0
4	$\cos x$	-1
⋮	⋮	⋮

$$\begin{aligned} f(x) = \cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\pi)}{k!}(x-\pi)^k \\ &= -1 + \frac{(x-\pi)^2}{2!} - \frac{(x-\pi)^4}{4!} + \frac{(x-\pi)^6}{6!} - \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-\pi)^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{|x-\pi|^{2n+2}}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{|x-\pi|^{2n}}\right] \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{|x-\pi|^2}{(2n+2)(2n+1)} = 0 < 1 \quad \text{pour tout } x, \text{ donc } R = \infty. \end{aligned}$$

18.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(16)$
0	$\sqrt{x}$	4
1	$\frac{1}{2}x^{-1/2}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}$
2	$-\frac{1}{4}x^{-3/2}$	$-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4^3}$
3	$\frac{3}{8}x^{-5/2}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4^5}$
4	$-\frac{15}{16}x^{-7/2}$	$-\frac{15}{16}\cdot\frac{1}{4^7}$
⋮	⋮	⋮

$$\begin{aligned} f(x) = \sqrt{x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(16)}{n!}(x-16)^n \\ &= \frac{4}{0!}(x-16)^0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1!}(x-16)^1 - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4^3}\cdot\frac{1}{2!}(x-16)^2 \\ &\quad + \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4^5}\cdot\frac{1}{3!}(x-16)^3 - \frac{15}{16}\cdot\frac{1}{4^7}\cdot\frac{1}{4!}(x-16)^4 + \cdots \\ &= 4 + \frac{1}{8}(x-16) + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{2^n 4^{2n-1} n!}(x-16)^n \\ &= 4 + \frac{1}{8}(x-16) + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{2^{5n-2} n!}(x-16)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n 1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)(x-16)^{n+1}}{2^{5n+3}(n+1)!}\cdot\frac{2^{5n-2} n!}{(-1)^{n-1}1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-3)(x-16)^n}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)|x-16|}{2^5(n+1)} = \frac{|x-16|}{32}\lim_{n\to\infty}\frac{2-1/n}{1+1/n} = \frac{|x-16|}{32}\cdot 2 \\ &= \frac{|x-16|}{16} < 1 \quad \text{pour qu'il y ait convergence, donc } |x-16| < 16 \text{ et } R = 16. \end{aligned}$$

19. Si $f(x) = \sin \pi x$, alors $f^{(n+1)}(x) = \pm\pi^{n+1} \sin \pi x$ ou $\pm\pi^{n+1} \cos \pi x$. Dans chaque cas, $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \le \pi^{n+1}$, donc, selon la formule 9 avec $a = 0$ et $M = \pi^{n+1}$, $|R_n(x)| \le \dfrac{\pi^{n+1}}{(n+1)!}|x|^{n+1} = \dfrac{|\pi x|^{n+1}}{(n+1)!}$. Par conséquent, $|R_n(x)| \to 0$ lorsque $n \to \infty$, selon l'égalité 10. Donc, $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ et, selon le théorème 8, la série à l'exercice 7 représente $\sin \pi x$ pour tout x.

 © Groupe Modulo inc., 2013

20. Si $f(x) = \sin x$, alors $f^{(n+1)}(x) = \pm\sin x$ ou $\pm\cos x$. Dans chaque cas, $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \le 1$, donc, selon la formule 9 avec $a = 0$ et $M = 1$,

$|R_n(x)| \le \dfrac{1}{(n+1)!}\left|x - \dfrac{\pi}{2}\right|^{n+1}$. Par conséquent, $|R_n(x)| \to 0$ lorsque $n \to \infty$, selon l'égalité 10. Donc, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ et, selon le théorème 8, la série à l'exercice 18 représente sin x pour tout x.

21. $$\sqrt[4]{1-x} = [1+(-x)]^{1/4} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/4}{n}(-x)^n = 1 + \tfrac{1}{4}(-x) + \frac{\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{4}\right)}{2!}(-x)^2 + \frac{\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{7}{4}\right)}{3!}(-x)^3 + \cdots$$
$$= 1 - \frac{1}{4}x + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-1)^n\cdot[3\cdot 7\cdot\cdots\cdot(4n-5)]}{4^n\cdot n!}x^n$$
$$= 1 - \frac{1}{4}x - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{3\cdot 7\cdot\cdots\cdot(4n-5)}{4^n\cdot n!}x^n$$
et $|-x| < 1 \iff |x| < 1$, donc $R = 1$.

22. $$\sqrt[3]{8+x} = \sqrt[3]{8\left(1+\frac{x}{8}\right)} = 2\left(1+\frac{x}{8}\right)^{1/3} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/3}{n}\left(\frac{x}{8}\right)^n$$
$$= 2\left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{8}\right) + \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)}{2!}\left(\frac{x}{8}\right)^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)}{3!}\left(\frac{x}{8}\right)^3 + \cdots\right]$$
$$= 2\left[1 + \frac{1}{24}x + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot[2\cdot 5\cdot\cdots\cdot(3n-4)]}{3^n\cdot 8^n\cdot n!}x^n\right]$$
$$= 2 + \frac{1}{12}x + 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}[2\cdot 5\cdot\cdots\cdot(3n-4)]}{24^n\cdot n!}x^n$$
et $\left|\dfrac{x}{8}\right| < 1 \iff |x| < 8$, donc $R = 8$.

23. $\dfrac{1}{(2+x)^3} = \dfrac{1}{[2(1+x/2)]^3} = \dfrac{1}{8}\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{-3} = \dfrac{1}{8}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{-3}{n}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n$. Le coefficient binomial est

$$\binom{-3}{n} = \frac{(-3)(-4)(-5)\cdot\cdots\cdot(-3-n+1)}{n!} = \frac{(-3)(-4)(-5)\cdot\cdots\cdot[-(n+2)]}{n!}$$
$$= \frac{(-1)^n\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\cdots\cdot(n+1)(n+2)}{2\cdot n!} = \frac{(-1)^n(n+1)(n+2)}{2}$$

Par conséquent, $\dfrac{1}{(2+x)^3} = \dfrac{1}{8}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n+1)(n+2)}{2}\dfrac{x^n}{2^n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n+1)(n+2)x^n}{2^{n+4}}$ pour $\left|\dfrac{x}{2}\right| < 1 \iff |x| < 2$, donc $R = 2$.

24. $$(1-x)^{2/3} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{2}{3}}{n}(-x)^n = 1 + \tfrac{2}{3}(-x) + \frac{\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)}{2!}(-x)^2 + \frac{\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)}{3!}(-x)^3 + \cdots$$
$$= 1 - \tfrac{2}{3}x + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-1)^n\cdot 2\cdot[1\cdot 4\cdot 7\cdot\cdots\cdot(3n-5)]}{3^n\cdot n!}x^n$$
$$= 1 - \tfrac{2}{3}x - 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\cdots\cdot(3n-5)}{3^n\cdot n!}x^n$$
et $|-x| < 1 \iff |x| < 1$, donc $R = 1$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

25. $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \sin(\pi x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(\pi x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}$, $R = \infty$.

26. $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \cos(\pi x/2) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(\pi x/2)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\pi^{2n}}{2^{2n}(2n)!}x^{2n}$, $R = \infty$.

27. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \quad \Rightarrow \quad e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n!}$, donc $f(x) = e^x + e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+1}{n!}x^n$, $R = \infty$.

28. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \quad \Rightarrow \quad 2e^{-x} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}$, donc $f(x) = e^x + 2e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{[1+2(-1)^n]}{n!}x^n$, $R = \infty$.

29. $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \Rightarrow \quad \cos\left(\frac{1}{2}x^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\left(\frac{1}{2}x^2\right)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{4n}}{2^{2n}(2n)!}$, donc $f(x) = x\cos\left(\frac{1}{2}x^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2^{2n}(2n)!}x^{4n+1}$, $R = \infty$.

30. $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \quad \Rightarrow \quad \ln(1+x^3) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{3n}}{n}$, donc $f(x) = x^2\ln(1+x^3) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{3n+2}}{n}$, $R = 1$.

31. Nous devons exprimer la série binomiale sous la forme (1+ expression); nous allons donc factoriser 4.

$$\begin{aligned}
\frac{x}{\sqrt{4+x^2}} &= \frac{x}{\sqrt{4(1+x^2/4)}} = \frac{x}{2\sqrt{1+x^2/4}} = \frac{x}{2}\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{-1/2} = \frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}\left(\frac{x^2}{4}\right)^n \\
&= \frac{x}{2}\left[1+\left(-\tfrac{1}{2}\right)\frac{x^2}{4}+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}\left(\frac{x^2}{4}\right)^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}\left(\frac{x^2}{4}\right)^3+\cdots\right] \\
&= \frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot 4^n\cdot n!}x^{2n} \\
&= \frac{x}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{n!2^{3n+1}}x^{2n+1} \text{ et } \frac{x^2}{4}<1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{|x|}{2}<1 \quad\Leftrightarrow\quad |x|<2, \text{ donc } R=2.
\end{aligned}$$

32.
$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{\sqrt{2+x}} &= \frac{x^2}{\sqrt{2(1+x/2)}} = \frac{x^2}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-1/2} = \frac{x^2}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n \\
&= \frac{x^2}{\sqrt{2}}\left[1+\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\cdots\right] \\
&= \frac{x^2}{\sqrt{2}}+\frac{x^2}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{n!2^{2n}}x^n \\
&= \frac{x^2}{\sqrt{2}}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{n!2^{2n+1/2}}x^{n+2} \text{ et } \left|\frac{x}{2}\right|<1 \quad\Leftrightarrow\quad |x|<2, \text{ donc } R=2.
\end{aligned}$$

33. $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) = \frac{1}{2}\left[1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{(2n)!}\right] = \frac{1}{2}\left[1-1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{(2n)!}\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$, $R = \infty$

 © Groupe Modulo inc., 2013

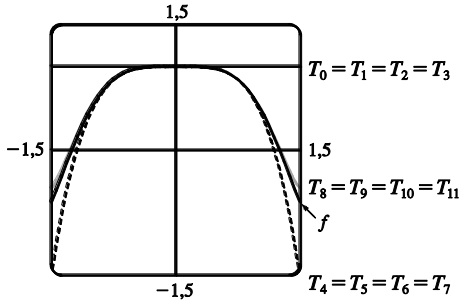
34. $$\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{x^3}\left[x-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]=\frac{1}{x^3}\left[x-x-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]=\frac{1}{x^3}\left[-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+3}}{(2n+3)!}\right]$$
$$=\frac{1}{x^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+3}}{(2n+3)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+3)!}$$

et cette série donne également la valeur attendue en $x = 0$ (soit 1/6); $R = \infty$.

35. $\cos x \overset{(16)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} \Rightarrow$

$$f(x)=\cos(x^2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x^2)^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n}}{(2n)!}$$
$$=1-\tfrac{1}{2}x^4+\tfrac{1}{24}x^8-\tfrac{1}{720}x^{12}+\cdots$$

La série de cos *x* converge pour tout *x*; il est donc vrai que la série de *f*(*x*) fait de même, c'est-à-dire que $R = \infty$. On remarque que, lorsque *n* augmente, $T_n(x)$ devient une meilleure approximation de *f*(*x*).

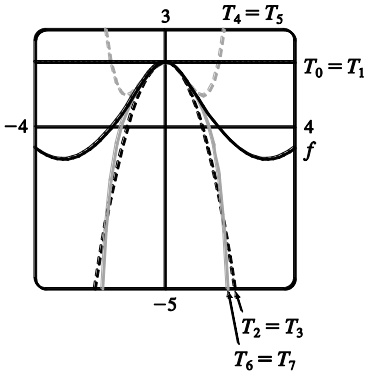


36. $e^x \overset{(11)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, donc $e^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}$. De plus, $\cos x \overset{(16)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$, donc

$$f(x)=e^{-x^2}+\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n!}+\frac{1}{(2n)!}\right)x^{2n}$$
$$=2-\frac{3}{2}x^2+\frac{13}{24}x^4-\frac{121}{720}x^6+\cdots.$$

Les séries de e^x et cos *x* convergent pour tout *x*; il est donc vrai que la série de *f*(*x*) fait de même, c'est-à-dire que $R = \infty$. Les graphiques de *f* et des quelques premiers polynômes de Taylor montrent que, lorsque *n* augmente, $T_n(x)$ devient une meilleure approximation de *f*(*x*) au voisinage de 0.

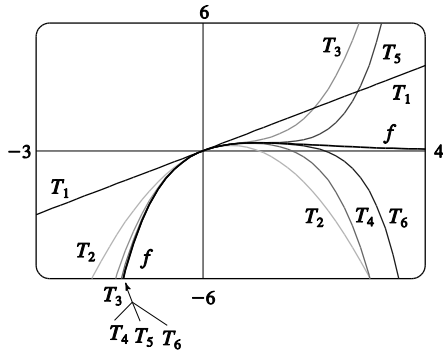
 © Groupe Modulo inc., 2013



37. $e^x \overset{(11)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, donc $e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$; par conséquent,

$$\begin{aligned} f(x) = xe^{-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} x^{n+1} \\ &= x - x^2 + \tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{1}{6}x^4 + \tfrac{1}{24}x^5 - \tfrac{1}{120}x^6 + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{(n-1)!} \end{aligned}$$

La série de e^x converge pour tout x; il est donc vrai que la série de $f(x)$ fait de même, c'est-à-dire que $R = \infty$. Les graphiques de f et des quelques premiers polynômes de Taylor montrent que, lorsque n augmente, $T_n(x)$ devient une meilleure approximation de $f(x)$ au voisinage de 0.

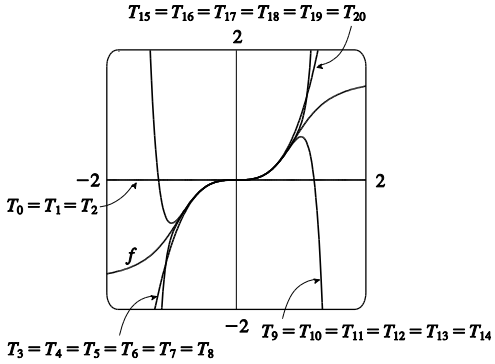


38. Selon le tableau 1, $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, donc

$$\begin{aligned} f(x) = \arctan(x^3) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x^3)^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{6n+3}}{2n+1} \\ &= x^3 - \tfrac{1}{3}x^9 + \tfrac{1}{5}x^{15} - \tfrac{1}{7}x^{21} + \cdots \end{aligned}$$

La série de arctan x a $R = 1$ et $|x^3| < 1 \iff |x| < 1$, donc la série de $f(x)$ a également $R = 1$. Les graphiques de f et des quelques premiers polynômes de Taylor montrent que, lorsque n augmente, $T_n(x)$ devient une meilleure approximation de $f(x)$ au voisinage de 0.

 © Groupe Modulo inc., 2013



39. $5° = 5°\left(\dfrac{\pi}{180°}\right) = \dfrac{\pi}{36}$ radians et $\cos x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$, donc $\cos\dfrac{\pi}{36} = 1 - \dfrac{(\pi/36)^2}{2!} + \dfrac{(\pi/36)^4}{4!} - \dfrac{(\pi/36)^6}{6!} + \cdots$.

Or, $1 - \dfrac{(\pi/36)^2}{2!} \approx 0{,}996\,19$ et l'addition de $\dfrac{(\pi/36)^4}{4!} \approx 2{,}4 \times 10^{-6}$ n'a aucune incidence sur la cinquième décimale, donc

$\cos 5° \approx 0{,}996\,19$, selon le théorème d'estimation des séries alternées.

40. $1/\sqrt[10]{e} = e^{-1/10}$ et $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$, donc $e^{-1/10} = 1 - \dfrac{1}{10} + \dfrac{(1/10)^2}{2!} - \dfrac{(1/10)^3}{3!} + \dfrac{(1/10)^4}{4!} - \dfrac{(1/10)^5}{5!} + \cdots$. Or,

$1 - \dfrac{1}{10} + \dfrac{(1/10)^2}{2!} - \dfrac{(1/10)^3}{3!} + \dfrac{(1/10)^4}{4!} \approx 0{,}904\,84$ et la soustraction de $\dfrac{(1/10)^5}{5!} \approx 8{,}3 \times 10^{-8}$ n'a aucune incidence sur la cinquième décimale, donc $e^{-1/10} \approx 0{,}904\,84$, selon le théorème d'estimation des séries alternées.

41. a) $1/\sqrt{1-x^2} = [1 + (-x^2)]^{-1/2} = 1 + (-\frac{1}{2})(-x^2) + \dfrac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}(-x^2)^2 + \dfrac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{3!}(-x^2)^3 + \cdots$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n}$$

b) $\arcsin x = \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = C + x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{(2n+1)2^n\cdot n!}x^{2n+1}$

$$= x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{(2n+1)2^n\cdot n!}x^{2n+1} \quad \text{puisque } 0 = \arcsin 0 = C.$$

42. a) $1/\sqrt[4]{1+x} = (1+x)^{-1/4} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{4}}{n}x^n = 1 - \frac{1}{4}x + \frac{(-\frac{1}{4})(-\frac{5}{4})}{2!}x^2 + \frac{(-\frac{1}{4})(-\frac{5}{4})(-\frac{9}{4})}{3!}x^3 + \cdots$

$$= 1 - \frac{1}{4}x + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot\cdots\cdot(4n-3)}{4^n\cdot n!}x^n$$

b) $1/\sqrt[4]{1+x} = 1 - \frac{1}{4}x + \frac{5}{32}x^2 - \frac{15}{128}x^3 + \frac{195}{2048}x^4 - \cdots$. $1/\sqrt[4]{1{,}1} = 1/\sqrt[4]{1+0{,}1}$, donc posons $x = 0{,}1$. La somme des quatre premiers termes est alors $1 - \frac{1}{4}(0{,}1) + \frac{5}{32}(0{,}1)^2 - \frac{15}{128}(0{,}1)^3 \approx 0{,}976$. Le cinquième terme est $\frac{195}{2048}(0{,}1)^4 \approx 0{,}000\,009\,5$ et n'a aucune incidence sur la troisième décimale de la somme; nous obtenons donc $1/\sqrt[4]{1{,}1} \approx 0{,}976$. (Il est à noter que le quatrième terme a une incidence sur la troisième décimale de la somme des trois premiers termes; nous devons donc calculer la somme en utilisant plus de trois termes.)

 © Groupe Modulo inc., 2013

43. $\cos x \overset{(16)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \Rightarrow \cos(x^3) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(x^3)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{6n}}{(2n)!} \Rightarrow$

$x\cos(x^3) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{6n+1}}{(2n)!} \Rightarrow \int x\cos(x^3)dx = C + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{6n+2}}{(6n+2)(2n)!}$, avec $R = \infty$.

44. $e^x \overset{(11)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \Rightarrow e^x - 1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \Rightarrow \frac{e^x-1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!} \Rightarrow \int\frac{e^x-1}{x}dx = C + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot n!}$, avec $R = \infty$.

45. $\cos x \overset{(16)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \Rightarrow \cos x - 1 = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \Rightarrow \frac{\cos x - 1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n)!} \Rightarrow \int\frac{\cos x - 1}{x}dx = C + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{2n\cdot(2n)!}$,

avec $R = \infty$.

46. $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \Rightarrow \arctan(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(x^2)^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{4n+2}}{2n+1} \Rightarrow \int\arctan(x^2)dx = C + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{4n+3}}{(2n+1)(4n+3)}$,

avec $R = 1$.

47. $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour $|x| < 1$, donc $x^3 \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+4}}{2n+1}$ pour $|x| < 1$ et

$\int x^3 \arctan x\, dx = C + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+5}}{(2n+1)(2n+5)}$. Puisque $\frac{1}{2} < 1$, nous obtenons

$\int_0^{1/2} x^3 \arctan x\, dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(1/2)^{2n+5}}{(2n+1)(2n+5)} = \frac{(1/2)^5}{1\cdot 5} - \frac{(1/2)^7}{3\cdot 7} + \frac{(1/2)^9}{5\cdot 9} - \frac{(1/2)^{11}}{7\cdot 11} + \cdots$. Or, $\frac{(1/2)^5}{1\cdot 5} - \frac{(1/2)^7}{3\cdot 7} + \frac{(1/2)^9}{5\cdot 9} \approx 0{,}0059$ et la

soustraction de $\frac{(1/2)^{11}}{7\cdot 11} \approx 6{,}3\times 10^{-6}$ n'a aucune incidence sur la quatrième décimale, donc $\int_0^{1/2} x^3 \arctan x\, dx \approx 0{,}0059$, selon le

théorème d'estimation des séries alternées.

48. $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ pour tout x, donc $\sin(x^4) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{8n+4}}{(2n+1)!}$ pour tout x et $\int\sin(x^4)dx = C + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{8n+5}}{(2n+1)!(8n+5)}$. Par

conséquent, $\int_0^1 \sin(x^4)dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n+1)!(8n+5)} = \frac{1}{1!\cdot 5} - \frac{1}{3!\cdot 13} + \frac{1}{5!\cdot 21} - \frac{1}{7!\cdot 29} + \cdots$. Or, $\frac{1}{1!\cdot 5} - \frac{1}{3!\cdot 13} + \frac{1}{5!\cdot 21} \approx 0{,}1876$ et la

soustraction de $\frac{1}{7!\cdot 29} \approx 6{,}84\times 10^{-6}$ n'a aucune incidence sur la quatrième décimale, donc $\int_0^1 \sin(x^4)dx \approx 0{,}1876$, selon le théorème

d'estimation des séries alternées.

49. $\sqrt{1+x^4} = (1+x^4)^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}(x^4)^n$, donc $\int\sqrt{1+x^4}dx = C + \sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ et, par conséquent, puisque 0,4 < 1, nous obtenons

 © Groupe Modulo inc., 2013

$$I = \int_0^{0,4} \sqrt{1+x^4}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} \frac{(0,4)^{4n+1}}{4n+1}$$
$$= (1)\frac{(0,4)^1}{0!} + \frac{\frac{1}{2}}{1!}\frac{(0,4)^5}{5} + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2!}\frac{(0,4)^9}{9} + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3!}\frac{(0,4)^{13}}{13} + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{4!}\frac{(0,4)^{17}}{17} + \cdots$$
$$= 0,4 + \frac{(0,4)^5}{10} - \frac{(0,4)^9}{72} + \frac{(0,4)^{13}}{208} - \frac{5(0,4)^{17}}{2176} + \cdots$$

Or, $\frac{(0,4)^9}{72} \approx 3,6\times10^{-6} < 5\times10^{-6}$, donc, selon le théorème d'estimation des séries alternées, $I \approx 0,4 + \frac{(0,4)^5}{10} \approx 0,401\,02$ (avec une précision de cinq décimales).

50. $\int_0^{0,5} x^2 e^{-x^2}\,dx = \int_0^{0,5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{n!}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n x^{2n+3}}{n!(2n+3)}\right]_0^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+3)2^{2n+3}}$ et puisque le terme avec $n = 2$ est $\frac{1}{1792} < 0,001$, utilisons $\sum_{n=0}^{1} \frac{(-1)^n}{n!(2n+3)2^{2n+3}} = \frac{1}{24} - \frac{1}{160} \approx 0,0354$.

51. $\lim_{x\to0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x\to0} \frac{x - (x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots)}{x^2} = \lim_{x\to0} \frac{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 + \cdots}{x^2}$
$= \lim_{x\to0} (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{5}x^3 + \cdots) = \frac{1}{2}$
puisque les séries de puissances sont des fonctions continues.

52. $\lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{1+x-e^x} = \lim_{x\to0} \frac{1 - (1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots)}{1 + x - (1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + \cdots)}$
$= \lim_{x\to0} \frac{\frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6 - \cdots}{-\frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{6!}x^6 - \cdots}$
$= \lim_{x\to0} \frac{\frac{1}{2!} - \frac{1}{4!}x^2 + \frac{1}{6!}x^4 - \cdots}{-\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}x - \frac{1}{4!}x^2 - \frac{1}{5!}x^3 - \frac{1}{6!}x^4 - \cdots} = \frac{\frac{1}{2} - 0}{-\frac{1}{2} - 0} = -1$
puisque les séries de puissances sont des fonctions continues.

53. $\lim_{x\to0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5} = \lim_{x\to0} \frac{(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots) - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5}$
$= \lim_{x\to0} \frac{\frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots}{x^5} = \lim_{x\to0} \left(\frac{1}{5!} - \frac{x^2}{7!} + \frac{x^4}{9!} - \cdots\right) = \frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$
puisque les séries de puissances sont des fonctions continues.

54. $\lim_{x\to0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x\to0} \frac{(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots) - x}{x^3} = \lim_{x\to0} \frac{\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots}{x^3} = \lim_{x\to0} (\frac{1}{3} + \frac{2}{15}x^2 + \cdots) = \frac{1}{3}$, puisque les séries de puissances sont des fonctions continues.

 © Groupe Modulo inc., 2013

55. Selon la formule 11, nous obtenons $e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots$; de plus, nous savons que $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$, selon la formule 16. Par conséquent, $e^{-x^2}\cos x = (1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \cdots)(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \cdots)$. En n'utilisant que les termes dont le degré ≤ 4, nous obtenons $e^{-x^2}\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^4 + \cdots = 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{25}{24}x^4 + \cdots$.

56. $\sec x = \frac{1}{\cos x} \overset{(16)}{=} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \cdots}$.

$$\begin{array}{l|l} 1 & \underline{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \ldots} \\ \underline{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{25}x^4 - \ldots} & 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \ldots \\ \quad \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \ldots & \\ \quad \underline{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots} & \\ \qquad \frac{5}{24}x^4 - \ldots & \\ \qquad \underline{\frac{5}{24}x^4 - \ldots} & \\ \qquad \ldots & \end{array}$$

Selon la division euclidienne qui précède, $\sec x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \cdots$.

57. $\frac{x}{\sin x} \overset{(15)}{=} \frac{x}{x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \cdots}$.

$$\begin{array}{l|l} x & \underline{x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \ldots} \\ \underline{x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \ldots} & 1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{360}x^4 + \ldots \\ \quad \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5 + \ldots & \\ \quad \underline{\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{36}x^5 + \ldots} & \\ \qquad \frac{7}{360}x^5 - \ldots & \\ \qquad \underline{\frac{7}{360}x^4 - \ldots} & \\ \qquad \ldots & \end{array}$$

Selon la division euclidienne qui précède, $\frac{x}{\sin x} = 1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{360}x^4 + \cdots$.

58. Selon le tableau 1, nous obtenons $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$, de même que $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$. Par conséquent, $y = e^x \ln(1+x) = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\right)$. En n'utilisant que les termes dont le degré ≤ 3, nous obtenons $e^x \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^3 + \cdots = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$.

59. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{4n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^4)^n}{n!} = e^{-x^4}$, selon la formule 11.

 © Groupe Modulo inc., 2013

60. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n}}{6^{2n}(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\frac{\pi}{6})^{2n}}{(2n)!}=\cos\tfrac{\pi}{6}=\tfrac{\sqrt{3}}{2}$, selon la formule 16.

61. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^n}{n5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(3/5)^n}{n}=\ln\left(1+\frac{3}{5}\right)$ [selon le tableau 1] $=\ln\dfrac{8}{5}$

62. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{5^n n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3/5)^n}{n!}=e^{3/5}$, selon la formule 11.

63. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n+1}}{4^{2n+1}(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\frac{\pi}{4})^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sin\tfrac{\pi}{4}=\tfrac{1}{\sqrt{2}}$, selon la formule 15.

64. $\displaystyle 1-\ln 2+\frac{(\ln 2)^2}{2!}-\frac{(\ln 2)^3}{3!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\ln 2)^n}{n!}=e^{-\ln 2}=(e^{\ln 2})^{-1}=2^{-1}=\tfrac{1}{2}$, selon la formule 11.

65. $\displaystyle 3+\frac{9}{2!}+\frac{27}{3!}+\frac{81}{4!}+\cdots=\frac{3^1}{1!}+\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\frac{3^4}{4!}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}-1=e^3-1$, selon la formule 11.

66. $\displaystyle\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}-\frac{1}{7\cdot 2^7}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(1/2)^{2n+1}}{2n+1}=\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$ [selon le tableau 1]

67. Si p est un polynôme de degré n, alors $p^{(i)}(x) = 0$ pour $i > n$; sa série de Taylor en a est donc $p(x)=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\frac{p^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$. Posons

$x - a = 1$, de sorte que $x = a + 1$. Alors, $p(a+1)=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\frac{p^{(i)}(a)}{i!}$.

Comme ceci est vrai quelque soit a, remplaçons a par x : $p(x+1)=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\frac{p^{(i)}(x)}{i!}$

68. Le coefficient de x^{58} dans la série de Maclaurin de $f(x) = (1+x^3)^{30}$ est $\dfrac{f^{(58)}(0)}{58!}$. La série binomiale de $f(x)$ est

toutefois $(1+x^3)^{30}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{30}{n}x^{3n}$. Elle ne comprend donc que des puissances de x qui sont des multiples de 3 et, par conséquent, le

coefficient de x^{58} is 0. Donc, $f^{(58)}(0) = 0$.

69. Supposons que $|f'''(x)| \le M$, donc $f'''(x) \le M$ pour $a \le x \le a + d$. Or, $\int_a^x f'''(t)dt \le \int_a^x M\ dt \quad \Rightarrow$

$f''(x) - f''(a) \le M(x-a) \quad \Rightarrow \quad f''(x) \le f''(a) + M(x-a)$. Par conséquent, $\int_a^x f''(t)dt \le \int_a^x [f''(a) + M(t-a)]dt \quad \Rightarrow$

$f'(x) - f'(a) \le f''(a)(x-a) + \frac{1}{2}M(x-a)^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) \le f'(a) + f''(a)(x-a) + \frac{1}{2}M(x-a)^2 \quad \Rightarrow$

 © Groupe Modulo inc., 2013

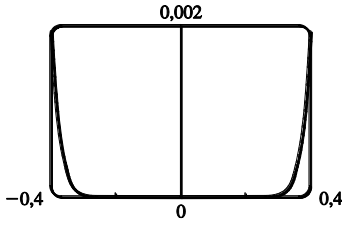
$\int_a^x f'(t)dt \le \int_a^x [f'(a) + f''(a)(t-a) + \frac{1}{2}M(t-a)^2]dt \Rightarrow f(x) - f(a) \le f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{6}M(x-a)^3$. Donc,

$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 \le \frac{1}{6}M(x-a)^3$. Cependant,

$R_2(x) = f(x) - T_2(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$, donc $R_2(x) \le \frac{1}{6}M(x-a)^3$. Une démonstration similaire utilisant $f''(x) \ge -M$ montre que $R_2(x) \ge -\frac{1}{6}M(x-a)^3$. Donc, $|R_2(x_2)| \le \frac{1}{6}M|x-a|^3$. Bien que nous ayons supposé que $x > a$, un calcul similaire démontre que cette inégalité est également vraie si $x < a$.

70. a) $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \ne 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, donc $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-1/x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1/x}{e^{1/x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{2e^{1/x^2}} = 0$ (en utilisant la règle de l'Hospital et en simplifiant à l'avant-dernière étape). De façon similaire, nous pouvons utiliser la définition de la dérivée et la règle de l'Hospital pour montrer que $f''(0) = 0, f^{(3)}(0) = 0, \ldots, f^{(n)}(0) = 0$, de sorte que la série de Maclaurin de f est constituée entièrement de termes nuls. Cependant, puisque $f(x) \ne 0$ sauf lorsque $x = 0$, nous constatons que f ne peut être égale à sa série de Maclaurin, sauf lorsque $x = 0$.

b)



Le graphique semble montrer que la courbe de la fonction est extrêmement plate à l'origine. En fait, on pourrait dire qu'elle est « infiniment plate » en $x = 0$, puisque toutes les dérivées de la fonction sont 0 à ce point.

71. a) $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n \Rightarrow g'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \binom{k}{n} nx^{n-1}$, donc

$$\begin{aligned}
(1+x)g'(x) &= (1+x)\sum_{n=1}^{\infty} \binom{k}{n} nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{k}{n} nx^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{k}{n} nx^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \binom{k}{n+1}(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} nx^n \quad \left[\begin{array}{l}\text{remplacer } n \text{ par } n+1 \\ \text{dans la première série}\end{array}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)(k-n)}{(n+1)!}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n)\frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!}\right]x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{(n+1)!}[(k-n)+n]x^n \\
&= k\sum_{n=0}^{\infty} \frac{k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)}{n!}x^n = k\sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = kg(x)
\end{aligned}$$

Par conséquent, $g'(x) = \dfrac{kg(x)}{1+x}$.

b) $h(x) = (1+x)^{-k} g(x) \Rightarrow$

 © Groupe Modulo inc., 2013

$$\begin{aligned} h'(x) &= -k(1+x)^{-k-1}g(x) + (1+x)^{-k}g'(x) \quad \text{[règle du produit]} \\ &= -k(1+x)^{-k-1}g(x) + (1+x)^{-k}\frac{kg(x)}{1+x} \quad \text{[selon la sous-question a)]} \\ &= -k(1+x)^{-k-1}g(x) + k(1+x)^{-k-1}g(x) = 0 \end{aligned}$$

c) La sous-question b) montre que $h(x)$ doit être constante pour $x \in]-1, 1[$, donc $h(x) = h(0) = 1$ pour $x \in]-1, 1[$. Par conséquent, $h(x) = 1 = (1+x)^{-k}g(x) \quad \Leftrightarrow \quad g(x) = (1+x)^k$ pour $x \in]-1, 1[$.

72. En utilisant la série binomiale pour développer $\sqrt{1+x}$ en série de puissances comme à l'exemple 9, nous obtenons

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-3)x^n}{2^n\cdot n!}$$, donc $(1-x^2)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{2^n\cdot n!}x^{2n}$

et $\sqrt{1-e^2\sin^2\theta} = 1 - \frac{1}{2}e^2\sin^2\theta - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{2^n\cdot n!}e^{2n}\sin^{2n}\theta$. Par conséquent,

$$L = 4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-e^2\sin^2\theta}\,d\theta = 4a\int_0^{\pi/2}\left(1 - \frac{1}{2}e^2\sin^2\theta - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{2^n\cdot n!}e^{2n}\sin^{2n}\theta\right)d\theta$$
$$= 4a\left[\frac{\pi}{2} - \frac{e^2}{2}S_1 - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{n!}\left(\frac{e^2}{2}\right)^n S_n\right]$$

où $S_n = \int_0^{\pi/2}\sin^{2n}\theta\,d\theta = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n}\frac{\pi}{2}$ voir exercice 3.1.46.

$$\begin{aligned} L &= 4a\left(\frac{\pi}{2}\right)\left[1 - \frac{e^2}{2}\cdot\frac{1}{2} - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{n!}\left(\frac{e^2}{2}\right)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n}\right] \\ &= 2\pi a\left[1 - \frac{e^2}{4} - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{e^{2n}}{2^n}\cdot\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot\cdots\cdot(2n-3)^2(2n-1)}{n!\cdot 2^n\cdot n!}\right] \\ &= 2\pi a\left[1 - \frac{e^2}{4} - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{e^{2n}}{4^n}\left(\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{n!}\right)^2(2n-1)\right] \\ &= 2\pi a\left[1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3e^4}{64} - \frac{5e^6}{256} - \cdots\right] = \frac{\pi a}{128}(256 - 64e^2 - 12e^4 - 5e^6 - \cdots) \end{aligned}$$

Projet de laboratoire

Une limite difficile à atteindre

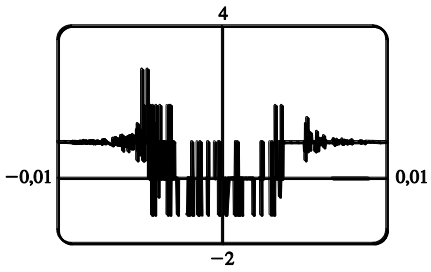
1. $f(x) = \dfrac{n(x)}{d(x)} = \dfrac{\sin(\tan x) - \tan(\sin x)}{\arcsin(\arctan x) - \arctan(\arcsin x)}$

Le tableau de valeurs de la fonction a été établie, avec une précision de 10 décimales, à l'aide du logiciel Maple. Les résultats de ce projet varieront selon le logiciel de calcul symbolique utilisé et le niveau de précision recherché. Il semble que lorsque $x \to 0^+$, $f(x) \to \frac{10}{3}$. Puisque f est une fonction paire, nous obtenons $f(x) \to \frac{10}{3}$ lorsque $x \to 0$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

x	$f(x)$
1	1,1838
0,1	0,9821
0,01	2,0000
0,001	3,3333
0,000 1	3,3333

2. Le graphique ne permet pas de tirer de conclusion au sujet de la limite de f lorsque $x \to 0$.



3. La limite est une indétermination de la forme $\frac{0}{0}$. En appliquant la règle de l'Hospital de façon répétée, nous obtenons six fois la forme $\frac{0}{0}$. Finalement, lors de la septième application, nous obtenons $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{n^{(7)}(x)}{d^{(7)}(x)} = \dfrac{-168}{-168} = 1$.

4. $$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{n(x)}{d(x)} \overset{\text{LCS}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{30}x^7 - \frac{29}{756}x^9 + \cdots}{-\frac{1}{30}x^7 + \frac{13}{756}x^9 + \cdots}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{(-\frac{1}{30}x^7 - \frac{29}{756}x^9 + \cdots)/x^7}{(-\frac{1}{30}x^7 + \frac{13}{756}x^9 + \cdots)/x^7} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{30} - \frac{29}{756}x^2 + \cdots}{-\frac{1}{30} + \frac{13}{756}x^2 + \cdots} = \frac{-\frac{1}{30}}{-\frac{1}{30}} = 1$$

On remarque que $n^{(7)}(x) = d^{(7)}(x) = -\frac{7!}{30} = -\frac{5040}{30} = -168$, ce qui correspond au résultat obtenu au problème 3.

5. La commande limite produit le résultat $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

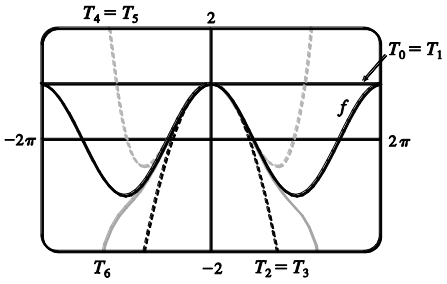
6. Les résultats étranges obtenus (avec un degré de précision de seulement 10 décimales) doivent être causés par le fait que les termes qui sont soustraits au numérateur et au dénominateur ont des valeurs très rapprochées lorsque $|x|$ est petit. Par conséquent, les différences sont imprécises (ont peu de décimales exactes).

 © Groupe Modulo inc., 2013

6.10 Quelques applications des polynômes de Taylor

1. a)

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$T_n(x)$
0	$\cos x$	1	1
1	$-\sin x$	0	1
2	$-\cos x$	-1	$1-\frac{1}{2}x^2$
3	$\sin x$	0	$1-\frac{1}{2}x^2$
4	$\cos x$	1	$1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4$
5	$-\sin x$	0	$1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4$
6	$-\cos x$	-1	$1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{720}x^6$



b)

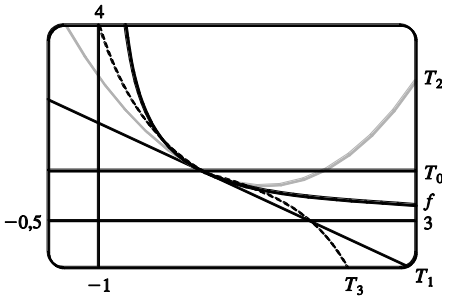
x	f	$T_0 = T_1$	$T_2 = T_3$	$T_4 = T_5$	T_6
$\frac{\pi}{4}$	0,7071	1	0,6916	0,7074	0,7071
$\frac{\pi}{2}$	0	1	−0,2337	0,0200	−0,0009
π	−1	1	−3,9348	0,1239	−1,2114

c) Lorsque n augmente, $T_n(x)$ est une bonne approximation de $f(x)$ sur un intervalle de plus en plus grand.

2. a)

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(1)$	$T_n(x)$
0	x^{-1}	1	1
1	$-x^{-2}$	-1	$1-(x-1)=2-x$
2	$2x^{-3}$	2	$1-(x-1)+(x-1)^2=x^2-3x+3$
3	$-6x^{-4}$	-6	$1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3=-x^3+4x^2-6x+4$

 © Groupe Modulo inc., 2013



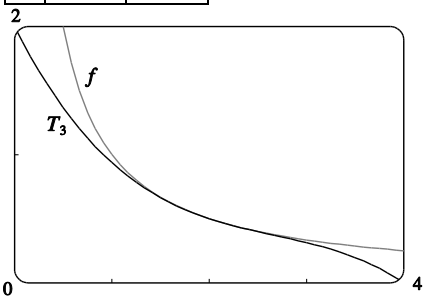
b)

x	f	T_0	T_1	T_2	T_3
0,9	$1,\overline{1}$	1	1,1	1,11	1,111
1,3	0,769 2	1	0,7	0,79	0,763

c) Lorsque n augmente, $T_n(x)$ est une bonne approximation de $f(x)$ sur un intervalle de plus en plus grand.

3.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(2)$
0	$1/x$	$\frac{1}{2}$
1	$-1/x^2$	$-\frac{1}{4}$
2	$2/x^3$	$\frac{1}{4}$
3	$-6/x^4$	$-\frac{3}{8}$

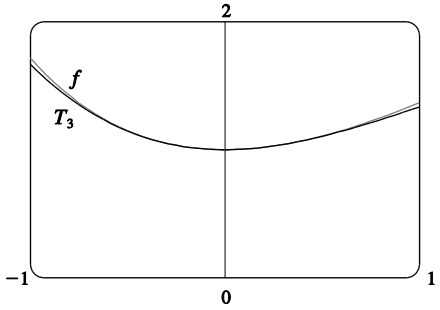


$$T_3(x) = \sum_{n=0}^{3} \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n$$
$$= \frac{\frac{1}{2}}{0!} - \frac{\frac{1}{4}}{1!}(x-2) + \frac{\frac{1}{4}}{2!}(x-2)^2 - \frac{\frac{3}{8}}{3!}(x-2)^3$$
$$= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}(x-2) + \tfrac{1}{8}(x-2)^2 - \tfrac{1}{16}(x-2)^3$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

4.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$x + e^{-x}$	1
1	$1 - e^{-x}$	0
2	e^{-x}	1
3	$-e^{-x}$	−1

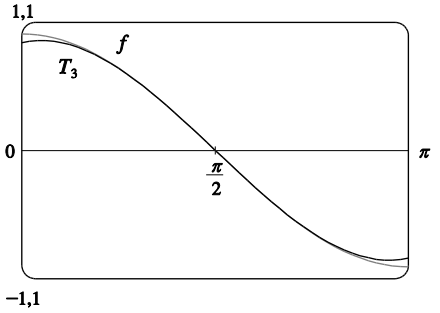


$$T_3(x) = \sum_{n=0}^{3} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n$$
$$= \frac{1}{0!} + \frac{0}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 = 1 + \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{6}x^3$$

5.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(\pi/2)$
0	$\cos x$	0
1	$-\sin x$	− 1
2	$-\cos x$	0
3	$\sin x$	1

$$T_3(x) = \sum_{n=0}^{3} \frac{f^{(n)}(\pi/2)}{n!}(x-\tfrac{\pi}{2})^n$$
$$= -(x-\tfrac{\pi}{2}) + \tfrac{1}{6}(x-\tfrac{\pi}{2})^3$$

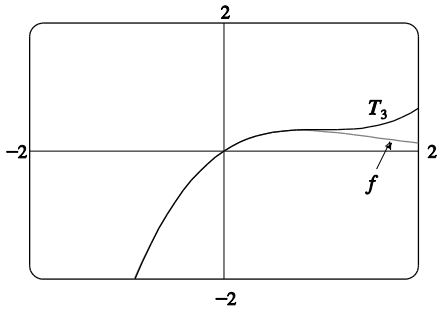


 © Groupe Modulo inc., 2013

6.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$e^{-x}\sin x$	0
1	$e^{-x}(\cos x - \sin x)$	1
2	$-2e^{-x}\cos x$	–2
3	$2e^{-x}(\cos x + \sin x)$	2

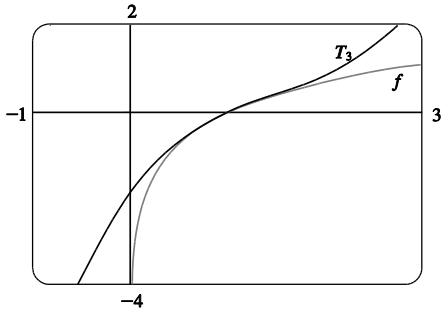
$$T_3(x) = \sum_{n=0}^{3} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = x - x^2 + \tfrac{1}{3}x^3$$



7.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(1)$
0	$\ln x$	0
1	$1/x$	1
2	$-1/x^2$	–1
3	$2/x^3$	2

$$\begin{aligned} T_3(x) &= \sum_{n=0}^{3} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n \\ &= 0 + \frac{1}{1!}(x-1) + \frac{-1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 \\ &= (x-1) - \tfrac{1}{2}(x-1)^2 + \tfrac{1}{3}(x-1)^3 \end{aligned}$$

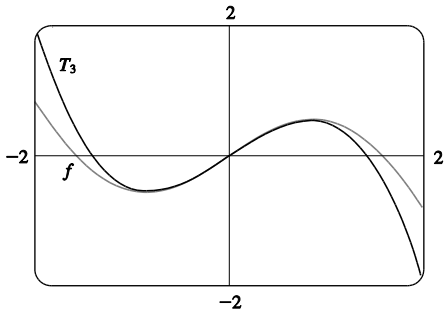


 © Groupe Modulo inc., 2013

8.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$x\cos x$	0
1	$-x\sin x+\cos x$	1
2	$-x\cos x-2\sin x$	0
3	$x\sin x-3\cos x$	−3

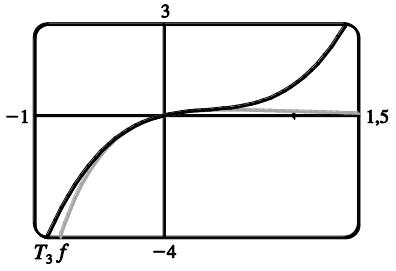
$$T_3(x)=\sum_{n=0}^{3}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$
$$=0+\frac{1}{1!}x+0+\frac{-3}{3!}x^3=x-\frac{1}{2}x^3$$



9.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	xe^{-2x}	0
1	$(1-2x)e^{-2x}$	1
2	$4(x-1)e^{-2x}$	−4
3	$4(3-2x)e^{-2x}$	12

$$T_3(x)=\sum_{n=0}^{3}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\tfrac{0}{1}\cdot 1+\tfrac{1}{1}x^1+\tfrac{-4}{2}x^2+\tfrac{12}{6}x^3=x-2x^2+2x^3$$

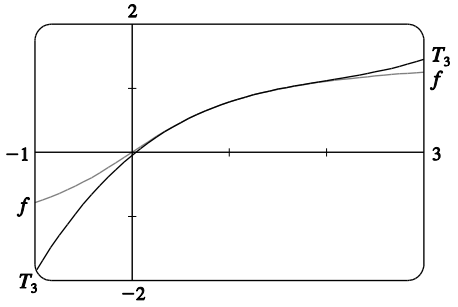


 © Groupe Modulo inc., 2013

10.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(1)$
0	$\arctan x$	$\frac{\pi}{4}$
1	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{2}$
2	$\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$	$-\frac{1}{2}$
3	$\dfrac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$	$\frac{1}{2}$

$$T_3(x)=\sum_{n=0}^{3}\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n=\frac{\pi}{4}+\frac{1/2}{1}(x-1)^1+\frac{-1/2}{2}(x-1)^2+\frac{1/2}{6}(x-1)^3$$
$$=\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{1}{2}(x-1)-\tfrac{1}{4}(x-1)^2+\tfrac{1}{12}(x-1)^3$$



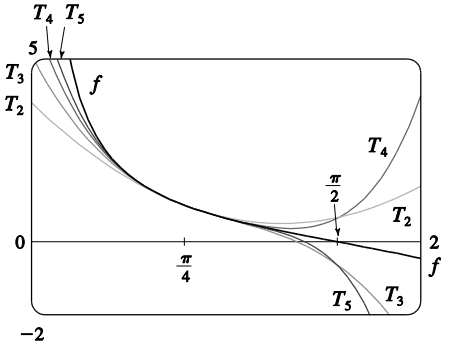
11. À l'aide d'un logiciel de calcul symbolique, vous pourrez probablement trouver facilement les polynômes de Taylor de $f(x) = \cot x$.

Voici les valeurs de $f^{(n)}(\pi/4)$ pour $n = 0$ à $n = 5$.

n	0	1	2	3	4	5
$f^{(n)}(\pi/4)$	1	−2	4	−16	80	−512

$$T_5(x)=\sum_{n=0}^{5}\frac{f^{(n)}(\pi/4)}{n!}(x-\tfrac{\pi}{4})^n$$
$$=1-2(x-\tfrac{\pi}{4})+2(x-\tfrac{\pi}{4})^2-\tfrac{8}{3}(x-\tfrac{\pi}{4})^3+\tfrac{10}{3}(x-\tfrac{\pi}{4})^4-\tfrac{64}{15}(x-\tfrac{\pi}{4})^5$$

Pour $n = 2$ à $n = 5$, $T_n(x)$ est le polynôme constitué de tous les termes jusqu'à, et y compris, le terme $(x-\frac{\pi}{4})^n$.

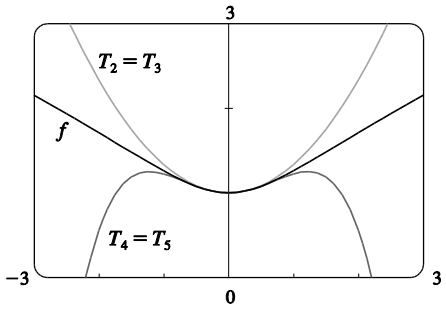


 © Groupe Modulo inc., 2013

12. À l'aide d'un logiciel de calcul symbolique, vous pourrez probablement trouver facilement les polynômes de Taylor de $f(x) = \sqrt[3]{1+x^2}$. Voici les valeurs de $f^{(n)}(0)$ pour $n = 0$ à $n = 5$.

n	0	1	2	3	4	5
$f^{(n)}(0)$	1	0	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{8}{3}$	0

$$T_5(x) = \sum_{n=0}^{5} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 1 + \tfrac{1}{3}x^2 - \tfrac{1}{9}x^4$$



Pour $n = 2$ à $n = 5$, $T_n(x)$ est le polynôme constitué de tous les termes jusqu'à, et y compris, le terme x^n. Remarquons que $T_2 = T_3$ et $T_4 = T_5$.

13.

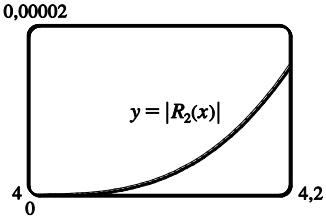
n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(4)$
0	$\sqrt{x}$	2
1	$\frac{1}{2}x^{-1/2}$	$\frac{1}{4}$
2	$-\frac{1}{4}x^{-3/2}$	$-\frac{1}{32}$
3	$\frac{3}{8}x^{-5/2}$	

a) $$f(x) = \sqrt{x} \approx T_2(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1/32}{2!}(x-4)^2$$
$$= 2 + \tfrac{1}{4}(x-4) - \tfrac{1}{64}(x-4)^2$$

b) $|R_2(x)| \le \dfrac{M}{3!}|x-4|^3$, où $|f'''(x)| \le M$. Or, $4 \le x \le 4{,}2 \quad \Rightarrow$

$|x-4| \le 0{,}2 \quad \Rightarrow \quad |x-4|^3 \le 0{,}008$. Puisque $f'''(x)$ est décroissante sur l'intervalle [4; 4,2], nous pouvons utiliser $M = |f'''(4)| = \frac{3}{8}4^{-5/2} = \frac{3}{256}$; donc, $|R_2(x)| \le \dfrac{3/256}{6}(0{,}008) = \dfrac{0{,}008}{512} = 0{,}000\,015\,625$.

c)



 © Groupe Modulo inc., 2013

Le graphique de $|R_2(x)| = |\sqrt{x} - T_2(x)|$ semble montrer que l'erreur est inférieure à $1{,}52 \times 10^{-5}$ sur l'intervalle [4; 4,2].

14.

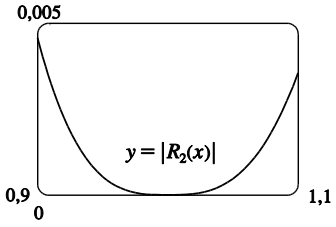
n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(1)$
0	x^{-2}	1
1	$-2x^{-3}$	-2
2	$6x^{-4}$	6
3	$-24x^{-5}$	

a) $f(x) = x^{-2} \approx T_2(x) = 1 - 2(x-1) + \dfrac{6}{2!}(x-1)^2 = 1 - 2(x-1) + 3(x-1)^2$

b) $|R_2(x)| \le \dfrac{M}{3!}|x-1|^3$, où $|f'''(x)| \le M$. Or, $0{,}9 \le x \le 1{,}1 \Rightarrow |x-1| \le 0{,}1 \Rightarrow |x-1|^3 \le 0{,}001$. Puisque $f'''(x)$ est décroissante sur l'intervalle [0,9; 1,1], nous pouvons utiliser $M = |f'''(0{,}9)| = \dfrac{24}{(0{,}9)^5}$; donc,

$$|R_2(x)| \le \frac{24/(0{,}9)^5}{6}(0{,}001) = \frac{0{,}004}{0{,}590\,49} \approx 0{,}006\,774\,04 .$$

c)



Le graphique de $|R_2(x)| = |x^{-2} - T_2(x)|$ semble montrer que l'erreur est inférieure à 0,0046 sur l'intervalle [0,9; 1,1].

15.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(1)$
0	$x^{2/3}$	1
1	$\frac{2}{3}x^{-1/3}$	$\frac{2}{3}$
2	$-\frac{2}{9}x^{-4/3}$	$-\frac{2}{9}$
3	$\frac{8}{27}x^{-7/3}$	$\frac{8}{27}$
4	$-\frac{56}{81}x^{-10/3}$	

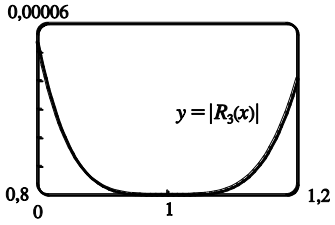
a) $$f(x) = x^{2/3} \approx T_3(x) = 1 + \tfrac{2}{3}(x-1) - \frac{2/9}{2!}(x-1)^2 + \frac{8/27}{3!}(x-1)^3$$
$$= 1 + \tfrac{2}{3}(x-1) - \tfrac{1}{9}(x-1)^2 + \tfrac{4}{81}(x-1)^3$$

b) $|R_3(x)| \le \dfrac{M}{4!}|x-1|^4$, où $|f^{(4)}(x)| \le M$. Or, $0{,}8 \le x \le 1{,}2 \Rightarrow$

 © Groupe Modulo inc., 2013

$|x-1| \le 0,2 \;\Rightarrow\; |x-1|^4 \le 0,0016$. Puisque $|f^{(4)}(x)|$ est décroissante sur l'intervalle [0,8; 1,2], nous pouvons utiliser $M = |f^{(4)}(0,8)| = \frac{56}{81}(0,8)^{-10/3}$; donc, $|R_3(x)| \le \dfrac{\frac{56}{81}(0,8)^{-10/3}}{24}(0,001\,6) \approx 0,000\,096\,97$.

c)



Le graphique de $|R_3(x)| = |x^{2/3} - T_3(x)|$ semble montrer que l'erreur est inférieure à 0,000 053 3 sur l'intervalle [0,8; 1,2].

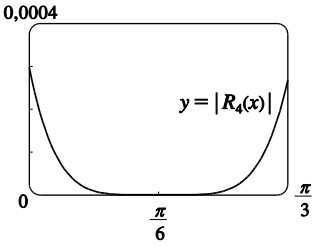
16.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(\pi/6)$
0	$\sin x$	1/2
1	$\cos x$	$\sqrt{3}/2$
2	$-\sin x$	$-1/2$
3	$-\cos x$	$-\sqrt{3}/2$
4	$\sin x$	1/2
5	$\cos x$	

a) $f(x) = \sin x \approx T_4(x)$
$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \frac{\pi}{6}) - \frac{1}{4}(x - \frac{\pi}{6})^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}(x - \frac{\pi}{6})^3 + \frac{1}{48}(x - \frac{\pi}{6})^4$

b) $|R_4(x)| \le \dfrac{M}{5!}|x - \frac{\pi}{6}|^5$, où $|f^{(5)}(x)| \le M$. Or, $0 \le x \le \frac{\pi}{3} \;\Rightarrow\; -\frac{\pi}{6} \le x - \frac{\pi}{6} \le \frac{\pi}{6} \;\Rightarrow\; |x - \frac{\pi}{6}| \le \frac{\pi}{6} \;\Rightarrow\; |x - \frac{\pi}{6}|^5 \le (\frac{\pi}{6})^5$. Puisque $|f^{(5)}(x)|$ est décroissante sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{3}]$, nous pouvons utiliser $M = |f^{(5)}(x)| = \cos 0 = 1$; donc, $|R_4(x)| \le \dfrac{1}{5!}(\frac{\pi}{6})^5 \approx 0,000\,328$.

c)



Le graphique de $|R_4(x)| = |\sin x - T_4(x)|$ semble montrer que l'erreur est inférieure à 0,000 297 sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{3}]$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

17.

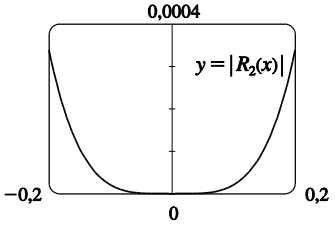
n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$\sec x$	1
1	$\sec x \tan x$	0
2	$\sec x\,(2\sec^2 x - 1)$	1
3	$\sec x \tan x\,(6\sec^2 x - 1)$	

a) $f(x) = \sec x \approx T_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2$

b) $|R_2(x)| \le \dfrac{M}{3!}|x|^3$, où $|f^{(3)}(x)| \le M$. Or, $-0,2 \le x \le 0,2 \;\Rightarrow\; |x| \le 0,2 \;\Rightarrow\; |x|^3 \le (0,2)^3$. $f^{(3)}(x)$ est une fonction impaire qui est croissante sur l'intervalle [0; 0,2] puisque sec x et tan x sont croissantes sur l'intervalle [0; 0,2];

donc, $|f^{(3)}(x)| \le f^{(3)}(0,2) \approx 1,085\,158\,892$. Par conséquent, $|R_2(x)| \le \dfrac{f^{(3)}(0,2)}{3!}(0,2)^3 \approx 0,001\,447$.

c)



Le graphique de $|R_2(x)| = |\sec x - T_2(x)|$ semble montrer que l'erreur est inférieure à 0,000 339 sur l'intervalle [–0,2; 0,2].

18.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(1)$
0	$\ln(1 + 2x)$	$\ln 3$
1	$2/(1 + 2x)$	$\frac{2}{3}$
2	$-4/(1 + 2x)^2$	$-\frac{4}{9}$
3	$16/(1 + 2x)^3$	$\frac{16}{27}$
4	$-96/(1 + 2x)^4$	

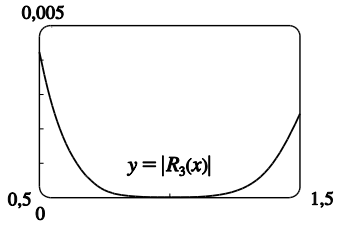
a) $f(x) = \ln(1 + 2x) \approx T_3(x)$

$$= \ln 3 + \tfrac{2}{3}(x-1) - \frac{4/9}{2!}(x-1)^2 + \frac{16/27}{3!}(x-1)^3$$

b) $|R_3(x)| \le \dfrac{M}{4!}|x-1|^4$, où $|f^{(4)}(x)| \le M$.. Or, $0,5 \le x \le 1,5 \;\Rightarrow\; -0,5 \le x-1 \le 0,5 \;\Rightarrow\; |x-1| \le 0,5 \;\Rightarrow\; |x-1|^4 \le \frac{1}{16}$; en posant $x = 0,5$, nous obtenons $M = 6$, donc $|R_3(x)| \le \dfrac{6}{4!} \cdot \dfrac{1}{16} = \dfrac{1}{64} = 0,015\,625$

 © Groupe Modulo inc., 2013

c)



Le graphique de $|R_3(x)| = |\ln(1 + 2x) - T_3(x)|$ semble montrer que l'erreur est inférieure à 0,005 sur l'intervalle [0,5; 1,5].

19.

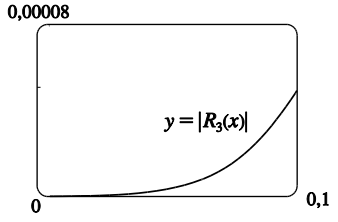
n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	e^{x^2}	1
1	$e^{x^2}(2x)$	0
2	$e^{x^2}(2+4x^2)$	2
3	$e^{x^2}(12x+8x^3)$	0
4	$e^{x^2}(12+48x^2+16x^4)$	

a) $f(x) = e^{x^2} \approx T_3(x) = 1 + \dfrac{2}{2!}x^2 = 1 + x^2$

b) $|R_3(x)| \le \dfrac{M}{4!}|x|^4$, où $|f^{(4)}(x)| \le M$. Or, $0 \le x \le 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad x^4 \le (0{,}1)^4$; en posant $x = 0{,}1$, nous obtenons

$$|R_3(x) \le \frac{e^{0,01}(12 + 0{,}48 + 0{,}001\,6)}{24}(0{,}1)^4 \approx 0{,}000\,06.$$

c)



Le graphique de $|R_3(x)| = |e^{x^2} - T_3(x)|$ semble montrer que l'erreur est inférieure à 0,000 051 sur l'intervalle [0; 0,1].

20.

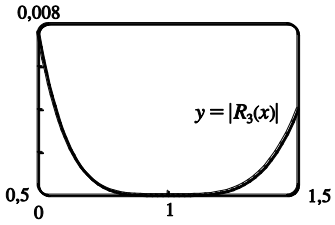
n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(1)$
0	$x \ln x$	0
1	$\ln x + 1$	1
2	$1/x$	1
3	$-1/x^2$	-1
4	$2/x^3$	

a) $f(x) = x\ln x \approx T_3(x) = (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^2$

 © Groupe Modulo inc., 2013

b) $|R_3(x)| \le \dfrac{M}{4!}|x-1|^4$, où $\left|f^{(4)}(x)\right| \le M$. Or, $0{,}5 \le x \le 1{,}5 \;\Rightarrow\; |x-1| \le \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; |x-1|^4 \le \frac{1}{16}$. Puisque $\left|f^{(4)}(x)\right|$ est décroissante sur l'intervalle [0,5; 1,5], nous pouvons utiliser $M = \left|f^{(4)}(0{,}5)\right| = 2/(0{,}5)^3 = 16$, donc $|R_3(x)| \le \frac{16}{24}(1/16) = \frac{1}{24} = 0{,}041\overline{6}$.

c)



Le graphique de $|R_3(x)| = |x \ln x - T_3(x)|$ semble montrer que l'erreur est inférieure à 0,007 6 sur l'intervalle [0,5; 1,5].

21.

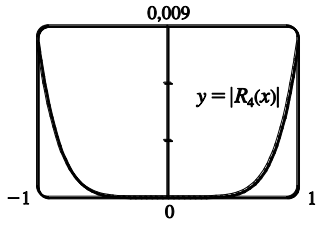
n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$x \sin x$	0
1	$\sin x + x \cos x$	0
2	$2 \cos x - x \sin x$	2
3	$-3 \sin x - x \cos x$	0
4	$-4 \cos x - x \sin x$	-4
5	$5 \sin x - x \cos x$	0

a) $f(x) = x \sin x \approx T_4(x) = \dfrac{2}{2!}(x-0)^2 + \dfrac{-4}{4!}(x-0)^4 = x^2 - \dfrac{1}{6}x^4$

b) $|R_4(x)| \le \dfrac{M}{5!}|x|^5$, où $|f^{(5)}(x)| \le M$. Or, $-1 \le x \le 1 \;\Rightarrow\; |x| \le 1$ et le graphique de $f^{(5)}(x)$ montre que $|f^{(5)}(x)| \le 5$ pour $-1 \le x \le 1$.

Par conséquent, nous pouvons utiliser $M = 5$ et obtenir $|R_4(x)| \le \dfrac{5}{5!} \cdot 1^5 = \dfrac{1}{24} = 0{,}041\overline{6}$

c)



Le graphique de $|R_4(x)| = |x \sin x - T_4(x)|$ semble montrer que l'erreur est inférieure à 0,008 2 sur l'intervalle [−1; 1].

 © Groupe Modulo inc., 2013

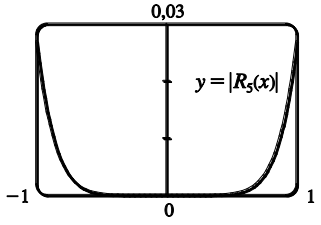
22.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}$	0
1	$e^{2x}-e^{-2x}$	2
2	$2\left(e^{2x}-e^{-2x}\right)$	0
3	$4\left(e^{2x}-e^{-2x}\right)$	8
4	$8\left(e^{2x}-e^{-2x}\right)$	0
5	$16\left(e^{2x}-e^{-2x}\right)$	32
6	$32\left(e^{2x}-e^{-2x}\right)$	

a) $f(x)=\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}\approx T_5(x)=2x+\frac{8}{3!}x^3+\frac{32}{5!}x^5=2x+\frac{4}{3}x^3+\frac{4}{15}x^5$

b) $|R_5(x)|\le\dfrac{M}{6!}|x|^6$, où $|f^{(6)}(x)|\le M$. Pour x sur l'intervalle [–1, 1], nous obtenons $|x|\le 1$. Puisque $f^{(6)}(x)$ est une fonction impaire croissante sur l'intervalle [–1, 1], nous constatons que $|f^{(6)}(x)|\le f^{(6)}(1)=32\left(e^2-e^{-2}\right)\approx 232{,}119$; nous pouvons donc utiliser $M=232{,}12$ et obtenir $|R_5(x)|\le\frac{232{,}12}{720}\cdot 1^6\approx 0{,}3224$

c)



Le graphique de $|R_5(x)|=\left|\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}-T_5(x)\right|$ semble montrer que l'erreur est inférieure à 0,027 sur l'intervalle [–1, 1].

23. Selon l'exercice 5, $\cos x=-(x-\frac{\pi}{2})+\frac{1}{6}(x-\frac{\pi}{2})^3+R_3(x)$, où $|R_3(x)|\le\dfrac{M}{4!}|x-\frac{\pi}{2}|^4$ avec $\left|f^{(4)}(x)\right|=|\cos x|\le M=1$. Or, $x=80^\circ=(90^\circ-10^\circ)=(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{18})=\frac{4\pi}{9}$ radians, donc l'erreur est $|R_3(\frac{4\pi}{9})|\le\frac{1}{24}(\frac{\pi}{18})^4\approx 0{,}000\ 039$, ce qui signifie que notre estimation *n*'aurait *pas* cinq décimales exactes. Cependant, $T_3 = T_4$ et nous pouvons donc utiliser $|R_4(\frac{4\pi}{9})|\le\frac{1}{120}(\frac{\pi}{18})^5\approx 0{,}000\ 001$. Par conséquent, avec cinq décimales exactes, $\cos 80°\approx -(-\frac{\pi}{18})+\frac{1}{6}(-\frac{\pi}{18})^3\approx 0{,}173\ 65$.

24. Selon l'exercice 16, $\sin x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(x-\frac{\pi}{6})-\frac{1}{4}(x-\frac{\pi}{6})^2-\frac{\sqrt{3}}{12}(x-\frac{\pi}{6})^3+\frac{1}{48}(x-\frac{\pi}{6})^4+R_4(x)$, où $|R_4(x)|\le\dfrac{M}{5!}|x-\frac{\pi}{6}|^5$ avec $|f^{(5)}(x)|=|\cos x|\le M=1$. Or, $x=38°=(30°+8°)=(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{45})$ radians**,** donc l'erreur est $|R_4(\frac{38\pi}{180})|\le\frac{1}{120}(\frac{2\pi}{45})^5\approx 0{,}000\ 000\ 44$, ce qui

 © Groupe Modulo inc., 2013

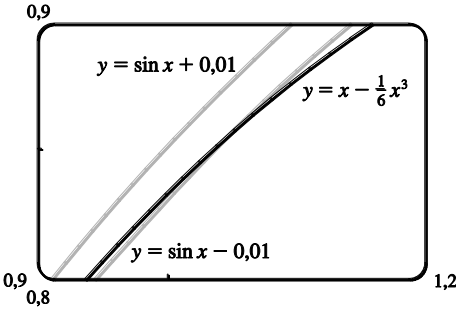
signifie que notre estimation aura cinq décimales exactes. Par conséquent, avec cinq décimales exactes, $\sin 38^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{2\pi}{45}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{2\pi}{45}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{2\pi}{45}\right)^3 + \frac{1}{48}\left(\frac{2\pi}{45}\right)^4 \approx 0,615\,66$.

25. Toutes les dérivées de e^x sont e^x, donc $|R_n(x)| \le \frac{e^x}{(n+1)!}|x|^{n+1}$, où $0 < x < 0,1$. En posant $x = 0,1$, $R_n(0,1) \le \frac{e^{0,1}}{(n+1)!}(0,1)^{n+1} < 0,00001$ et nous trouvons par tâtonnement que $n = 3$ satisfait à cette inégalité puisque $R_3(0,1) < 0,000\,004\,6$. Par conséquent, en additionnant les quatre termes de la série de Maclaurin de e^x correspondant à $n = 0$, 1, 2 et 3, nous pouvons estimer $e^{0,1}$ à moins de 0,000 01 près. (En fait, cette somme est $1,105\,1\overline{6}$ et $e^{0,1} \approx 1,105\,17$.)

26. Selon le tableau 1 à la section 6.9, $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ pour $|x| < 1$. Par conséquent, $\ln 1,4 = \ln(1+0,4) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(0,4)^n}{n}$.

Puisque c'est une série alternée, l'erreur est inférieure au premier terme non utilisé, selon le théorème d'estimation des séries alternées, et nous trouvons que $|a_6| = (0,4)^6/6 \approx 0,0007 < 0,001$. Nous devons donc utiliser les cinq premiers termes (non nuls) de la série Maclaurin pour obtenir la précision désirée. (En fait, cette somme est d'environ 0,336 98 et $\ln 1,4 \approx 0,336\,47$.)

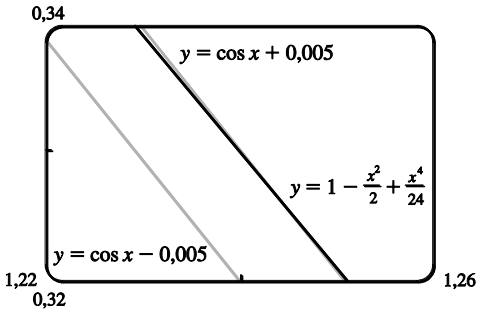
27. $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots$ Selon le théorème d'estimation des séries alternées, l'erreur dans l'approximation $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3$ est inférieure à $\left|\frac{1}{5!}x^5\right| < 0,01 \iff |x^5| < 120(0,01) \iff |x| < (1,2)^{1/5} \approx 1,037$. Les courbes $y = x - \frac{1}{6}x^3$ et $y = \sin x - 0,01$ se croisent en $x \approx 1,043$; le graphique corrobore donc notre estimation. Puisque la fonction sinus et l'approximation donnée sont toutes deux des fonctions impaires, nous n'avons à vérifier que l'estimation pour $x > 0$. Par conséquent, la plage de valeurs de x désirée est $-1,037 < x < 1,037$.



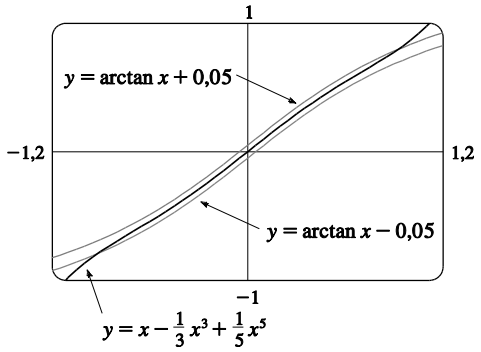
28. $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$ Selon le théorème d'estimation des séries alternées, l'erreur est inférieure à $\left|-\frac{1}{6!}x^6\right| < 0,005 \iff |x^6| < 720(0,005) \iff |x| < (3,6)^{1/6} \approx 1,238$. Les courbes $y = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4$ et $y = \cos x + 0,005$ se croisent en $x \approx 1,244$; le graphique corrobore donc notre estimation. Puisque la fonction cosinus et l'approximation donnée sont toutes deux

 © Groupe Modulo inc., 2013

des fonctions impaires, nous n'avons à vérifier que l'estimation pour $x > 0$. Par conséquent, la plage de valeurs de x désirée est $-1{,}238 < x < 1{,}238$.



29. $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$ Selon le théorème d'estimation des séries alternées, l'erreur est inférieure à $\left|-\frac{1}{7}x^7\right| < 0{,}05 \iff |x^7| < 0{,}35 \iff |x| < (0{,}35)^{1/7} \approx 0{,}8607$. Les courbes $y = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$ et $y = \arctan x + 0{,}05$ se croisent à $x \approx 0{,}924\,5$; le graphique confirme donc notre estimation. Puisque la fonction arctangente et l'approximation donnée sont toutes deux des fonctions impaires, nous n'avons à vérifier que l'estimation pour $x > 0$. Par conséquent, la plage de valeurs de x désirée est $-0{,}86 < x < 0{,}86$.



30. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(4)}{n!}(x-4)^4 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{3^n(n+1)n!}(x-4)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(n+1)}(x-4)^n$. Or, $f(5) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n$ est une série alternée qui satisfait à i) $b_{n+1} < b_n$ et à ii) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$; donc, selon le théorème d'estimation des séries alternées, $|R_5(5)| = |f(5) - T_5(5)| \le b_6$ et $b_6 = \frac{1}{3^6(7)} = \frac{1}{5103} \approx 0{,}000\,196 < 0{,}000\,2$; c'est-à-dire que le polynôme de Taylor d'ordre 5 approche $f(5)$ avec une erreur inférieure à 0,0002.

31. Posons que $s(t)$ représente la fonction position de la voiture et, pour des raisons pratiques, posons $s(0) = 0$. La vitesse de la voiture est $v(t) = s'(t)$ et l'accélération est $a(t) = s''(t)$; le polynôme de Taylor d'ordre 2 est donc $T_2(t) = s(0) + v(0)t + \frac{a(0)}{2}t^2 = 20t + t^2$. Nous estimons que la distance parcourue durant la prochaine seconde sera $s(1) \approx T_2(1) = 20 + 1 = 21$ m. Il ne serait pas raisonnable

 © Groupe Modulo inc., 2013

d'utiliser la fonction $T_2(t)$ pour estimer la distance parcourue durant une minute, puisqu'il serait impossible à la voiture de maintenir une accélération de 2 m/s^2 aussi longtemps (si elle en était capable, sa vitesse finale serait de 140 m/s ≈ 504 km/h!).

32. a)

n	$\rho^{(n)}(t)$	$\rho^{(n)}(20)$
0	$\rho_{20}e^{\alpha(t-20)}$	ρ_{20}
1	$\alpha\rho_{20}e^{\alpha(t-20)}$	$\alpha\rho_{20}$
2	$\alpha^2\rho_{20}e^{\alpha(t-20)}$	$\alpha^2\rho_{20}$

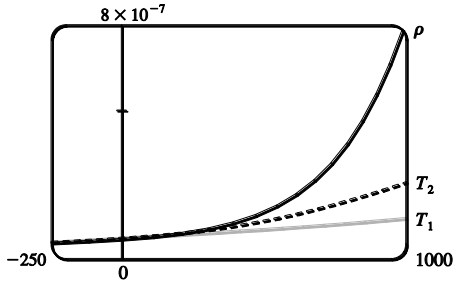
L'approximation linéaire est

$$T_1(t) = \rho(20) + \rho'(20)(t-20) = \rho_{20}\left[1+\alpha(t-20)\right]$$

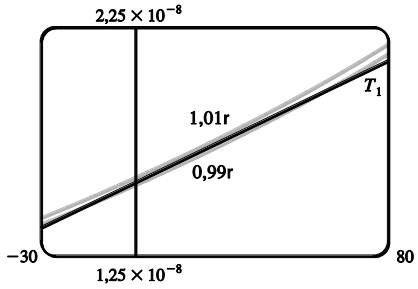
L'approximation quadratique est

$$\begin{aligned} T_2(t) &= \rho(20) + \rho'(20)(t-20) + \frac{\rho''(20)}{2}(t-20)^2 \\ &= \rho_{20}\left[1+\alpha(t-20)+\tfrac{1}{2}\alpha^2(t-20)^2\right] \end{aligned}$$

b)



c)



Le graphique semble montrer que $T_1(t)$ est à moins de un pour cent près de $\rho(t)$, c'est-à-dire que $0{,}99\rho(t) \le T_1(t) \le 1{,}01\rho(t)$, pour $-14^\circ\text{C} \le t \le 58^\circ\text{C}$.

33. $E = \dfrac{q}{D^2} - \dfrac{q}{(D+d)^2} = \dfrac{q}{D^2} - \dfrac{q}{D^2(1+d/D)^2} = \dfrac{9}{D^2}\left[1-\left(1+\dfrac{d}{D}\right)^{-2}\right]$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

Utilisons la série binômiale pour développer $(1 + d/D)^{-2}$:

$$E = \frac{q}{D^2}\left[1-\left(1-2\left(\frac{d}{D}\right)+\frac{2\cdot 3}{2!}\left(\frac{d}{D}\right)^2-\frac{2\cdot 3\cdot 4}{3!}\left(\frac{d}{D}\right)^3+\cdots\right)\right] = \frac{q}{D^2}\left[2\left(\frac{d}{D}\right)-3\left(\frac{d}{D}\right)^2+4\left(\frac{d}{D}\right)^3-\cdots\right]$$
$$\approx \frac{q}{D^2}\cdot 2\left(\frac{d}{D}\right) = 2qd\cdot\frac{1}{D^3}$$

lorsque D est de beaucoup supérieur à d, c'est-à-dire lorsque P est loin du dipôle.

34. a) $\frac{n_1}{\ell_o}+\frac{n_2}{\ell_i}=\frac{1}{R}\left(\frac{n_2 s_i}{\ell_i}-\frac{n_1 s_o}{\ell_o}\right)$ [équation 1] où

$$\ell_o = \sqrt{R^2+(s_o+R)^2-2R(s_o+R)\cos\phi} \text{ et } \ell_i = \sqrt{R^2+(s_i-R)^2+2R(s_i-R)\cos\phi} \text{ [équation 2]}$$

En utilisant $\cos\phi \approx 1$, nous obtenons

$$\ell_o = \sqrt{R^2+(s_o+R)^2-2R(s_o+R)} = \sqrt{R^2+s_o^2+2Rs_o+R^2-2Rs_o-2R^2} = \sqrt{s_o^2} = s_o$$

et, de façon similaire, $\ell_i = s_i$. Par conséquent, l'équation 1 devient $\frac{n_1}{s_o}+\frac{n_2}{s_i}=\frac{1}{R}\left(\frac{n_2 s_i}{s_o}-\frac{n_1 s_o}{s_o}\right) \Rightarrow \frac{n_1}{s_o}+\frac{n_2}{s_i}=\frac{n_2-n_1}{R}$.

b) En utilisant $\cos\phi \approx 1-\frac{1}{2}\phi^2$ dans l'équation 2 , nous obtenons

$$\ell_o = \sqrt{R^2+(s_o+R)^2-2R(s_o+R)(1-\tfrac{1}{2}\phi^2)}$$
$$= \sqrt{R^2+s_o^2+2Rs_o+R^2-2Rs_o+Rs_o\phi^2-2R^2+R^2\phi^2} = \sqrt{s_o^2+Rs_o\phi^2+R^2\phi^2}$$

Comme nous prévoyons utiliser le développement de la série binomiale $(1 + x)^k \approx 1 + kx$, nous pouvons écrire la dernière expression pour ℓ_o de la façon suivante :

$s_o\sqrt{1+\phi^2\left(\frac{R}{s_o}+\frac{R^2}{s_o^2}\right)}$ et, de façon similaire, $s_i\sqrt{1+\phi^2\left(\frac{R}{s_i}+\frac{R^2}{s_i^2}\right)}$. Par conséquent, selon l'équation 1,

$$\frac{n_1}{\ell_o}+\frac{n_2}{\ell_i}=\frac{1}{R}\left(\frac{n_2 s_i}{\ell_i}-\frac{n_2 s_0}{\ell_o}\right) \Leftrightarrow n_1\ell_o^{-1}+n_2\ell_i^{-1}=\frac{n_2}{R}\cdot\frac{s_i}{\ell_i}-\frac{n_1}{R}\cdot\frac{s_o}{\ell_o} \Leftrightarrow$$

$$\frac{n_1}{s_0}\left[1+\phi^2\left(\frac{R}{s_0}+\frac{R^2}{s_0^2}\right)\right]^{-1/2}+\frac{n_2}{s_i}\left[1-\phi^2\left(\frac{R}{s_i}-\frac{R^2}{s_i^2}\right)\right]^{-1/2}$$
$$=\frac{n_2}{R}\left[1-\phi^2\left(\frac{R}{s_i}+\frac{R^2}{s_i^2}\right)\right]^{-1/2}-\frac{n_1}{R}\left[1+\phi^2\left(\frac{R}{s_0}+\frac{R^2}{s_0^2}\right)\right]^{-1/2}$$

En effectuant l'approximation des expressions pour ℓ_o^{-1} et ℓ_i^{-1} à l'aide des deux premiers termes de leur série binomiale, nous obtenons

 © Groupe Modulo inc., 2013

$$\frac{n_1}{s_o}\left[1-\tfrac{1}{2}\phi^2\left(\frac{R}{s_o}+\frac{R}{s_o^2}\right)\right]+\frac{n_2}{s_i}\left[1+\tfrac{1}{2}\phi^2\left(\frac{R}{s_i}-\frac{R^2}{s_i^2}\right)\right]$$

$$=\frac{n_2}{R}\left[1+\tfrac{1}{2}\phi^2\left(\frac{R}{s_i}-\frac{R^2}{s_i^2}\right)\right]-\frac{n_1}{R}\left[1-\tfrac{1}{2}\phi^2\left(\frac{R}{s_o}-\frac{R^2}{s_o^2}\right)\right] \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{n_1}{s_o}-\frac{n_1\phi^2}{2s_o}\left(\frac{R}{s_o}+\frac{R^2}{s_o^2}\right)+\frac{n_2}{s_i}+\frac{n_2\phi^2}{2s_i}\left(\frac{R}{s_i}-\frac{R^2}{s_i^2}\right)=\frac{n_2}{R}+\frac{n_2\phi^2}{2R}\left(\frac{R}{s_i}-\frac{R^2}{s_i^2}\right)-\frac{n_1}{R}+\frac{n_1\phi^2}{2R}\left(\frac{R}{s_o}+\frac{R^2}{s_o^2}\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{n_1}{s_o}+\frac{n_2}{s_i}=\frac{n_2}{R}-\frac{n_1}{R}+\frac{n_1\phi^2}{2s_o}\left(\frac{R}{s_o}+\frac{R^2}{s_o^2}\right)+\frac{n_1\phi^2}{2R}\left(\frac{R}{s_o}+\frac{R^2}{s_o^2}\right)+\frac{n_2\phi^2}{2R}\left(\frac{R}{s_i}-\frac{R^2}{s_i^2}\right)-\frac{n_2\phi^2}{2s_i}\left(\frac{R}{s_i}+\frac{R^2}{s_i^2}\right)$$

$$=\frac{n_2-n_1}{R}+\frac{n_1\phi^2}{2}\left(\frac{R}{s_o}+\frac{R^2}{s_o^2}\right)\left(\frac{1}{s_o}+\frac{1}{R}\right)+\frac{n_2\phi^2}{2}\left(\frac{R}{s_i}+\frac{R^2}{s_i^2}\right)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{s_i}\right)$$

$$=\frac{n_2-n_1}{R}+\frac{n_1\phi^2R^2}{2s_o}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{s_o}\right)\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{s_o}\right)+\frac{n_2\phi^2R^2}{2s_i}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{s_i}\right)\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{s_i}\right)$$

$$=\frac{n_2-n_1}{R}+\phi^2R^2\left[\frac{n_1}{2s_o}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{s_o}\right)^2+\frac{n_2}{2s_i}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{s_i}\right)^2\right]$$

La figure 8 montre que sin $\phi = h/R$. Donc, en effectuant l'approximation de sin ϕ avec ϕ, nous obtenons $h = R\phi$ et $h^2 = \phi^2R^2$ et, par conséquent, l'équation 4, tel que désiré

35. On remarque d'abord que

$$2(\sqrt{d^2+R^2}-d)=2\left[\sqrt{d^2}\sqrt{1+\frac{R^2}{d^2}}-d\right]$$

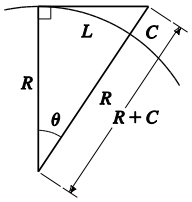
$$\approx 2\left[d\left(1+\frac{R^2}{d^2}\cdot\frac{1}{2}+\cdots\right)-d\right] \quad \left[\text{utiliser la série binomiale } 1+\tfrac{1}{2}x+\cdots \text{pour } \sqrt{1+x}\right]$$

$$=2\left[\left(d+\frac{R^2}{2d}+\cdots\right)-d\right]\approx\frac{R^2}{d}$$

puisque, lorsque d est grand, les autres termes sont négligeables. Or, $V=2\pi k_e\sigma(\sqrt{d^2+R^2}-d)\approx\dfrac{\pi k_eR^2\sigma}{d}$, selon l'approximation précédente.

36. a) L est la longueur de l'arc sous-tendu par l'angle θ, donc $L = R\theta \Rightarrow \theta = L/R$.

Or, $\sec\theta=(R+C)/R \Rightarrow R\sec\theta=R+C \Rightarrow C=R\sec\theta-R=R\sec(L/R)-R.$



b) Trouvons tout d'abord un polynôme de Taylor $T_4(x)$ de $f(x) = \sec x$ en $x = 0$.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	sec x	1
1	sec x tan x	0
2	sec x(2 tan^2x + 1)	1
3	sec x tan x(6 tan^2x + 5)	0
4	sec x(24 tan^4x + 28tan^2x + 5)	5

Par conséquent, $f(x)=\sec x \approx T_4(x)=\frac{1}{2!}(x-0)^2+\frac{5}{4!}(x-0)^4=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4$. Selon la sous-question a),

$$C \approx R\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{L}{R}\right)^2+\frac{5}{24}\left(\frac{L}{R}\right)^4\right]-R=R+\frac{1}{2}R\cdot\frac{L^2}{R^2}+\frac{5}{24}R\cdot\frac{L^4}{R^4}-R=\frac{L^2}{2R}+\frac{5L^4}{24R^3}.$$

c) En posant que L = 100 km et R = 6370 km, la formule à la sous-question a) donne

$C = R\sec(L/R) - R = 6370\sec(100/6370) - 6370 \approx 0{,}785\,009\,965\,44$ km. La formule à la sous-question b) donne

$C \approx \dfrac{L^2}{2R}+\dfrac{5L^4}{24R^3}=\dfrac{100^2}{2\cdot 6370}+\dfrac{5\cdot 100^4}{24\cdot 6370^3}\approx 0{,}785\,009\,957\,36$ km. La différence entre ces deux résultats est de seulement

0,000 000 008 08 km ou 0,000 008 08 m!

37. a)
$$\begin{aligned}
4\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} &= 4\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\pi/2}[1+(-k^2\sin^2 x)]^{-1/2}dx \\
&= 4\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\pi/2}\left[1-\frac{1}{2}(-k^2\sin^2 x)+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2!}(-k^2\sin^2 x)^2-\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{3!}(-k^2\sin^2 x)^2+\cdots\right]dx \\
&= 4\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\pi/2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)k^2\sin^2 x+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)k^4\sin^4 x-\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)k^6\sin^6 x+\cdots\right]dx \\
&= 4\sqrt{\frac{L}{g}}\left[\frac{\pi}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)k^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\pi}{2}\right)k^4+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{\pi}{2}\right)k^6+\cdots\right] \\
&\quad \text{diviser l'intégrale et utiliser le résultat de l'exercice 3.1.46} \\
&= 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left[1+\frac{1^2}{2^2}k^2+\frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2}k^4+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}k^6+\cdots\right]
\end{aligned}$$

b) La première des deux inégalités est vraie parce que tous les termes de la série sont positifs. En ce qui concerne la seconde,

$$\begin{aligned}
T &= 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left[1+\frac{1^2}{2^2}k^2+\frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2}k^4+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}k^6+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2}k^8+\cdots\right] \\
&\le 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left[1+\tfrac{1}{4}k^2+\tfrac{1}{4}k^4+\tfrac{1}{4}k^6+\tfrac{1}{4}k^8+\cdots\right]
\end{aligned}$$

Les termes entre parenthèses (après le premier) forment une série géométrique avec $a=\frac{1}{4}k^2$ et $r=k^2=\sin^2\left(\frac{1}{2}\theta_0\right)<1$.

Donc, $T \le 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}\left[1+\dfrac{k^2/4}{1-k^2}\right]=2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}\dfrac{4-3k^2}{4-4k^2}$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

c) Effectuons les changements de variables $L = 1$, $g = 9{,}8$ et $k = \sin(10^\circ/2) \approx 0{,}087\,16$; l'inégalité à la sous-question b) devient $2{,}010\,90 \le T \le 2{,}010\,93$, donc $T \approx 2{,}0109$. L'estimation $T \approx 2\pi\sqrt{L/g} \approx 2{,}0071$ diffère d'environ 0,2 %. Si $\theta_0 = 42^\circ$, alors $k \approx 0{,}358\,37$ et l'inégalité devient $2{,}071\,53 \le T \le 2{,}081\,03$, donc $T \approx 2{,}0763$. L'estimation effectuée en n'utilisant qu'un terme est la même et la différence entre les deux estimations augmente à environ 3,4 %.

38. En utilisant $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ avec $n = 1$ et $x = r$, nous obtenons $f(r) = T_1(r) + R_1(r)$, où T_1 est le polynôme de Taylor d'ordre 1 de f en a. Parce que $a = x_n$, $f(r) = f(x_n) + f'(x_n)(r - x_n) + R_1(r)$. Cependant, r est une racine de f, donc $f(r) = 0$ et nous obtenons $0 = f(x_n) + f'(x_n)(r - x_n) + R_1(r)$. En soustrayant à chaque membre $f(x_n) + f'(x_n)(r - x_n)$ nous obtenons $f'(x_n)(x_n - r) - f(x_n) = R_1(r)$. En divisant chaque membre par $f'(x_n)$, nous obtenons $x_n - r - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \dfrac{R_1(r)}{f'(x_n)}$. Selon la formule pour la méthode de Newton, le membre de gauche de l'équation qui précède est $x_{n+1} - r$, donc $|x_{n+1} - r| = \left|\dfrac{R_1(r)}{f'(x_n)}\right|$. L'inégalité de Taylor donne $|R_1(r)| \le \dfrac{|f''(r)|}{2!}|r - x_n|^2$. En considérant $|f''(x)| \le M$ et $|f'(x)| \ge K$, nous obtenons $|x_{n+1} - r| \le \dfrac{M}{2K}|x_n - r|^2$.

APPLICATION

Le rayonnement stellaire

1. Si nous écrivons $f(\lambda) = \dfrac{8\pi hc\lambda^{-5}}{e^{hc/(\lambda kT)} - 1} = \dfrac{a\lambda^{-5}}{e^{b/(\lambda T)} - 1}$, alors, lorsque $\lambda \to 0^+$, on a une indétermination du type ∞/∞, et lorsque $\lambda \to \infty$, on a une indétermination du type 0/0; dans les deux cas, nous pouvons donc appliquer la règle de l'Hospital. Tout d'abord,

$$\lim_{\lambda\to\infty} f(\lambda) \overset{\text{H}}{=} \lim_{\lambda\to\infty} \frac{a(-5\lambda^{-6})}{-\dfrac{bT}{(\lambda T)^2}e^{b/(\lambda T)}} = 5\frac{aT}{b}\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\lambda^2\lambda^{-6}}{e^{b/(\lambda T)}} = 5\frac{aT}{b}\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\lambda^{-4}}{e^{b/(\lambda T)}} = 0$$

De plus,

$$\lim_{\lambda\to0^+} f(\lambda) \overset{\text{H}}{=} 5\frac{aT}{b}\lim_{\lambda\to0^+}\frac{\lambda^{-4}}{e^{b/(\lambda T)}} \overset{\text{H}}{=} 5\frac{aT}{b}\lim_{\lambda\to0^+}\frac{-4\lambda^{-5}}{-\dfrac{bT}{(\lambda T)^2}e^{b/(\lambda T)}} = 20\frac{aT^2}{b^2}\lim_{\lambda\to0^+}\frac{\lambda^{-3}}{e^{b/(\lambda T)}}$$

Ce résultat est toujours indéterminé, mais il faut noter que chaque fois que nous appliquons la règle de l'Hospital, nous ajoutons un facteur additionnel de λ dans le numérateur, ainsi qu'un facteur constant, et le dénominateur demeure inchangé. Donc, si nous appliquons la règle de l'Hospital trois fois de plus, l'exposant de λ dans le numérateur deviendra 0. En d'autres mots, pour des valeurs $\{k_i\}$, toutes constantes,

$$\lim_{\lambda\to0^+} f(\lambda) \overset{\text{H}}{=} k_1\lim_{\lambda\to0^+}\frac{\lambda^{-3}}{e^{b/(\lambda T)}} \overset{\text{H}}{=} k_2\lim_{\lambda\to0^+}\frac{\lambda^{-2}}{e^{b/(\lambda T)}} \overset{\text{H}}{=} k_3\lim_{\lambda\to0^+}\frac{\lambda^{-1}}{e^{b/(\lambda T)}} \overset{\text{H}}{=} k_4\lim_{\lambda\to0^+}\frac{1}{e^{b/(\lambda T)}} = 0$$

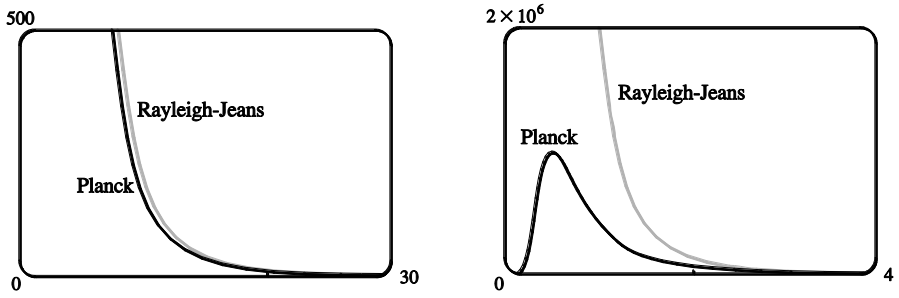
 © Groupe Modulo inc., 2013

2. Développons le dénominateur de la loi de Planck en série de Taylor $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ avec $x = \frac{hc}{\lambda kT}$ et servons-nous du fait que si λ est grand, alors tous les termes subséquents dans le développement de Taylor sont négligeables lorsque comparés au premier; nous pouvons donc effectuer une approximation à l'aide du polynôme de Taylor T_1:

$$f(\lambda) = \frac{8\pi hc\lambda^{-5}}{e^{hc/(\lambda kT)} - 1} = \frac{8\pi hc\lambda^{-5}}{\left[1 + \frac{hc}{\lambda kT} + \frac{1}{2!}\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right)^3 + \cdots\right] - 1} \approx \frac{8\pi hc\lambda^{-5}}{\left(1 + \frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1} = \frac{8\pi kT}{\lambda^4}.$$

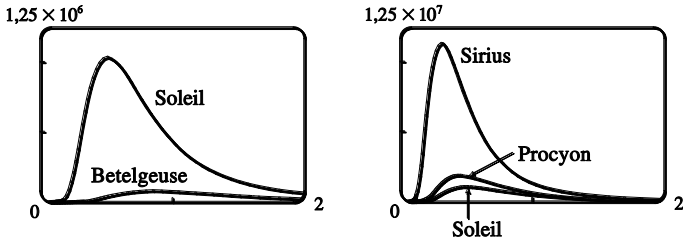
Ceci est la loi de Rayleigh-Jeans.

3. Afin de convertir à μm, nous remplaçons λ par $\lambda/10^6$ dans les deux lois. La première figure montre que les deux lois sont similaires lorsque λ est grand. La seconde figure montre que les deux lois diffèrent beaucoup dans le cas des courtes longueurs d'onde (la loi de Planck donne un maximum en $\lambda \approx 0{,}51$ μm; la loi de Rayleigh-Jeans ne donne ni minimum ni maximum.).



4. Le graphique au problème 3 montre que $f(\lambda)$ atteint un maximum à $\lambda \approx 0{,}51$ μm, selon la loi de Planck.

5.



Lorsque T augmente, l'aire totale sous la courbe augmente, comme on pourrait s'y attendre : plus chaude est l'étoile, plus elle émet d'énergie. De plus, lorsque T augmente, la coordonnée λ du maximum diminue, donc plus la température est haute, plus courte sera la longueur d'onde maximum (et, en conséquence, la longueur d'onde moyenne) de la lumière émise. Ceci est la raison pour laquelle Sirius est une étoile bleue et Bételgeuse une étoile rouge : la plus grande partie de la lumière de Sirius a une longueur d'onde assez courte, c'est-à-dire une fréquence plus haute, vers l'extrémité bleue du spectre, alors que la plus grande partie de la lumière de Bételgeuse a une fréquence moins élevée, vers l'extrémité rouge du spectre.

 © Groupe Modulo inc., 2013

6. Révision

Compréhension des concepts

1. a) Voir définition 6.1.1.

b) Voir définition 6.2.2.

c) Les termes de la suite $\{a_n\}$ s'approchent de 3 lorsque n aumente.

d) En ajoutant suffisamment de termes à la série, nous pouvons faire en sorte que les sommes partielles soient aussi rapprochées de 3 que nous le désirons.

2. a) Voir la définition à la page 295

b) Une suite est monotone si elle n'est ni croissante ni décroissante.

c) Selon le théorème 6.1.12, toute suite monotone bornée est convergente.

3. a) Voir théorème 5 à la section 6.2.

b) La série $p\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ converge si $p > 1$.

4. Si $\sum a_n = 3$, alors $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ et $\lim_{n\to\infty} s_n = 3$

5. a) *Le critère de divergence :* Si $\lim_{n\to\infty} a_n$ n'existe pas ou si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0,$ alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

b) *Le critère de l'intégrale :* Supposons que f est une fonction continue, positive et décroissante sur $[1, \infty[$ et soit $a_n = f(n)$. Alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si et seulement si l'intégrale impropre $\int_1^{\infty} f(x)dx$ converge. En d'autres mots :

(i) Si $\int_1^{\infty} f(x)dx$ converge, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(ii) Si $\int_1^{\infty} f(x)dx$ diverge, alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

c) *Le critère de comparaison* : Supposons que $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont des séries à termes positifs.

(i) Si $\sum b_n$ converge et $a_n \leq b_n$ pour tout n, alors $\sum a_n$ converge également.

(ii) Si $\sum b_n$ diverge et $a_n \geq b_n$ pour tout n, alors $\sum a_n$ diverge également.

d) *Le critère de comparaison par une limite :* Supposons que $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont des séries à termes positifs. Si $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = c$ où c est un nombre fini et $c > 0$, alors les deux séries convergent ou divergent.

e) *Le critère des séries alternées :* Si la série alternée $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - b_6 + \cdots [b_n > 0]$ satisfait à i) $b_{n+1} \leq b_n$ pour tout n et à ii) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, alors la série converge.

 © Groupe Modulo inc., 2013

f) *Le critère généralisé de d'Alembert :*

(i) Si $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$, alors la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument (et donc converge).

(ii) Si $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ ou $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_0}\right| = \infty$, alors la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

(iii) Si $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, le critère généralisé de d'Alembert ne permet pas de conclure; autrement dit, on ne peut pas conclure que $\sum a_n$ converge ou diverge.

g) *Le critère généralisé de Cauchy :*

(i) Si $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolument (et donc converge).

(ii) Si $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ ou $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

(iii) Si $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = 1$, le critère généralisé de Cauchy ne permet pas de conclure.

6. a) Une série $\sum a_n$ est dite *absolument convergente* si la série de valeurs absolues $\sum |a_n|$ est convergente.

b) Si une série $\sum a_n$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

c) Une série $\sum a_n$ est dite *conditionnellement convergente* si elle est convergente mais n'est pas absolument convergente.

7. a) Utiliser les inégalités 5 à la section 6.3.

b) Voir l'exemple 11 à la section 6.3.

c) En ajoutant des termes jusqu'à l'obtention de la précision désirée, selon le théorème d'estimation des séries alternées.

8. a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$

b) Le rayon de convergence de la série de puissances $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ est :

i) 0 si la série converge seulement lorsque $x = a$

ii) ∞ si la série converge pour tout x ou

iii) un nombre positif R tel que la série converge si $|x - a| < R$ et diverge si $|x - a| > R$.

c) L'intervalle de convergence d'une série de puissances est l'intervalle constitué de toutes les valeurs de x pour lesquelles la série converge. L'intervalle de convergence pour le cas i) à la sous-question a) est constitué du singleton $\{a\}$, pour le cas ii), de tous les nombres réels, c'est-à-dire de la droite des nombres réels $]-\infty, \infty[$ et, pour le cas iii), de l'intervalle dont les extrémités sont $a - R$ et $a + R$ et qui peut comprendre aucune des extrémités, l'une ou l'autre d'entre elles ou encore les deux extrémités. Dans

 © Groupe Modulo inc., 2013

ce cas, il faut vérifier la convergence de la série à chaque extrémité de l'intervalle afin de déterminer l'intervalle de convergence.

9. a), b) Voir théorème 6.8.2.

10. a) $T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ [$a = 0$ à la sous-question *b*)]

d) Voir théorème 6.9.8.

e) Voir l'inégalité de Taylor (6.9.9).

11. a) - f) Voir le tableau 1 à la page 368.

12. En ce qui concerne le développement, voir la série binômiale (6.9.17). Le rayon de convergence de la série binômiale est 1.

VRAI OU FAUX

---

1. Faux. Voir la note 2 qui suit le théorème 6.2.7.

2. Faux. La série $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sin 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sin 1}}$ avec $p = \sin 1 \approx 0{,}84 \leq 1$, donc la série diverge.

3. Vrai. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, alors, lorsque $n \to \infty$, $2n + 1 \to \infty$, donc $a_{2n+1} \to L$

4. Vrai, selon le théorème 6.7.3.

Autre méthode : Utiliser le critère de comparaison pour montrer que $\sum c_n(-2)^n$ converge absolument.

5. Faux. Par exemple, prenons $c_n = (-1)^n/(n6^n)$.

6. Vrai, selon le théorème 6.7.3.

7. Faux, puisque $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(n+1)^3}\cdot\frac{n^3}{1}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^3}{(n+1)^3}\cdot\frac{1/n^3}{1/n^3}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+1/n)^3} = 1$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

8. Vrai, puisque $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1}{(n+1)!}\cdot\dfrac{n!}{1}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1} = 0 < 1$.

9. Faux. Voir la note 2 qui suit l'exemple 8 à la section 6.3.

10. Vrai, puisque $\dfrac{1}{e} = e^{-1}$ et $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$, donc $e^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!}$.

11. Vrai. Voir l'inégalité 9 à la section 6.1.

12. Vrai, parce que si $\sum|a_n|$ converge, alors $\sum a_n$ converge également selon le théorème 6.5.3.

13. Vrai. Selon le théorème 6.9.5, le coefficient de x^3 est $\dfrac{f'''(0)}{3!} = \dfrac{1}{3} \quad\Rightarrow\quad f'''(0) = 2$.

Autre méthode : Appliquer le théorème 6.8.2 en dérivant *f* trois fois.

14. Faux. Soit $a_n = n$ et $b_n = -n$. Alors, $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ divergent, mais $a_n + b_n = 0$, donc $\{a_n + b_n\}$ converge.

15. Faux. Par exemple, soit $a_n = b_n = (-1)^n$. Alors, $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ divergent, mais $a_n b_n = 1$, donc $\{a_n b_n\}$ converge.

16. Vrai, selon le théorème des suites monotones, puisque $\{a_n\}$ est décroissante et $0 < a_n \le a_1$ pour tout $n \quad\Rightarrow\quad \{a_n\}$ est bornée.

17. Vrai, selon le théorème 6.5.3. $\left[\sum(-1)^n a_n \text{ est absolument convergente et, par conséquent, convergente.}\right]$

18. Vrai. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \quad\Rightarrow\quad \sum a_n$converge (critère de d'Alembert) $\quad\Rightarrow\quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ [Théorème 6.2.6].

19. Vrai. $0{,}999\,99\ldots = 0{,}9 + 0{,}9(0{,}1)^1 + 0{,}9(0{,}1)^2 + 0{,}9(0{,}1)^3 + \cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(0{,}9)(0{,}1)^{n-1} = \dfrac{0{,}9}{1-0{,}1} = 1$ selon la formule de la somme d'une série géométrique $[S = a_1/(1 - r)]$, où la raison *r* satisfait à $|r| < 1$.

20. Vrai. Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$, nous savons que $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+3} = 2$, par conséquent, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+3} - a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+3} - \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2 - 2 = 0$.

21. Vrai. Ajouter ou retrancher un nombre fini de termes à une série n'a aucune incidence sur la convergence ou la divergence de celle-ci.

22. Faux. Soit $a_n = (0{,}1)^n$ et $b_n = (0{,}2)^n$. Alors, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(0{,}1)^n = \dfrac{0{,}1}{1-0{,}1} = \dfrac{1}{9} = A$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(0{,}2)^n = \dfrac{0{,}2}{1-0{,}2} = \dfrac{1}{4} = B$

et $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(0{,}02)^n = \dfrac{0{,}02}{1-0{,}02} = \dfrac{1}{49}$, mais $AB = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{36}$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

EXERCICES RÉCAPITULATIFS

1. $\left\{\dfrac{2+n^3}{1+2n^3}\right\}$ converge puisque $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+n^3}{1+2n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2/n^3+1}{1/n^3+2}=\dfrac{1}{2}$.

2. $a_n=\dfrac{9^{n+1}}{10^n}=9\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^n$, donc $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=9\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{9}{10})^n=9\cdot 0=0$ selon 6.1.9, donc la suite converge.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3}{1+n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{1/n^2+1}=\infty$, donc la suite diverge.

4. $a_n = \cos(n\pi/2)$, donc $a_n = 0$ si n est impair et $a_n = \pm 1$ si n est pair. Lorsque n augmente, a_n prend successivement et à répétition les valeurs 0, 1, 0, −1, donc la suite $\{a_n\}$ diverge.

5. $|a_n|=\left|\dfrac{n\sin n}{n^2+1}\right|\le\dfrac{n}{n^2+1}<\dfrac{1}{n}$, donc $|a_n|\to 0$ à mesure que $n\to\infty$. Par conséquent, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. La suite $\{a_n\}$ converge.

6. $a_n=\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$**.** Soit $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ pour $x>0$. Alors, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\overset{\text{H}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1/x}{1/(2\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x}}=0$**.** Par conséquent, selon le théorème 3 à la section 6.1, $\{a_n\}$ converge et $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

7. $\left\{\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^{4n}\right\}$ converge. En effet, soit $y=\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{4x}$. Alors,

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}4x\ln\left(1+3/x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+3/x)}{1/(4x)}\overset{\text{H}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+3/x}\left(-\frac{3}{x^2}\right)}{-1/(4x^2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{12}{1+3/x}=12,\ \text{donc}\ \lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{4n}=e^{12}.$$

8. $\left\{\dfrac{(-10)^n}{n!}\right\}$ converge, puisque $\dfrac{10^n}{n!}=\dfrac{10\cdot 10\cdot 10\cdot\cdots\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot 10}\cdot\dfrac{10\cdot 10\cdot\cdots\cdot 10}{11\cdot 12\cdot\cdots\cdot n}\le 10^{10}\left(\dfrac{10}{11}\right)^{n-10}\to 0$ lorsque $n\to\infty$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-10)^n}{n!}=0$ [théorème du sandwich]. *Autre méthode* : utiliser $(6.9.10)$.

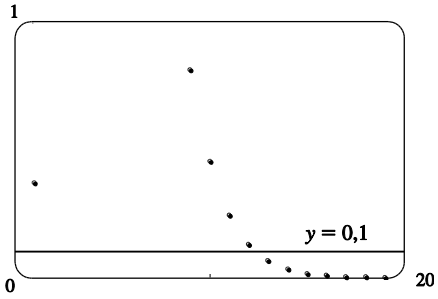
9. Preuve par induction. Supposons que, quelque soit n, $a_{n-1}<a_n<2$. Remarquons tout d'abord que $1<a_2=\frac{1}{3}(1+4)=\frac{5}{3}<2$, donc que la proposition est vraie pour $n = 2$. Supposons maintenant que $a_{k-1}<a_k<2$. Alors, $a_k=\frac{1}{3}(a_{k-1}+4)<\frac{1}{3}(a_k+4)<\frac{1}{3}(2+4)=2$. Donc, $a_k<a_{k+1}<2$. Cela complète la preuve par induction. Pour trouver la limite de la suite, notons que $L=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}\ \Rightarrow$

$L=\frac{1}{3}(L+4)\ \Rightarrow\ L=2$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4}{e^x}\overset{\text{H}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3}{e^x}\overset{\text{H}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^2}{e^x}\overset{\text{H}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{24x}{e^x}\overset{\text{H}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{24}{e^x}=0$

Nous concluons donc que, selon le théorème 6.1.3, $\lim\limits_{n\to\infty} n^4e^{-n}=0$. Le graphique semble montrer que $12^4e^{-12}>0{,}1$, mais $n^4e^{-n}<0{,}1$ lorsque $n > 12$. Donc, la plus petite valeur de N qui correspond à $\varepsilon = 0{,}1$ dans la définition de la limite est $N = 12$.



11. $\dfrac{n}{n^3+1}<\dfrac{n}{n^3}=\dfrac{1}{n^2}$, donc $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n^3+1}$ converge, par comparaison avec la série p convergente $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}[p=2>1]$.

12. Soit $a_n=\dfrac{n^2+1}{n^3+1}$ et $b_n=\dfrac{1}{n}$, donc $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+n}{n^3+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+1/n^2}{1+1/n^3}=1>0.$

Puisque $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ est la série harmonique divergente, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ diverge également, selon le critère comparaison par une limite.

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{(n+1)^3}{5^{n+1}}\cdot\dfrac{5^n}{n^3}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^3\cdot\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{5}<1$, donc $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3}{5^n}$ converge, selon le critère généralisé de d'Alembert.

14. Soit $b_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$. Alors, b_n est positive pour $n \geq 1$, la suite $\{b_n\}$ est décroissante et $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$, donc la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ converge, selon le critère des séries alternées.

15. Soit $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}}$. Alors, f est continue, positive et décroissante sur l'intervalle [2, ∞[; le critère de l'intégrale s'applique donc.

$$\begin{aligned}\int_2^{\infty}f(x)dx&=\lim_{t\to\infty}\int_2^t\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx\quad\left[u=\ln x,\,du=\tfrac{1}{x}dx\right]=\lim_{t\to\infty}\int_{\ln 2}^{\ln t}u^{-1/2}du=\lim_{t\to\infty}\left[2\sqrt{u}\right]_{\ln 2}^{\ln t},\\&=\lim_{t\to\infty}(2\sqrt{\ln t}-2\sqrt{\ln 2})=\infty,\end{aligned}$$

donc la série $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ diverge.

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{3n+1}=\dfrac{1}{3}$, donc $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\dfrac{n}{3n+1}\right)=\ln\frac{1}{3}\neq 0$. Par conséquent, la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(\dfrac{n}{3n+1}\right)$ diverge, selon le critère de divergence.

 © Groupe Modulo inc., 2013

17. $|a_n| = \left|\dfrac{\cos 3n}{1+(1,2)^n}\right| \le \dfrac{1}{1+(1,2)^n} < \dfrac{1}{(1,2)^n} = \left(\dfrac{5}{6}\right)^n$, donc $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ converge par comparaison avec la série géométrique convergente $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n \left[r = \frac{5}{6} < 1\right]$. Il s'ensuit que $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ converge (selon le théorème 3 à la section 6.5).

18. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\dfrac{n^{2n}}{(1+2n^2)^n}\right|} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{1+2n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1/n^2+2} = \dfrac{1}{2} < 1$, donc $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{2n}}{(1+2n^2)^n}$ converge, selon le critère généralisé de Cauchy.

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)(2n+1)}{5^{n+1}(n+1)!}\cdot\dfrac{5^n n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{5(n+1)} = \dfrac{2}{5} < 1$, donc la série converge, selon le critère généralisé de d'Alembert.

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-5)^{2n}}{n^2 9^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{25}{9}\right)^n$. Or, $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{25^{n+1}}{(n+1)^2\cdot 9^{n+1}}\cdot\dfrac{n^2\cdot 9^n}{25^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{25n^2}{9(n+1)^2} = \dfrac{25}{9} > 1$, donc la série diverge, selon le critère généralisé de d'Alembert.

21. $b_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+1} > 0, \{b_n\}$ est décroissante et $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0,$ donc la série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$ converge, selon le critère des séries alternées.

22. Utilisons le critère de comparaison par une limite avec $a_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n} = \dfrac{2}{n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)}$ (en rationalisant le numérateur) et $b_n = \dfrac{1}{n^{3/2}}$. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = 1,$ donc puisque $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ converge $\left[p = \frac{3}{2} > 1\right]$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ converge également.

23. Considérons la série de valeurs absolues : $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1/3}$ est une série p avec $p = \frac{1}{3} \le 1$ et est, par conséquent, divergente. Cependant, en appliquant le critère des séries alternées, nous voyons que $b_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} > 0, \{b_n\}$ est décroissante et que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0,$ donc la série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^{-1/3}$ converge. Par conséquent, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^{-1/3}$ est conditionnellement convergente.

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}n^{-3}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}n^{-3}$ est une série p convergente [$p = 3 > 1$]. Par conséquent, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^{-3}$ est absolument convergente.

 © Groupe Modulo inc., 2013

25. $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\dfrac{(-1)^{n+1}(n+2)3^{n+1}}{2^{2n+3}} \cdot \dfrac{2^{2n+1}}{(-1)^n(n+1)3^n}\right| = \dfrac{n+2}{n+1}\cdot\dfrac{3}{4} = \dfrac{1+(2/n)}{1+(1/n)}\cdot\dfrac{3}{4} \to \dfrac{3}{4} < 1$ lorsque $n \to \infty$, donc, selon le critère généralisé de d'Alembert, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)3^n}{2^{2n+1}}$ est absolument convergente.

26. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\ln x} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1/(2\sqrt{x})}{1/x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{2} = \infty$. Par conséquent, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{\ln n} \neq 0$, donc la série donnée est divergente, selon le critère de divergence.

27. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^{n-1}}{2^{3n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^{n-1}}{(2^3)^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^{n-1}}{8^n} = \frac{1}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^{n-1}}{8^{n-1}} = \frac{1}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{8}\right)^{n-1} = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{1-(-3/8)}\right)$$
$$= \frac{1}{8}\cdot\frac{8}{11} = \frac{1}{11}$$

28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{3n} - \frac{1}{3(n+3)}\right]$ [en utilisant les fractions partielles].

$s_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{1}{3i} - \frac{1}{3(i+3)}\right] = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3(n+1)} - \frac{1}{3(n+2)} - \frac{1}{3(n+3)}$ (somme télescopique), donc

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)} = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{11}{18}$.

29. $$\sum_{n=1}^{\infty}\big[\arctan(n+1) - \arctan n\big] = \lim_{n\to\infty} s_n$$
$$= \lim_{n\to\infty}\big[(\arctan 2 - \arctan 1) + (\arctan 3 - \arctan 2) + \cdots + (\arctan(n+1) - \arctan n)\big]$$
$$= \lim_{n\to\infty}\big[\arctan(n+1) - \arctan 1\big] = \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\pi}{4}$$

30. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^n}{3^{2n}(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}\cdot\frac{\pi^n}{3^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}\cdot\left(\frac{\sqrt{\pi}}{3}\right)^{2n} = \cos\left(\frac{\sqrt{\pi}}{3}\right)$ puisque $\displaystyle\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ pour tout x.

31. $\displaystyle 1 - e + \frac{e^2}{2!} - \frac{e^3}{3!} + \frac{e^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{e^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-e)^n}{n!} = e^{-e}$ puisque $\displaystyle e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ pour tout x.

32. $\displaystyle 4{,}173\overline{26} = 4{,}17 + \frac{326}{10^5} + \frac{326}{10^8} + \cdots = 4{,}17 + \frac{326/10^5}{1-1/10^3} = \frac{417}{100} + \frac{326}{99\,900} = \frac{416\,909}{99\,900}$

33. $$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) + \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left(2 + 2\cdot\frac{x^2}{2!} + 2\cdot\frac{x^4}{4!} + \cdots\right) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} \geq 1 + \frac{1}{2}x^2 \quad \text{pour tout } x$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

34. $\sum_{n=1}^{\infty}(\ln x)^n$ est une série géométrique qui converge lorsque $|\ln x|<1 \;\Rightarrow\; -1<\ln x<1 \;\Rightarrow\; e^{-1}<x<e$.

35. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^5}=1-\frac{1}{32}+\frac{1}{243}-\frac{1}{1024}+\frac{1}{3125}-\frac{1}{7776}+\frac{1}{16\,807}-\frac{1}{32\,768}+\cdots$. Puisque $b_8=\frac{1}{8^5}=\frac{1}{32\,768}<0{,}000\,031$,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^5}\approx\sum_{n=1}^{7}\frac{(-1)^{n+1}}{n^5}\approx 0{,}9721$.

36. a) $s_5=\sum_{n=1}^{5}\frac{1}{n^6}=1+\frac{1}{2^6}+\cdots+\frac{1}{5^6}\approx 1{,}017\,305$. La série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$ converge, selon le critère de l'intégrale, donc nous estimons le reste R_5

selon 6.3.4 : $R_5\le\int_5^{\infty}\frac{dx}{x^6}=\left[\frac{-x^{-5}}{5}\right]_5^{\infty}=\frac{5^{-5}}{5}=0{,}000\,064$. L'erreur est donc d'au plus 0,000 064.

b) En général, $R_n\le\int_n^{\infty}\frac{dx}{x^6}=\frac{1}{5n^5}$. Si nous prenons $n=9$, alors $s_9\approx 1{,}017\,34$ et $R_9\le\frac{1}{5\cdot 9^5}\approx 3{,}4\times10^{-6}$. Donc, avec cinq

décimales, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}\approx\sum_{n=1}^{9}\frac{1}{n^5}\approx 1{,}017\,34$.

Autre méthode : Utiliser 6.3.5 plutôt que 6.3.4.

37. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2+5^n}\approx\sum_{n=1}^{8}\frac{1}{2+5^n}\approx 0{,}189\,762\,24$. Pour estimer l'erreur, il faut remarquer que $\frac{1}{2+5^n}<\frac{1}{5^n}$, donc le reste est

$R_8=\sum_{n=9}^{\infty}\frac{1}{2+5^n}<\sum_{n=9}^{\infty}\frac{1}{5^n}=\frac{1/5^9}{1-1/5}=6{,}4\times10^{-7}$ [série géométrique avec $a=\frac{1}{5^9}$ et $r=\frac{1}{5}$].

38. a) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^{n+1}}{[2(n+1)]!}\cdot\frac{(2n)!}{n^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n(n+1)^1}{(2n+2)(2n+1)n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\frac{1}{2(2n+1)}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{1}{2(2n+1)}=e\cdot 0=0<1$

donc la série converge, selon le critère généralisé de d'Alembert.

b) La série à la sous-question a) converge, donc $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(2n)!}=0$, selon le théorème 6.2.6.

39. Servons-nous du critère de comparaison par une limite : $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(\frac{n+1}{n})a_n}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1>0$.

Puisque $\sum|a_n|$ converge, $\sum\left|\left(\frac{n+1}{n}\right)a_n\right|$ converge également, selon le critère de comparaison par une limite.

 © Groupe Modulo inc., 2013

40. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)^2 5^{n+1}}\cdot\dfrac{n^2 5^n}{x^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(1+1/n)^2}\dfrac{|x|}{5} = \dfrac{|x|}{5}$, donc, selon le critère généralisé de d'Alembert, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{n^2 5^n}$ converge lorsque $\dfrac{|x|}{5}<1 \quad\Leftrightarrow\quad |x|<5$, donc $R = 5$. Lorsque $x = -5$, la série devient la série p convergente $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ avec $p = 2 > 1$. Lorsque $x = 5$, la série devient $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}$, qui converge, selon le critère des séries alternées. Par conséquent, $I = [-5, 5]$.

41. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{|x+2|^{n+1}}{(n+1)4^{n+1}}\cdot\dfrac{n4^n}{|x+2|^n}\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n}{n+1}\dfrac{|x+2|}{4}\right] = \dfrac{|x+2|}{4}<1 \quad\Leftrightarrow\quad |x+2|<4$, donc $R = 4$.

$|x+2|<4 \quad\Leftrightarrow\quad -4<x+2<4 \quad\Leftrightarrow\quad -6<x<2$. Si $x = -6$, alors la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+2)^n}{n4^n}$ devient $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-4)^n}{n4^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$, la série harmonique alternée, qui converge, selon le critère des séries alternées. Lorsque $x = 2$, la série devient la série harmonique $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, qui diverge. Par conséquent, $I = [-6, 2[$.

42. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{2^{n+1}(x-2)^{n+1}}{(n+3)!}\cdot\dfrac{(n+2)!}{2^n(x-2)^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n+3}|x-2| = 0<1$, donc la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n(x-2)^n}{(n+2)!}$ converge pour tout x.

$R = \infty$ et $I =]-\infty, \infty[$.

43. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{2^{n+1}(x-3)^{n+1}}{\sqrt{n+4}}\cdot\dfrac{\sqrt{n+3}}{2^n(x-3)^n}\right| = 2|x-3|\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n+3}{n+4}} = 2|x-3|<1 \quad\Leftrightarrow\quad |x-3|<\tfrac{1}{2}$, donc $R = \tfrac{1}{2}$.

$|x-3|<\tfrac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad -\tfrac{1}{2}<x-3<\tfrac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \tfrac{5}{2}<x<\tfrac{7}{2}$. Pour $x = \tfrac{7}{2}$, la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n(x-3)^n}{\sqrt{n+3}}$ devient $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+3}} = \sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{n^{1/2}}$, qui diverge $[p = \tfrac{1}{2}\le 1]$, mais pour $x = \tfrac{5}{2}$, nous obtenons $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+3}}$, qui est une série alternée convergente, donc $I = [\tfrac{5}{2}, \tfrac{7}{2}[$.

44. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(2n+2)!x^{n+1}}{[(n+1)!]^2}\cdot\dfrac{(n!)^2}{(2n)!x^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)}|x| = 4|x|$. Pour qu'il y ait convergence, il faut que $4|x|<1 \quad\Leftrightarrow\quad |x|<\tfrac{1}{4}$, donc $R = \tfrac{1}{4}$.

45.

 © Groupe Modulo inc., 2013

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(\frac{\pi}{6})$
0	$\sin x$	$\frac{1}{2}$
1	$\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
2	$-\sin x$	$-\frac{1}{2}$
3	$-\cos x$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
4	$\sin x$	$\frac{1}{2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$$\begin{aligned}\sin x &= f\left(\frac{\pi}{6}\right)+f'\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{f''\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2+\frac{f^{(3)}\left(\frac{\pi}{6}\right)}{3!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^3+\frac{f^{(4)}\left(\frac{\pi}{6}\right)}{4!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^4+\cdots\\ &=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^4-\cdots\right]+\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^3+\cdots\right]\\ &=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^{2n}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^{2n+1}\end{aligned}$$

46.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(\frac{\pi}{3})$
0	$\cos x$	$\frac{1}{2}$
1	$-\sin x$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
2	$-\cos x$	$-\frac{1}{2}$
3	$\sin x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
4	$\cos x$	$\frac{1}{2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$$\begin{aligned}\cos x &= f\left(\frac{\pi}{3}\right)+f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{f''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2+\frac{f^{(3)}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{3!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3+\frac{f^{(4)}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{4!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^4+\cdots\\ &=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^4-\cdots\right]+\frac{\sqrt{3}}{2}\left[-\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3-\cdots\right]\\ &=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{2n}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{2n+1}\end{aligned}$$

47. $\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{1}{1-(-x)}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ pour $|x|<1 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{x^2}{1+x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n+2}$ avec $R=1$.

48. $\arctan x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ avec l'intervalle de convergence $[-1, 1]$, donc $\arctan(x^2)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x^2)^{2n+1}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+2}}{2n+1}$, qui converge lorsque $x^2\in[-1,1] \quad\Leftrightarrow\quad x\in[-1,1]$. Par conséquent, $R=1$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

49. $\int \frac{1}{4-x}dx = -\ln(4-x)+C$ et $\int \frac{1}{4-x}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1-x/4}dx = \frac{1}{4}\int \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{4}\right)^n dx = \frac{1}{4}\int \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{4^n}dx = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{4^n(n+1)}+C$. Donc,

$\ln(4-x) = -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{4^n(n+1)}+C = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{4^{n+1}(n+1)}+C = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n4^n}+C$. En posant $x = 0$, nous obtenons $C = \ln 4$. Par

conséquent, $f(x) = \ln(4-x) = \ln 4 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n4^n}$. La série converge pour $|x/4|<1 \iff |x|<4$, donc $R = 4$.

Autre méthode :

$\ln(4-x) = \ln[4(1-x/4)] = \ln 4 + \ln(1-x/4) = \ln 4 + \ln[1+(-x/4)]$

$= \ln 4 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(-x/4)^n}{n}$ [selon le tableau 1] $= \ln 4 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n+1}\frac{x^n}{n4^n} = \ln 4 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n4^n}$.

50. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \Rightarrow e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!} \Rightarrow xe^{2x} = x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^{n+1}}{n!}$, $R = \infty$

51. $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \Rightarrow \sin(x^4) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (x^4)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{8n+4}}{(2n+1)!}$ pour tout x, donc le rayon de convergence est ∞.

52. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \Rightarrow 10^x = e^{(\ln 10)x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{[(\ln 10)x]^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln 10)^n x^n}{n!}$, $R = \infty$

53. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{16-x}} = \frac{1}{\sqrt[4]{16(1-x/16)}} = \frac{1}{\sqrt[4]{16}(1-\frac{1}{16}x)^{1/4}} = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{16}x)^{-1/4}$

$= \frac{1}{2}\left[1+\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{x}{16}\right)+\frac{(-\frac{1}{4})(-\frac{5}{4})}{2!}\left(-\frac{x}{16}\right)^2+\frac{(-\frac{1}{4})(-\frac{5}{4})(-\frac{9}{4})}{3!}\left(-\frac{x}{16}\right)^3+\cdots\right]$

$= \frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot\cdots\cdot(4n-3)}{2\cdot 4^n\cdot n!\cdot 16^n}x^n = \frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot\cdots\cdot(4n-3)}{2^{6n+1}n!}x^n$

pour $\left|-\frac{x}{16}\right|<1 \iff |x|<16$, donc $R = 16$.

54. $(1-3x)^{-5} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-5}{n}(-3x)^n = 1+(-5)(-3x)+\frac{(-5)(-6)}{2!}(-3x)^2+\frac{(-5)(-6)(-7)}{3!}(-3x)^3+\cdots$

$= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot\cdots\cdot(n+4)\cdot 3^n x^n}{n!}$ pour $|-3x|<1 \iff |x|<\frac{1}{3}$, donc $R = \frac{1}{3}$.

55. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, alors $\frac{e^x}{x} = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!} = x^{-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!} = \frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}$ et $\int\frac{e^x}{x}dx = C+\ln|x|+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot n!}$.

56. $(1+x^4)^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(x^4)^n = 1+(\frac{1}{2})x^4+\frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})}{2!}(x^4)^2+\frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3!}(x^4)^3+\cdots$

$= 1+\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{8}x^8+\frac{1}{16}x^{12}-\cdots$

 © Groupe Modulo inc., 2013

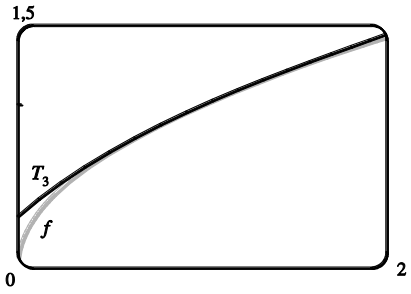
donc, $\int_0^1 (1+x^4)^{1/2}\,dx = [x + \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{72}x^9 + \frac{1}{208}x^{13} - \cdots]_0^1 = 1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{72} + \frac{1}{208} - \cdots$. Ceci est une série alternée et selon le critère des séries alternées, l'erreur dans l'approximation $\int_0^1 (1+x^4)^{1/2}\,dx \approx 1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{72} \approx 1{,}086$ est inférieure à $\frac{1}{208}$, ce qui satisfait à la précision désirée. Par conséquent, avec deux décimales exactes, $\int_0^1 (1+x^4)^{1/2}\,dx \approx 1{,}09$.

57. a)

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(1)$
0	$x^{1/2}$	1
1	$\frac{1}{2}x^{-1/2}$	$\frac{1}{2}$
2	$-\frac{1}{4}x^{-3/2}$	$-\frac{1}{4}$
3	$\frac{3}{8}x^{-5/2}$	$\frac{3}{8}$
4	$-\frac{15}{16}x^{-7/2}$	$-\frac{15}{16}$
⋮	⋮	⋮

$$\sqrt{x} \approx T_3(x) = 1 + \frac{1/2}{1!}(x-1) - \frac{1/4}{2!}(x-1)^2 + \frac{3/8}{3!}(x-1)^3$$
$$= 1 + \tfrac{1}{2}(x-1) \ -\tfrac{1}{8}(x-1)^2 + \tfrac{1}{16}(x-1)^3$$

b)

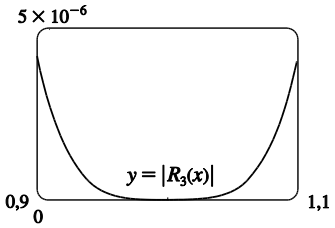


c) $|R_3(x)| \le \frac{M}{4!}|x-1|^4$, où $|f^{(4)}(x)| \le M$ avec $f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}x^{-7/2}$. Or, $0{,}9 \le x \le 1{,}1 \ \Rightarrow\ -0{,}1 \le x-1 \le 0{,}1 \ \Rightarrow\ (x-1)^4 \le (0{,}1)^4$

et, en posant $x = 0{,}9$, nous obtenons $M = \dfrac{15}{16(0{,}9)^{7/2}}$, donc

$$|R_3(x)| \le \frac{15}{16(0{,}9)^{7/2}4!}(0{,}1)^4 \approx 0{,}000\ 005\ 648$$
$$\approx 0{,}000\ 006 = 6\times 10^{-6}$$

d)



 © Groupe Modulo inc., 2013

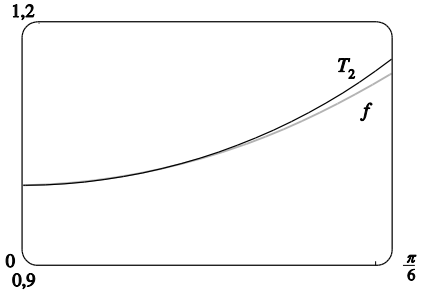
Le graphique de $|R_3(x)|=|\sqrt{x}-T_3(x)|$ semble montrer que l'erreur est inférieure à 5×10^{-6} sur l'intervalle [0,9; 1,1].

58. a)

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$\sec x$	1
1	$\sec x \tan x$	0
2	$\sec x \tan^2 x + \sec^3 x$	1
3	$\sec x \tan^3 x + 5\sec^3 x \tan x$	0
⋮	⋮	⋮

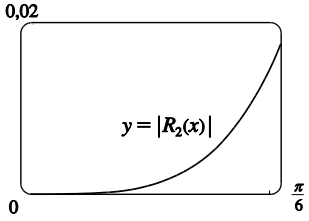
$\sec x \approx T_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2$

b)



c) $|R_2(x)| \le \frac{M}{3!}|x|^3$, où $|f^{(3)}(x)| \le M$ avec $f^{(3)}(x) = \sec x \tan^3 x + 5\sec^3 x \tan x$. Or, $0 \le x \le \frac{\pi}{6} \Rightarrow x^3 \le (\frac{\pi}{6})^3$ et, en posant $x = \frac{\pi}{6}$, nous obtenons $M = \frac{14}{3}$, donc $|R_2(x)| \le \frac{14}{3 \cdot 6}\left(\frac{\pi}{6}\right)^3 \approx 0{,}111\,648$.

d)



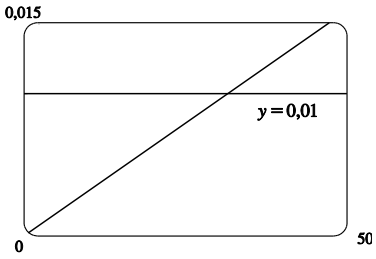
Le graphique de $|R_2(x)| = |\sec x - T_2(x)|$ semble montrer que l'erreur est inférieure à 0,02 sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{6}]$.

59. $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$, donc $\sin x - x = -\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$ et $\frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \frac{x^4}{7!} + \cdots$. Par conséquent, $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \to 0}\left(-\frac{1}{6} + \frac{x^2}{120} - \frac{x^4}{5040} + \cdots\right) = -\frac{1}{6}$.

60. a) $F = \frac{mgR^2}{(R+h)^2} = \frac{mg}{(1+h/R)^2} = mg\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-2}{n}\left(\frac{h}{R}\right)^n$ [série binômiale]

 © Groupe Modulo inc., 2013

b) Développons $F = mg[1 - 2(h/R) + 3(h/R)^2 - \cdots]$. Ceci est une série alternée, donc, selon le théorème d'estimation des séries alternées, l'erreur dans l'approximation $F = mg$ est inférieure à $2mgh/R$; par conséquent, pour une précision à moins d'un pour cent près, nous désirons $\left|\dfrac{2mgh/R}{mgR^2/(R+h)^2}\right| < 0{,}01 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{2h(R+h)^2}{R^3} < 0{,}01$. Comme il serait difficile d'obtenir la valeur de h dans cette inégalité, posons le changement de variables R = 6400 km et traçons chaque membre de l'inégalité. Il semble que l'approximation est précise à moins d'un pour cent près pour h < 31 km.



61. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \Rightarrow \quad f(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n x^n$

a) Si f est une fonction impaire, alors $f(-x) = -f(x) \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} -c_n x^n$. Les coefficients de toutes les séries de puissances sont déterminés de façon unique (selon le théorème 6.9.5), donc $(-1)^n c_n = -c_n$.

Si n est pair, alors $(-1)^n = 1$, donc $c_n = -c_n \quad \Rightarrow \quad 2c_n = 0 \quad \Rightarrow \quad c_n = 0$. Par conséquent, tous les coefficients pairs sont 0, c'est-à-dire que $c_0 = c_2 = c_4 = \cdots = 0$.

b) Si f est paire, alors $f(-x) = f(x) \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \Rightarrow \quad (-1)^n c_n = c_n$. Si n est impair, alors $(-1)^n = -1$, donc $-c_n = c_n \quad \Rightarrow \quad 2c_n = 0 \quad \Rightarrow \quad c_n = 0$. Par conséquent, tous les coefficients impairs sont 0, c'est-à-dire que $c_1 = c_3 = c_5 = \cdots = 0$.

62. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} \quad \Rightarrow \quad e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!} x^{2n}$. Selon le théorème 6.9.6 avec a = 0, nous obtenons également $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$. En comparant les coefficients pour $k = 2n$, nous obtenons $\dfrac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} = \dfrac{1}{n!} \quad \Rightarrow \quad f^{(2n)}(0) = \dfrac{(2n)!}{n!}$.

PROBLÈMES SUPPLÉMENTAIRES

---

1. Le calcul des 15 dérivées de f demanderait beaucoup trop de travail. L'important est de se rappeler que $f^{(n)}(0)$ apparaît dans le coefficient de x^n dans la série de Maclaurin de f. Commençons par la série de Maclaurin pour sin: $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

Alors, $\sin(x^3) = x^3 - \dfrac{x^9}{3!} + \dfrac{x^{15}}{5!} - \cdots$ et le coefficient de x^{15} est donc $\dfrac{f^{(15)}(0)}{15!} = \dfrac{1}{5!}$. Par conséquent, $f^{(15)}(0) = \dfrac{15!}{5!} = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 = 10\,897\,286\,400$.

2. Servons-nous de la stratégie de résolution de problèmes à l'aide de cas :

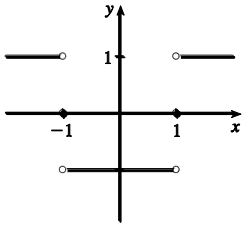
Cas i): Si $|x| < 1$, alors $0 \le x^2 < 1$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n} = 0$ [voir l'exemple 11 à la section 6.1] et

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1} = \frac{0-1}{0+1} = -1.$$

Cas ii) : Si $|x| = 1$, c'est-à-dire $x = \pm 1$, alors $x^2 = 1$, donc $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-1}{1+1} = 0$.

Cas iii) : Si $|x| > 1$, alors $x^2 > 1$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n} = \infty$ et $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-(1/x^{2n})}{1+(1/x^{2n})} = \dfrac{1-0}{1+0} = 1$.

Par conséquent, $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \\ -1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$



Le graphique montre que f est continue partout, sauf lorsque $x = \pm 1$.

3. a) Selon la formule d'addition à la page 2 des pages de référence, avec $x = y = \theta$, nous obtenons $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$, donc

$\cot 2\theta = \dfrac{1-\tan^2\theta}{2\tan\theta} \quad \Rightarrow \quad 2\cot 2\theta = \dfrac{1-\tan^2\theta}{\tan\theta} = \cot\theta - \tan\theta$. En remplaçant θ par $\frac{1}{2}x$, nous obtenons

$2\cot x = \cot\frac{1}{2}x - \tan\frac{1}{2}x$ ou $\tan\frac{1}{2}x = \cot\frac{1}{2}x - 2\cot x$.

b) Selon la sous-question a), avec $\dfrac{x}{2^{n-1}}$ au lieu de x, $\tan\dfrac{x}{2^n} = \cot\dfrac{x}{2^n} - 2\cot\dfrac{x}{2^{n-1}}$, donc la $n^{\text{ième}}$ somme partielle de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$ est

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{\tan(x/2)}{2} + \frac{\tan(x/4)}{4} + \frac{\tan(x/8)}{8} + \cdots + \frac{\tan(x/2^n)}{2^n} \\ &= \left[\frac{\cot(x/2)}{2} - \cot x\right] + \left[\frac{\cot(x/4)}{4} - \frac{\cot(x/2)}{2}\right] + \left[\frac{\cot(x/8)}{8} - \frac{\cot(x/4)}{4}\right] + \ldots + \left[\frac{\cot(x/2^n)}{2^n} - \frac{\cot(x/2^{n-1})}{2^{n-1}}\right] \\ &= -\cot x + \frac{\cot(x/2^n)}{2^n} \quad \text{[somme télescopique]} \end{aligned}$$

 © Groupe Modulo inc., 2013

Or, $\dfrac{\cot(x/2^n)}{2^n} = \dfrac{\cos(x/2^n)}{2^n \sin(x/2^n)} = \dfrac{\cos(x/2^n)}{x} \cdot \dfrac{x/2^n}{\sin(x/2^n)} \to \dfrac{1}{x} \cdot 1 = \dfrac{1}{x}$ lorsque $n \to \infty$, puisque $x/2^n \to 0$ pour $x \neq 0$. Par conséquent,

si $x \neq 0$ et $x \neq k\pi$, où k est tout nombre entier, alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tan\frac{x}{2^n} = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(-\cot x + \frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n}\right) = -\cot x + \frac{1}{x}$$

Si $x = 0$, alors tous les termes de la série sont nuls; la somme est donc nulle.

4. $|AP_2|^2 = 2$, $|AP_3|^2 = 2 + 2^2$, $|AP_4|^2 = 2 + 2^2 + (2^2)^2$, $|AP_5|^2 = 2 + 2^2 + (2^2)^2 + (2^3)^2$, …,

$|AP_n|^2 = 2 + 2^2 + (2^2)^2 + \cdots + (2^{n-2})^2$ [pour $n \geq 3$] $= 2 + (4 + 4^2 + 4^3 + \cdots + 4^{n-2})$

$= 2 + \dfrac{4(4^{n-2} - 1)}{4 - 1}$ [somme géométrique finie avec $a = 4$, $r = 4$] $= \dfrac{6}{3} + \dfrac{4^{n-1} - 4}{3} = \dfrac{2}{3} + \dfrac{4^{n-1}}{3}$

Donc, $\tan \angle P_n A P_{n+1} = \dfrac{|P_n P_{n+1}|}{|AP_n|} = \dfrac{2^{n-1}}{\sqrt{\frac{2}{3} + \frac{4^{n-1}}{3}}} = \dfrac{\sqrt{4^{n-1}}}{\sqrt{\frac{2}{3} + \frac{4^{n-1}}{3}}} = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{2}{3 \cdot 4^{n-1}} + \frac{1}{3}}} \to \sqrt{3}$ lorsque $n \to \infty$.

Par conséquent, $\angle P_n A P_{n+1} \to \frac{\pi}{3}$ lorsque $n \to \infty$.

5. a) À chaque étape, chaque côté est remplacé par quatre côtés plus courts, dont la longueur est le tiers de la longueur du côté à l'étape précédente. En représentant respectivement par s_0 et ℓ_0 le nombre de côtés et la longueur du côté du triangle initial, générons le tableau ci-après. En général, nous avons $s_n = 3 \cdot 4^n$ et $\ell_n = (\frac{1}{3})^n$, donc la longueur du périmètre à la $n^{\text{ième}}$ étape de la construction est $p_n = s_n \ell_n = 3 \cdot 4^n \cdot (\frac{1}{3})^n = 3 \cdot (\frac{4}{3})^n$.

$s_0 = 3$	$\ell_0 = 1$
$s_1 = 3 \cdot 4$	$\ell_1 = 1/3$
$s_2 = 3 \cdot 4^2$	$\ell_2 = 1/3^2$
$s_3 = 3 \cdot 4^3$	$\ell_3 = 1/3^3$
$\vdots$	$\vdots$

b) $p_n = \dfrac{4^n}{3^{n-1}} = 4\left(\dfrac{4}{3}\right)^{n-1}$. Puisque $\frac{4}{3} > 1$, $p_n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$.

c) L'aire de chacun des petits triangles ajoutés à une étape donnée est un-neuvième de l'aire du triangle ajouté à l'étape précédente. Soit a, l'aire du triangle initial. Alors, l'aire a_n de chacun des petits triangles ajoutés à l'étape n est $a_n = a \cdot \dfrac{1}{9^n} = \dfrac{a}{9^n}$.

Puisqu'un petit triangle est ajouté à chaque côté à chaque étape, il s'ensuit que l'aire totale A_n ajoutée à la figure à la $n^{\text{ième}}$ étape est $A_n = s_{n-1} \cdot a_n = 3 \cdot 4^{n-1} \cdot \dfrac{a}{9^n} = a \cdot \dfrac{4^{n-1}}{3^{2n-1}}$. Alors, l'aire totale contenue dans la courbe en flocon de neige est

$A = a + A_1 + A_2 + A_3 + \cdots = a + a \cdot \dfrac{1}{3} + a \cdot \dfrac{4}{3^3} + a \cdot \dfrac{4^2}{3^5} + a \cdot \dfrac{4^3}{3^7} + \cdots$. Après le premier terme, ceci est une série géométrique de

 © Groupe Modulo inc., 2013

raison $\frac{4}{9}$, donc $A = a + \frac{a/3}{1-\frac{4}{9}} = a + \frac{a}{3}\cdot\frac{9}{5} = \frac{8a}{5}$. L'aire du triangle équilatéral initial de côté 1 est cependant $a = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

L'aire contenue dans la courbe en flocon de neige est donc $\frac{8}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$.

6. Soit la série $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \cdots$. Alors, chaque terme de S est de la forme $\frac{1}{2^m 3^n}$, $m, n \geq 0$. De plus, chaque terme ne se produit qu'une seule fois. Nous obtenons donc (double sommation)

$$S = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^m 3^n} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^m}\frac{1}{3^n} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2^m}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 2\cdot\tfrac{3}{2} = 3$$

7. a) Soit a = arctan x et b = arctan y. Alors, selon la formule de soustraction à la page 2 des pages de référence,

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1+\tan a\tan b} = \frac{\tan(\arctan x) - \tan(\arctan y)}{1+\tan(\arctan x)\tan(\arctan y)} = \frac{x-y}{1+xy}.$$

Or, $\arctan x - \arctan y = a - b = \arctan(\tan(a-b)) = \arctan\frac{x-y}{1+xy}$, puisque $-\frac{\pi}{2} < a-b < \frac{\pi}{2}$.

b) Selon la sous-question a), nous obtenons

$$\arctan\tfrac{120}{119} - \arctan\tfrac{1}{239} = \arctan\frac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1+\frac{120}{119}\cdot\frac{1}{239}} = \arctan\frac{\frac{28\,561}{28\,441}}{\frac{28\,561}{28\,441}} = \arctan 1 = \tfrac{\pi}{4}$$

c) En remplaçant y par $-y$ dans la formule à la sous-question a), nous obtenons $\arctan x + \arctan y = \arctan\frac{x+y}{1-xy}$. Donc,

$$4\arctan\tfrac{1}{5} = 2(\arctan\tfrac{1}{5} + \arctan\tfrac{1}{5}) = 2\arctan\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}} = 2\arctan\tfrac{5}{12} = \arctan\tfrac{5}{12} + \arctan\tfrac{5}{12}$$
$$= \arctan\frac{\frac{5}{12}+\frac{5}{12}}{1-\frac{5}{12}\cdot\frac{5}{12}} = \arctan\tfrac{120}{119}$$

Par conséquent, selon la sous-question b), nous obtenons $4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} = \arctan\frac{120}{119} - \arctan\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$.

d) Selon l'exemple 7 à la section 6.8, nous obtenons $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \cdots$, donc

$$\arctan\frac{1}{5} = \frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} - \frac{1}{7\cdot 5^7} + \frac{1}{9\cdot 5^9} - \frac{1}{11\cdot 5^{11}} + \cdots$$

Ceci est une série alternée et ses termes décroissent jusqu'à 0, donc, selon le théorème d'estimation des séries alternées, la somme se situe entre s_5 et s_6, c'est-à-dire $0{,}197\,395\,560 < \arctan\frac{1}{5} < 0{,}197\,395\,562$.

 © Groupe Modulo inc., 2013

e) À partir de la série à la sous-question d), nous obtenons $\arctan\frac{1}{239} = \frac{1}{239} - \frac{1}{3\cdot 239^3} + \frac{1}{5\cdot 239^5} - \cdots$. Le troisième terme est inférieur à $2{,}6 \times 10^{-13}$, donc, selon le théorème d'estimation des séries alternées, nous obtenons, avec neuf décimales exactes, $\arctan\frac{1}{239} \approx s_2 \approx 0{,}004\,184\,076$. Par conséquent, $0{,}004\,184\,075 < \arctan\frac{1}{239} < 0{,}004\,184\,077$.

f) Selon la sous-question c), nous obtenons $\pi = 16\arctan\frac{1}{5} - 4\arctan\frac{1}{239}$, donc, selon les sous-questions d) et e), nous obtenons $16(0{,}197\,395\,560) - 4(0{,}004\,184\,077) < \pi < 16(0{,}197\,395\,562) - 4(0{,}004\,184\,075) \Rightarrow 3{,}141\,592\,652 < \pi < 3{,}141\,592\,692$. Donc, avec sept décimales exactes, $\pi \approx 3{,}141\,592\,7$.

8. a) Soit $a = \operatorname{arccot} x$ et $b = \operatorname{arccot} y$, où $0 < a - b < \pi$. Alors

$$\cot(a-b) = \frac{1}{\tan(a-b)} = \frac{1+\tan a\tan b}{\tan a - \tan b} = \frac{\frac{1}{\cot a}\cdot\frac{1}{\cot b}+1}{\frac{1}{\cot a}-\frac{1}{\cot b}}\cdot\frac{\cot a\cot b}{\cot a\cot b}$$
$$= \frac{1+\cot a\cot b}{\cot b - \cot a} = \frac{1+\cot(\operatorname{arccot} x)\cot(\operatorname{arccot} y)}{\cot(\operatorname{arccot} y)-\cot(\operatorname{arccot} x)} = \frac{1+xy}{y-x}$$

Or, $\operatorname{arccot} x - \operatorname{arccot} y = a - b = \operatorname{arccot}(\cot(a-b)) = \operatorname{arccot}\frac{1+xy}{y-x}$, puisque $0 < a - b < \pi$.

b) En utilisant l'identité à la sous-question a) avec $x = n$ et $y = n + 1$, nous obtenons

$$\operatorname{arccot}(n^2+n+1) = \operatorname{arccot}(1+n(n+1)) = \operatorname{arccot}\frac{1+n(n+1)}{(n+1)-n} = \operatorname{arccot} n - \operatorname{arccot}(n+1)$$

Par conséquent, nous sommes en présence d'une série télescopique dont la $n^{\text{ième}}$ somme partielle est $s_n = [\operatorname{arccot} 0 - \operatorname{arccot} 1] + [\operatorname{arccot} 1 - \operatorname{arccot} 2] + \cdots + [\operatorname{arccot} n - \operatorname{arccot}(n+1)] = \operatorname{arccot} 0 - \operatorname{arccot}(n+1)$. Il s'ensuit que $\sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{arccot}(n^2+n+1) = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}[\operatorname{arccot} 0 - \operatorname{arccot}(n+1)] = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$.

9. Commençons par la série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$ et dérivons-la :

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2} \text{ pour } |x|<1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2} \text{ pour } |x| < 1.$$

Prenons encore la dérivée :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1} = \frac{d}{dx}\frac{x}{(1-x)^2} = \frac{(1-x)^2 - x\cdot 2(1-x)(-1)}{(1-x)^4} = \frac{x+1}{(1-x)^3} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = \frac{x^2+x}{(1-x)^3} \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3x^{n-1} = \frac{d}{dx}\frac{x^2+x}{(1-x)^3} = \frac{(1-x)^3(2x+1)-(x^2+x)3(1-x)^2(-1)}{(1-x)^6} = \frac{x^2+4x+1}{(1-x)^4} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^3x^n = \frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4}, |x| < 1.$$ Le rayon de

 © Groupe Modulo inc., 2013

convergence est 1 parce que c'est le rayon de convergence de la série géométrique de départ. Si $x = \pm 1$, la série est $\sum n^3(\pm 1)^n$, qui diverge selon le critère de divergence; l'intervalle de convergence est donc $]-1, 1[$.

10. Essayons tout d'abord le cas particulier où $k = 1$: $a_0 + a_1 = 0 \;\Rightarrow\; a_1 = -a_0 \;\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_0\sqrt{n} + a_1\sqrt{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(a_0\sqrt{n} - a_0\sqrt{n+1}\right) = a_0\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right)\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$
$$= a_0\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = 0$$

En général, nous obtenons $a_0 + a_1 + \cdots + a_k = 0 \;\Rightarrow\; a_k = -a_0 - a_1 - \cdots - a_{k-1} \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty}\left(a_0\sqrt{n} + a_1\sqrt{n+1} + a_2\sqrt{n+2} + \cdots + a_k\sqrt{n+k}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(a_0\sqrt{n} + a_1\sqrt{n+1} + \cdots + a_{k-1}\sqrt{n+k-1} - a_0\sqrt{n+k} - a_1\sqrt{n+k} - \cdots - a_{k-1}\sqrt{n+k}\right)$$
$$= a_0\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n} - \sqrt{n+k}\right) + a_1\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n+k}\right) + \cdots + a_{k-1}\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+k-1} - \sqrt{n+k}\right)$$

Chacune de ces limites est 0 et nous arrivons à ce résultat en utilisant la même technique de simplification que dans le cas $k = 1$.

Nous obtenons donc

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_0\sqrt{n} + a_1\sqrt{n+1} + a_2\sqrt{n+2} + \cdots + a_k\sqrt{n+k}\right) = a_0(0) + a_1(0) + \cdots + a_{k-1}(0) = 0$$

11. $\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \ln\frac{(n+1)(n-1)}{n^2} = \ln[(n+1)(n-1)] - \ln n^2$

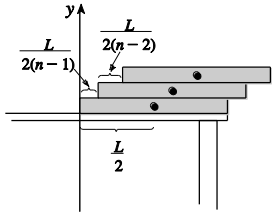
$$= \ln(n+1) + \ln(n-1) - 2\ln n = \ln(n-1) - \ln n - \ln n + \ln(n+1)$$
$$= \ln\frac{n-1}{n} - [\ln n - \ln(n+1)] = \ln\frac{n-1}{n} - \ln\frac{n}{n+1}.$$

Soit $s_k = \sum_{n=2}^{k}\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \sum_{n=2}^{k}\left(\ln\frac{n-1}{n} - \ln\frac{n}{n+1}\right)$ pour $k \geq 2$. Alors,

$$s_k = \left(\ln\frac{1}{2} - \ln\frac{2}{3}\right) + \left(\ln\frac{2}{3} - \ln\frac{3}{4}\right) + \cdots + \left(\ln\frac{k-1}{k} - \ln\frac{k}{k+1}\right) = \ln\frac{1}{2} - \ln\frac{k}{k+1}, \text{ donc}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty}\left(\ln\frac{1}{2} - \ln\frac{k}{k+1}\right) = \ln\frac{1}{2} - \ln 1 = \ln 1 - \ln 2 - \ln 1 = -\ln 2\,.$$

12. Plaçons l'axe des y selon l'illustration ci-dessous. Supposons que la longueur de chaque livre est L. Nous désirons montrer que le centre de masse du système de n livres repose au-dessus de la table, c'est-à-dire $\bar{x} < L$. Les coordonnées sur l'axe des x des centres de masse des livres sont $x_1 = \frac{L}{2}$, $x_2 = \frac{L}{2(n-1)} + \frac{L}{2}$, $x_3 = \frac{L}{2(n-1)} + \frac{L}{2(n-2)} + \frac{L}{2}$ et ainsi de suite.

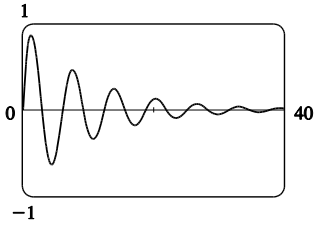


Chaque livre a la même masse *m*, donc, s'il y a *n* livres, alors

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{mx_1 + mx_2 + \cdots + mx_n}{mn} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \\ &= \frac{1}{n}\left[\frac{L}{2} + \left(\frac{L}{2(n-1)} + \frac{L}{2}\right) + \left(\frac{L}{2(n-1)} + \frac{L}{2(n-2)} + \frac{L}{2}\right) + \cdots \right. \\ &\qquad \left. + \left(\frac{L}{2(n-1)} + \frac{L}{2(n-2)} + \cdots + \frac{L}{4} + \frac{L}{2} + \frac{L}{2}\right)\right] \\ &= \frac{L}{n}\left[\frac{n-1}{2(n-1)} + \frac{n-2}{2(n-2)} + \cdots + \frac{2}{4} + \frac{1}{2} + \frac{n}{2}\right] = \frac{L}{n}\left[(n-1)\frac{1}{2} + \frac{n}{2}\right] = \frac{2n-1}{2n}L < L\end{aligned}$$

Ceci démontre que, quel que soit le nombre de livres ajoutés selon la procédure donnée, le centre de masse repose au-dessus de la table. On remarque également que la série $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{2}\sum(1/n)$ est divergente (série harmonique); nous pouvons donc faire en sorte que le livre du dessus déborde la table de la distance que nous désirons, si nous ajoutons assez de livres.

13. a)



Les points d'intersection de la courbe avec l'axe des *x* se produisent là où $\sin x = 0 \iff x = n\pi$, *n* étant un nombre entier. Donc, en utilisant la formule pour les disques [et un logiciel de calcul symbolique ou $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, ainsi que la formule 99 pour évaluer l'intégrale], le volume de la $n^{\text{ième}}$ perle est

$$\begin{aligned}V_n &= \pi\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}(e^{-x/10}\sin x)^2\,dx = \pi\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} e^{-x/5}\sin^2 x\,dx \\ &= \tfrac{250\pi}{101}(e^{-(n-1)\pi/5} - e^{-n\pi/5})\end{aligned}$$

b) Le volume total est $\pi\int_0^\infty e^{-x/5}\sin^2 x\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} V_n = \frac{250\pi}{101}\sum_{n=1}^{\infty}[e^{-(n-1)\pi/5} - e^{-n\pi/5}] = \frac{250\pi}{101}$ [somme télescopique].

Autre méthode : Si le volume à la sous-question a) a été représenté par $V_n = \frac{250\pi}{101}e^{-n\pi/5}(e^{\pi/5} - 1)$, alors nous constatons que $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ est une série géométrique avec $a = \frac{250\pi}{101}(1 - e^{-\pi/5})$ et $r = e^{-\pi/5}$.

14. Nous remarquons tout d'abord que les deux séries sont absolument convergentes (séries *p* avec $p > 1$.) Soit *x* égale à l'expression donnée. Alors,

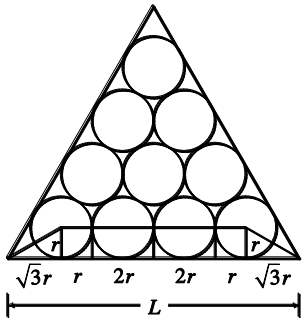
 © Groupe Modulo inc., 2013

$$x=\frac{1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots}{1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}+\cdots}=\frac{1+\left(2\cdot\frac{1}{2^p}-\frac{1}{2^p}\right)+\frac{1}{3^p}+\left(2\cdot\frac{1}{4^p}-\frac{1}{4^p}\right)+\cdots}{1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}+\cdots}$$
$$=\frac{\left(1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}+\cdots\right)+\left(2\cdot\frac{1}{2^p}+2\cdot\frac{1}{4^p}+2\cdot\frac{1}{6^p}+\cdots\right)}{1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}+\cdots}$$
$$=1+\frac{2\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{8^p}+\cdots\right)}{1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}+\cdots}=1+\frac{\frac{1}{2^{p-1}}\left(1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots\right)}{1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}+\cdots}=1+2^{1-p}x$$

Par conséquent, $x=1+2^{1-p}x \quad\Leftrightarrow\quad x-2^{1-p}x=1 \quad\Leftrightarrow\quad x(1-2^{1-p})=1 \quad\Leftrightarrow\quad x=\dfrac{1}{1-2^{1-p}}$.

15. Si L est la longueur d'un côté du triangle équilatéral, alors l'aire est $A=\frac{1}{2}L\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}L=\frac{\sqrt{3}}{4}L^2$; donc, $L^2=\frac{4}{\sqrt{3}}A$. Soit r le rayon d'un des cercles. Lorsqu'il y a n rangées de cercles, la figure montre que $L=\sqrt{3}r+r+(n-2)(2r)+r+\sqrt{3}r=r\left(2n-2+2\sqrt{3}\right)$, donc $r=\dfrac{L}{2\left(n+\sqrt{3}-1\right)}$. Le nombre de cercles est $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$; l'aire totale des cercles est donc

$$A_n=\frac{n(n+1)}{2}\pi r^2=\frac{n(n+1)}{2}\pi\frac{L^2}{4\left(n+\sqrt{3}-1\right)^2}$$
$$=\frac{n(n+1)}{2}\pi\frac{4A/\sqrt{3}}{4\left(n+\sqrt{3}-1\right)^2}=\frac{n(n+1)}{\left(n+\sqrt{3}-1\right)^2}\frac{\pi A}{2\sqrt{3}}\quad\Rightarrow$$



$$\frac{A_n}{A}=\frac{n(n+1)}{\left(n+\sqrt{3}-1\right)^2}\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$
$$=\frac{1+1/n}{\left[1+\left(\sqrt{3}-1\right)/n\right]^2}\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\to\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\text{ lorsque }n\to\infty$$

16. Comme on nous donne $a_0=a_1=1$ et $a_n=\dfrac{(n-1)(n-2)a_{n-1}-(n-3)a_{n-2}}{n(n-1)}$, nous pouvons calculer quelques-uns des prochains termes de la suite : $a_2=\dfrac{1\cdot0\cdot a_1-(-1)a_0}{2\cdot1}=\dfrac{1}{2}$, $a_3=\dfrac{2\cdot1\cdot a_2-0\cdot a_1}{3\cdot2}=\dfrac{1}{6}$, $a_4=\dfrac{3\cdot2\cdot a_3-1\cdot a_2}{4\cdot3}=\dfrac{1}{24}$. Il semble que $a_n=\dfrac{1}{n!}$; nous essaierons

 © Groupe Modulo inc., 2013

donc de le prouver par induction. La première étape étant déjà complétée, supposons donc que $a_k = \frac{1}{k!}$ et $a_{k-1} = \frac{1}{(k-1)!}$. Alors,

$a_{k+1} = \frac{k(k-1)a_k - (k-2)a_{k-1}}{(k+1)k} = \frac{\frac{k(k-1)}{k!} - \frac{k-2}{(k-1)!}}{(k+1)k} = \frac{(k-1)-(k-2)}{[(k+1)(k)](k-1)!} = \frac{1}{(k+1)!}$. Ce qui complète la preuve par induction. Par conséquent, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.

17. Comme à la section 6.8, nous devons effectuer l'intégration de la fonction x^x en intégrant la série. En posant $x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x \ln x}$ et en utilisant la série de Maclaurin de e^x, nous obtenons $x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x \ln x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \ln x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n (\ln x)^n}{n!}$. Comme pour les séries de puissances, nous pouvons effectuer l'intégration de cette série un terme à la fois : $\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^n (\ln x)^n}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 x^n (\ln x)^n dx$.

Intégrons par parties avec $u = (\ln x)^n$, $dv = x^n\,dx$, donc $du = \frac{n(\ln x)^{n-1}}{x} dx$ et $v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^n (\ln x)^n dx &= \lim_{t \to 0^+} \int_t^1 x^n (\ln x)^n dx = \lim_{t \to 0^+} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} (\ln x)^n \right]_t^1 - \lim_{t \to 0^+} \int_t^1 \frac{n}{n+1} x^n (\ln x)^{n-1} dx \\ &= 0 - \frac{n}{n+1} \int_0^1 x^n (\ln x)^{n-1} dx \end{aligned}$$

(la règle de l'Hospital a été utilisée dans l'évaluation de la première limite). Une nouvelle intégration par parties produit $\int_0^1 x^n (\ln x)^k dx = -\frac{k}{n+1} \int_0^1 x^n (\ln x)^{k-1} dx$, puis, en combinant ces étapes, nous obtenons

$\int_0^1 x^n (\ln x)^n dx = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^n} \int_0^1 x^n dx = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}} \quad \Rightarrow$

$\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^1 x^n (\ln x)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

18. a) Puisque P_n est défini comme le centre de $P_{n-4}P_{n-3}$, $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-4} + x_{n-3})$ pour $n \geq 5$. Nous pouvons donc démontrer par induction que $\frac{1}{2} x_n + x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3} = 2$. Le cas $n = 1$ se règle immédiatement, puisque $\frac{1}{2} \cdot 0 + 1 + 1 + 0 = 2$. Supposons que ce résultat est également vrai pour $n = k - 1$, c'est-à-dire que $\frac{1}{2} x_{k-1} + x_k + x_{k+1} + x_{k+2} = 2$. Alors, pour $n = k$,

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} x_k + x_{k+1} + x_{k+2} + x_{k+3} &= \tfrac{1}{2} x_k + x_{k+1} + x_{k+2} + \tfrac{1}{2}(x_{k+3-4} + x_{k+3-3}) \quad \text{[selon ce qui précède]} \\ &= \tfrac{1}{2} x_{k-1} + x_k + x_{k+1} + x_{k+2} = 2 \quad \text{[selon l'hypothèse d'induction]} \end{aligned}$$

De façon similaire, pour $n \geq 5$, $y_n = \frac{1}{2}(y_{n-4} + y_{n-3})$, donc le raisonnement qui précède s'applique à y, en remplaçant 2 par $\frac{1}{2} y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = \frac{1}{2} \cdot 1 + 1 + 0 + 0 = \frac{3}{2}$. Donc, $\frac{1}{2} y_n + y_{n+1} + y_{n+2} + y_{n+3} = \frac{3}{2}$ pour tout n.

 © Groupe Modulo inc., 2013

b) $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2}x_n + x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3}) = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}x_n + \lim_{n\to\infty}x_{n+1} + \lim_{n\to\infty}x_{n+2} + \lim_{n\to\infty}x_{n+3} = 2$. Puisque toutes les limites du membre de gauche de l'équation sont égales, nous obtenons $\frac{7}{2}\lim_{n\to\infty}x_n = 2 \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty}x_n = \frac{4}{7}$. De la même façon, $\frac{7}{2}\lim_{n\to\infty}y_n = \frac{3}{2} \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty}y_n = \frac{3}{7}$, donc $P = (\frac{4}{7}, \frac{3}{7})$.

19. Selon le tableau 1 à la section 6.9, $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour $|x| < 1$. En particulier, pour $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, nous obtenons $\frac{\pi}{6} = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\left(1/\sqrt{3}\right)^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{1}{3}\right)^n \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{2n+1}$, donc

$$\pi = \frac{6}{\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n} = 2\sqrt{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n} = 2\sqrt{3}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}\right) \quad\Rightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - 1.$$

20. a) En utilisant $s_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$, $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + x^{2n-2} - x^{2n-1} = \frac{1[1-(-x)^{2n}]}{1-(-x)} = \frac{1-x^{2n}}{1+x}$.

b) $\int_0^1 (1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + x^{2n-2} - x^{2n-1})dx = \int_0^1 \frac{1-x^{2n}}{1+x}dx \quad\Rightarrow\quad \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} - \frac{x^{2n}}{2n}\right]_0^1 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} - \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}dx \quad\Rightarrow$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} - \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}dx$$

c) Puisque $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{1\cdot 2}$, $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3\cdot 4}, \cdots, \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{(2n-1)(2n)}$, nous constatons, selon la sous-question b), que $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n)} - \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = -\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}dx$. Par conséquent,

$$\left|\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n)} - \int_0^1 \frac{dx}{1+x}\right| = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}dx < \int_0^1 x^{2n}dx \quad \left[\text{puisque } \frac{x^{2n}}{1+x} < x^{2n} \text{ pour } 0 < x \le 1\right].$$

d) Nous remarquons que $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \left[\ln(1+x)\right]_0^1 = \ln 2$ et que $\int_0^1 x^{2n}dx = \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2n+1}$. La réponse à la sous-question c) devient donc $\left|\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n)} - \ln 2\right| < \frac{1}{2n+1}$. En d'autres mots, la $n^{\text{ième}}$ somme partielle s_n de la série donnée satisfait à $|s_n - \ln 2| < \frac{1}{2n+1}$. Par conséquent, $\lim_{n\to\infty}s_n = \ln 2$, c'est-à-dire que $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \frac{1}{7\cdot 8} + \cdots = \ln 2$.

21. Posons $f(x)$ représentant le membre de gauche de l'équation $1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} + \frac{x^3}{6!} + \frac{x^4}{8!} + \cdots = 0$. Si $x \ge 0$, alors $f(x) \ge 1$ et il n'y a pas de solutions à cette équation. On remarque que $f(-x^2) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots = \cos x$. Les solutions de $\cos x = 0$ pour $x < 0$ sont

 © Groupe Modulo inc., 2013

données par $x = \frac{\pi}{2} - \pi k$, où k est un nombre entier positif. Par conséquent, les solutions de $f(x) = 0$ sont $x = -\left(\frac{\pi}{2} - \pi k\right)^2$, où k est un nombre entier positif.

22. Supposons que la base du premier triangle rectangle est de longueur a. Alors, en utilisant le théorème de Pythagore à répétition, nous trouvons que la base du second triangle rectangle est de longueur $\sqrt{1+a^2}$, la base du troisième triangle rectangle est de longueur $\sqrt{2+a^2}$, et, en général, la base du $n^{\text{ième}}$ triangle rectangle est de longueur $\sqrt{n-1+a^2}$ et son hypoténuse de longueur $\sqrt{n+a^2}$. Par conséquent, $\theta_n = \arctan\left(1/\sqrt{n-1+a^2}\right)$ et $\sum_{n=1}^{\infty}\theta_n = \sum_{n=1}^{\infty}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n-1+a^2}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n+a^2}}\right)$. Nous désirons montrer que cette série diverge. Remarquons tout d'abord que la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+a^2}}$ diverge, selon le critère de comparaison par une limite avec la série p divergente $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left[p = \frac{1}{2} \le 1\right]$, puisque $\lim_{n\to\infty}\frac{1/\sqrt{n+a^2}}{1/\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+a^2}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+a^2}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{1+a^2/n}} = 1 > 0$. Par conséquent, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+a^2}}$ diverge également. Or, $\sum_{n=0}^{\infty}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{n+a^2}}\right)$ diverge, selon le critère de comparaison par une limite avec $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+a^2}}$, puisque

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\arctan\left(1/\sqrt{n+a^2}\right)}{1/\sqrt{n+a^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\arctan\left(1/\sqrt{x+a^2}\right)}{1/\sqrt{x+a^2}} = \lim_{y\to\infty}\frac{\arctan(1/y)}{1/y} \quad \left[y = \sqrt{x+a^2}\right]$$
$$= \lim_{z\to 0^+}\frac{\arctan z}{z}[z = 1/y] \overset{\text{H}}{=} \lim_{z\to 0^+}\frac{1/(1+z^2)}{1} = 1 > 0$$

Par conséquent, $\sum_{n=1}^{\infty}\theta_n$ est une série divergente.

23. Désignons la série par la lettre S. Regroupons les termes selon le nombre de chiffres dans leurs dénominateurs :

$$S = \underbrace{\left(\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9}\right)}_{g_1} + \underbrace{\left(\tfrac{1}{11} + \cdots + \tfrac{1}{99}\right)}_{g_2} + \underbrace{\left(\tfrac{1}{111} + \cdots + \tfrac{1}{999}\right)}_{g_3} + \cdots$$

Or, dans le groupe g_n, puisqu'il y a 9 choix pour chacun des n chiffres dans le dénominateur, il y a 9^n termes. De plus, chaque terme de g_n est inférieur à $\frac{1}{10^{n-1}}$ [sauf pour le premier terme de g_1]. Donc, $g_n < 9^n \cdot \frac{1}{10^{n-1}} = 9\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$ Or, $\sum_{n=1}^{\infty}9\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$ est une série géométrique avec $a = 9$ et $r = \frac{9}{10} < 1$. Par conséquent, selon le critère de comparaison, $S = \sum_{n=1}^{\infty}g_n < \sum_{n=1}^{\infty}9\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} = \frac{9}{1-9/10} = 90$.

24. a) Soit $f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$. Alors,

$$\begin{aligned}
x &= (1-x-x^2)(c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots) \\
x &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + \cdots \\
&\quad -c_0x - c_1x^2 - c_2x^3 - c_3x^4 - c_4x^5 - \cdots \\
&\quad\quad - c_0x^2 - c_1x^3 - c_2x^4 - c_3x^5 - \cdots \\
x &= c_0 + (c_1 - c_0)x + (c_2 - c_1 - c_0)x^2 + (c_3 - c_2 - c_1)x^3 + \cdots
\end{aligned}$$

En comparant les coefficients des puissances de x, nous obtenons $c_0 = 0$ et

$$\begin{aligned}
c_1 - c_0 = 1 &\Rightarrow c_1 = c_0 + 1 = 1 \\
c_2 - c_1 - c_0 = 0 &\Rightarrow c_2 = c_1 + c_0 = 1 + 0 = 1 \\
c_3 - c_2 - c_1 = 0 &\Rightarrow c_3 = c_2 + c_1 = 1 + 1 = 2
\end{aligned}$$

En général, nous obtenons $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$ pour $n \geq 3$. Chaque c_n est égal au $n^{\text{ième}}$ nombre de Fibonacci, c'est-à-dire que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n$

b) En complétant le carré de $x^2 + x - 1$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) - 1 - \frac{1}{4} &= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 \\
&= \left(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) = \left(x + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)
\end{aligned}$$

Donc, $\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{-x}{x^2+x-1} = \frac{-x}{\left(x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}$. Les facteurs qui apparaissent au dénominateur sont linéaires, donc la décomposition en fractions partielles est $\frac{-x}{\left(x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{A}{x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{B}{x+\frac{1-\sqrt{5}}{2}} - x = A\left(x+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

Si $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, alors $-\frac{-1+\sqrt{5}}{2} = B\sqrt{5} \Rightarrow B = \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$.

Si $x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, alors $-\frac{-1-\sqrt{5}}{2} = A\left(-\sqrt{5}\right) \Rightarrow A = \frac{1+\sqrt{5}}{-2\sqrt{5}}$. Par conséquent,

 © Groupe Modulo inc., 2013

$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{-2\sqrt{5}}}{x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}{x+\frac{1-\sqrt{5}}{2}} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{-2\sqrt{5}}}{x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \cdot \frac{\frac{2}{1+\sqrt{5}}}{\frac{2}{1+\sqrt{5}}} + \frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}{x+\frac{1-\sqrt{5}}{2}} \cdot \frac{\frac{2}{1-\sqrt{5}}}{\frac{2}{1-\sqrt{5}}}$$

$$= \frac{-1/\sqrt{5}}{1+\frac{2}{1+\sqrt{5}}x} + \frac{1/\sqrt{5}}{1+\frac{2}{1-\sqrt{5}}x} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{1+\sqrt{5}}x\right)^n + \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{1-\sqrt{5}}x\right)^n$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{-2}{1-\sqrt{5}}\right)^n - \left(\frac{-2}{1+\sqrt{5}}\right)^n\right]x^n$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-2)^n(1+\sqrt{5})^n - (-2)^n(1-\sqrt{5})^n}{(1-\sqrt{5})^n(1+\sqrt{5})^n}\right]x^n \quad \text{[le terme } n=0 \text{ est 0]}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-2)^n\left((1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n\right)}{(1-\sqrt{5})^n}\right]x^n$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n}\right]x^n \quad [(-4)^n = (-2)^n \cdot 2^n]$$

Selon la sous-question a), cette série doit être égale à $\sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n$, donc $f_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$, qui est une formule explicite du $n^{\text{ième}}$ nombre de Fibonacci.

25. $u = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots$, $v = x + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$, $w = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots$.

Utilisons la règle de d'Alembert pour montrer que les séries de *u*, *v* et *w* ont des rayons de convergence positifs (∞ dans chaque cas), donc le théorème 6.8.2 s'applique et, par conséquent, nous pouvons dériver chacune des séries :

$$\frac{du}{dx} = \frac{3x^2}{3!} + \frac{6x^5}{6!} + \frac{9x^5}{9!} + \cdots = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^8}{8!} \cdots = w$$

De façon similaire, $\frac{dv}{dx} = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots = u$ et $\frac{dw}{dx} = x + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^{10}}{10!} \cdots = v$.

Donc, $u' = w$, $v' = u$ et $w' = v$. Maintenant, dérivons le membre de gauche de l'égalité à montrer :

$$\frac{d}{dx}(u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw) = 3u^2u' + 3v^2v' + 3w^2w' - 3(u'vw + uv'w + uvw')$$
$$= 3u^2w + 3v^2u + 3w^2v - 3(vw^2 + u^2w + uv^2) = 0 \quad \Rightarrow$$

$u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = C$. Pour trouver la valeur de la constante *C*, insérons $x = 0$ dans la dernière égalité afin d'obtenir $1^3 + 0^3 + 0^3 - 3(1 \cdot 0 \cdot 0) = C \quad \Rightarrow \quad C = 1$, donc $u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = 1$.

26. À démontrer : Si $n > 1$, alors la $n^{\text{ième}}$ somme partielle $s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ de la série harmonique n'est pas un nombre entier.

Démonstration : Posons que 2^k est la plus haute puissance de 2 qui est inférieure à ou égale à *n* et posons *M*, le produit de tous les nombres entiers positifs impairs qui sont inférieurs à ou égaux à *n*. Supposons que $s_n = m$, un nombre entier. Alors, $M2^k s_n = M2^k m$. Puisque $n \geq 2$, nous obtenons $k \geq 1$ et, par conséquent, $M2^k m$ est un nombre entier pair. Nous allons montrer que $M2^k s_n$ est un nombre entier impair, ce qui contradit l'égalité $M2^k s_n = M2^k m$ et contredit l'hypothèse que s_n est un nombre entier.

 © Groupe Modulo inc., 2013

$M2^k s_n = M2^k \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{M2^k}{i}$. Si $1 \le i \le n$ et i est impair, alors $\frac{M}{i}$ est un nombre entier impair, puisque i est un des nombres entiers impairs dont on a calculé le produit pour obtenir M. Par conséquent, $\frac{M2^k}{i}$ est un nombre entier pair dans ce cas. Si $1 \le i \le n$ et i est pair, alors nous pouvons écrire $i = 2^r l$, où 2^r est la plus haute puissance de 2 qui divise i et l est impair. Si $r < k$, alors $\frac{M2^k}{i} = \frac{2^k}{2^r} \cdot \frac{M}{l} = 2^{k-r} \frac{M}{l}$, qui est un nombre entier pair, le produit du nombre entier pair 2^{k-r} et du nombre entier impair $\frac{M}{l}$. Si $r = k$, alors $l = 1$, puisque $l > 1 = l \ge 2 \quad \Rightarrow \quad i = 2^k l \ge 2^k \cdot 2 = 2^{k+1}$, contrairement au choix de 2^k comme étant la plus haute puissance de 2 qui est inférieure à ou égale à n. Ceci démontre que $r = k$ seulement lorsque $i = 2^k$. Dans ce cas, $\frac{M2^k}{i} = M$, un nombre entier *impair*. Puisque $\frac{M2^k}{i}$ est un nombre entier pair pour chaque i à l'exception de 2^k et puisque $\frac{M2^k}{i}$ est un nombre entier impair lorsque $i = 2^k$, nous constatons que $M2^k s_n$ est un nombre entier impair. Ceci complète la démonstration.

 © Groupe Modulo inc., 2013